

El Teorema de Sylvester

Bernardo Ábrego Lerma

1 Introducción

“Considérese un conjunto finito de puntos en el plano con la propiedad de que la recta que pasa por dos puntos cualesquiera contiene a un tercero. ¿Deberán estar todos los puntos sobre una misma recta?”

Hace más de cien años Sylvester (1893) propuso este problema. En aquella época no se encontró ninguna solución satisfactoria, y el problema pareció ser relegado al olvido. Cuarenta años después (1933) Paul Erdős lo sacó a la luz como una conjetura en su forma contrapuesta:

“Si un conjunto finito de puntos en el plano no está sobre una línea recta, entonces hay una recta que pasa por exactamente dos puntos”.

Erdős en 1982 escribió al respecto “esperaba que el problema fuera sencillo, pero para mi gran sorpresa y desencanto no pude encontrar una demostración”. En 1943, Erdős propuso el problema en “The American Mathematical Monthly” aún sin saber que ya había sido propuesto cincuenta años antes, y al año siguiente apareció impresa la primera solución del mismo por Gallai.

El objetivo de este trabajo es mostrar algunas de las pruebas que se conocen del ahora Teorema de Sylvester-Gallai, haciendo énfasis en la diversidad de técnicas que se han usado para su solución; también se plantea cómo generalizar el problema hacia conjuntos determinados por un número finito de puntos y se resuelve el problema con círculos y vértices de triángulos equiláteros.

2 Las pruebas del Teorema de Sylvester

Definiciones: Sea P un conjunto finito de puntos en el plano, se llamará *recta conectora* a aquella que una dos puntos de P , y *recta ordinaria* a aquella que pase por exactamente dos puntos de P .

En función de las definiciones anteriores, el Teorema de Sylvester es el siguiente:

Teorema 1 (Gallai, 1944) *Cualquier conjunto finito P de puntos, no todos colineales, determina al menos una recta ordinaria.*

Demostración 1 (Gallai, 1944): Escójase un punto $p_1 \in P$. Si p_1 cae en alguna recta ordinaria el teorema es cierto, por lo tanto se supondrá que p_1 no cae en ninguna recta ordinaria. Proyéctese p_1 a algún punto al infinito (nótese que las proyecciones preservan las relaciones de incidencia), y considérese ahora el conjunto de rectas conectoras que pasan por p_1 ; todas éstas son paralelas entre sí, y cada una de ellas contiene por lo menos dos puntos de P además de p_1 . El resto de rectas conectoras (las que no pasan por p_1), son transversales a las anteriores y por tanto forman un cierto ángulo con el haz de rectas paralelas por p_1 . Sea s la recta transversal conectora que forma el menor de dichos ángulos (ésta existe, pues sólo hay un número finito de rectas conectoras, Fig. 2.1.A). Supóngase que s tiene por lo menos tres puntos de P ; p_2 , p_3 y p_4 , y además p_3 está entre p_2 y p_4 (Fig. 2.1.B). La recta conectora por p_1p_3 no es ordinaria, por tanto contiene algún otro punto $p_5 \in P$, y entonces alguna de las rectas p_2p_5 ó p_4p_5 formaría un ángulo menor con el haz de paralelas que el que forma s . Por lo tanto s tiene exactamente dos puntos de P , es decir, es ordinaria como se quería demostrar. ■

La siguiente prueba es particularmente simple y totalmente euclidiana.

Demostración 2 (Kelly, 1948): Sea P un conjunto finito de puntos no todos colineales, y sea S el conjunto de rectas conectoras determinadas por P . Por cada punto $p \in P$ y cada recta $s \in S$ que no pase por p , sea $d(p, s)$ la distancia euclidiana de p a s . El conjunto de todas estas distancias es finito, ya que tanto P como S lo son; por lo tanto

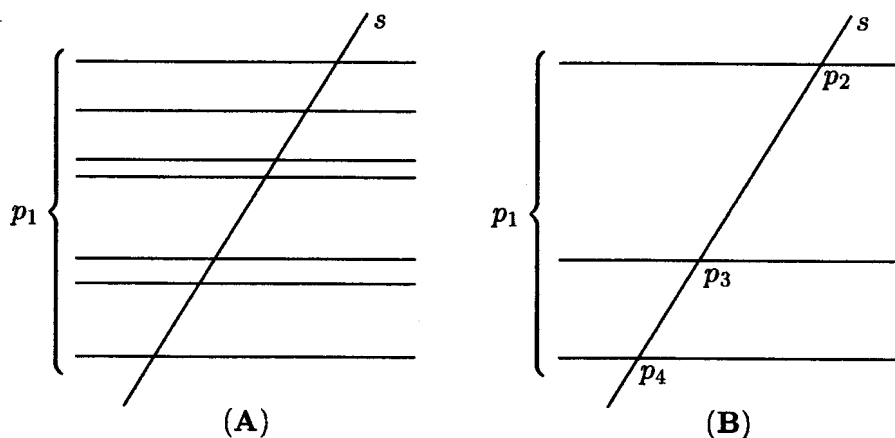


Figura 2.1: Primera demostración.

hay una de éstas que cumple ser la menor. Sea $p^* \in P$ y $s^* \in S$ una pareja que satisface tener dicha distancia es mínima. Se afirma que s^* es ordinaria, ya que de lo contrario s^* contendría al menos tres puntos de P , de los cuales por lo menos dos caerían en un mismo semiplano determinado por p^*q , con q el pie de la perpendicular a s^* por p^* ; sean estos puntos p_1 y p_2 con p_1 entre q y p_2 (Fig. 2.2.A) ó $p_1 = q$ (como en Fig. 2.2.B). En ambos casos la distancia de p_1 a la recta conectora p^*p_2 sería menor que $d(p^*, s^*)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto s^* es ordinaria y el teorema queda demostrado. ■

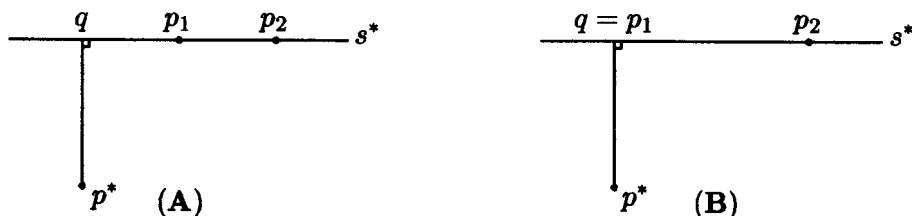


Figura 2.2: Segunda demostración.

Demostración 3 (Steinberg, 1944): Sea P un conjunto de puntos no todos colineales, y sea S el conjunto de rectas conectoras determinadas por P . Sea $p \in P$, si p cae en alguna recta ordinaria el teorema queda probado, por lo tanto se supondrá que p no cae en ninguna recta ordinaria. Sea ℓ una recta por p que no pase por ningún otro punto de

P , las rectas en S que no pasan por p intersectan a ℓ en los puntos x_1, x_2, \dots, x_k , supóngase, sin perder generalidad, que el segmento px_1 no contiene a ningún otro x_i (Fig. 2.3.A). Sea $s \in S$ una recta que pase por x_1 , (Fig. 2.3.B). Entonces s es ordinaria, pues de lo contrario habría tres o más puntos de P en s . Nómbrense p_1, p_2 y p_3 a dichos puntos de tal forma que p_1 y x_1 , queden separados por p_2 y p_3 (Fig. 2.3.C). La recta conectora pp_1 contiene otro punto de P (recuérdese que p no cae en ninguna recta ordinaria), sea este punto p_4 , ahora alguna de las rectas conectoras p_2p_4 ó p_3p_4 intersectaría a ℓ en el segmento “prohibido” px_1 , lo cual es una contradicción. Por lo tanto s es ordinaria y el teorema queda demostrado. ■

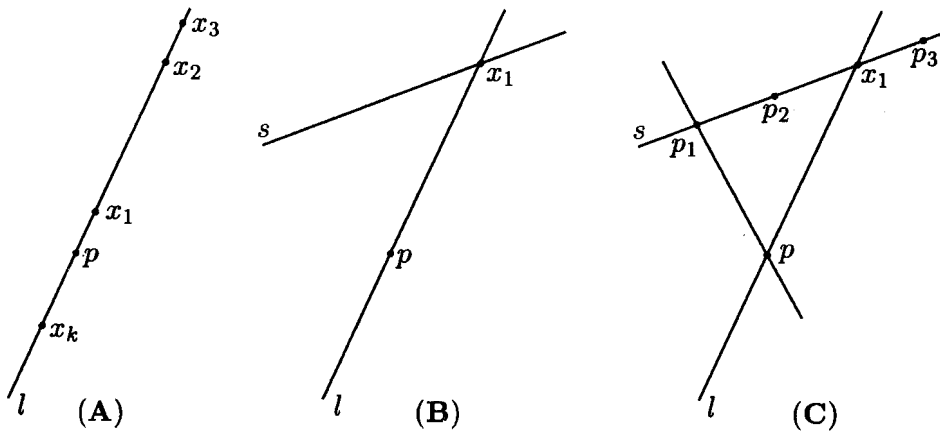


Figura 2.3: Tercera demostración.

Esta demostración tiene la virtud de ser una prueba elemental, en el sentido de que el teorema habla de incidencia de puntos y rectas, y la demostración sólo utiliza estos elementos, a diferencia de las demostraciones 1 y 2 en las que se usa el concepto de ángulo y distancia respectivamente.

La prueba que sigue muestra como el Teorema de Sylvester se deduce a partir de un hecho conocido sobre mapas en la esfera.

Demostración 4 (Steenrod, ?): Se probará primero la siguiente proposición acerca de mapas en la esfera: Dado un mapa finito en la esfera donde cada cara tiene tres o más lados existe un vértice con valencia menor que seis (la valencia de un vértice es el número de aristas que inciden en él).

Si V denota el número de vértices del mapa, A el número de aristas, y C el número de caras; se tiene la relación de Euler:

$$V - A + C = 2 \quad (1)$$

Ahora, como cada cara tiene por lo menos tres aristas, y cada arista está en exactamente dos caras se tiene que:

$$3C \leq 2A \quad (2)$$

Supóngase que la valencia de cada vértice es mayor o igual que seis. Como cada arista contiene exactamente dos vértices, entonces:

$$6V \leq 2A \quad (3)$$

De (1), (2) y (3) se sigue que:

$$12 = 6(V - A + C) = 6V - 6A + 6C \leq 2A - 6A + 4A = 0$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe algún vértice con valencia menor que seis.

Piénsese el Teorema de Sylvester en el plano proyectivo y en su forma dual, es decir: "Dado un conjunto de rectas en el plano proyectivo, no todas concurrentes, existe un punto que cae precisamente en dos rectas". Considérese ahora el plano proyectivo como una esfera identificando antípodas, y obsérvese que la identificación no contribuye en nada al problema; el planteamiento equivalente queda como sigue: "Dado un número finito de círculos máximos en la esfera, no todos concurrentes, existe un punto que cae exactamente en dos círculos". De ser falso el enunciado anterior, los círculos máximos generarían un mapa en la esfera donde cada vértice caería por lo menos en tres círculos máximos, es decir, cada vértice tendría valencia por lo menos seis; lo cual es imposible como se probó anteriormente. Por lo tanto el enunciado es cierto y el teorema queda demostrado. ■

3 Otros problemas tipo Sylvester

Sea R una propiedad sobre conjuntos del plano, y sea S una colección de subconjuntos de E^2 (El plano euclidiano), tal que cualquier conjunto

P de n puntos que cumpla R está contenido en algún elemento de S ; y además n es el máximo natural con esta propiedad.

Ejemplos:

- 1) $R = \emptyset$, S el conjunto de todas las rectas del plano y $n = 2$ (i.e. cualquier conjunto de dos puntos está contenido en una recta, pero no cualquier conjunto de tres lo está).
- 2) R la propiedad de no tener ternas colineales, S el conjunto de todas las circunferencias en el plano y $n = 3$ (i.e. cualquier conjunto de tres puntos no colineales está contenido en una circunferencia, y no cualquier conjunto de cuatro puntos lo está).

Bajo estas consideraciones se puede plantear el siguiente problema:

Problema: Sea P un conjunto finito de puntos en el plano que cumple R , y que además para cada subconjunto de n puntos de P hay otro, de forma que los $n + 1$ están contenidos en algún elemento de S . ¿Será cierto que todo P está contenido en algún elemento de S ?

Nótese que si R, S y n son como en el ejemplo 1, entonces el problema resulta ser el Teorema de Sylvester. Si R, S y n son como en el ejemplo 2 el problema es cierto, y Motzkin (1951) fue el primero en dar cuenta del hecho, el problema con S el conjunto de cónicas no degeneradas (elipses e hipérbolas), $n = 5$ y R cierta propiedad que garantiza que cualesquiera cinco puntos esten contenidos en una cónica, fue resuelto por Wiseman y Wilson (1988); mientras que el problema con S el conjunto de parábolas, $n = 4$ y R cierta propiedad análoga, permanece abierto.

A continuación se resolverá el problema con R, S y n como en el ejemplo 2, y también con S el conjunto de todas las ternas que son vértices de triángulos equiláteros, $R = \emptyset$ y $n = 2$. Adicionalmente se probará que el problema con S el conjunto de todas las ternas de puntos que son vértices de triángulos isósceles semejantes a uno dado, $R = \emptyset$ y $n = 2$ es falso, excepto que el triángulo dado sea equilátero.

Teorema 2 (Motzkin, 1951) *Para cualquier conjunto finito de puntos no tres de ellos colineales, y no todos sobre una circunferencia, hay una circunferencia que pasa por exactamente tres de ellos.*

Demostración Sea P un conjunto finito de puntos en E^2 , $|P| \geq 4$ pues de lo contrario P no cumple las hipótesis. Sea C el conjunto de todas las circunferencias determinadas por ternas de P . Tómesese $p \in P$, y sea $C_p \subseteq C$ las circunferencias de C que además pasan por p (Fig. 3.1), nótese que $P \subseteq C_p$ y que además todo punto de P es intersección de por lo menos dos circunferencias de C_p . Inviértase el plano con respecto a alguna circunferencia arbitraria con centro en p (Fig. 3.1). Sean P' y C'_p las imágenes de P y C_p bajo la inversión. Como C_p es un conjunto de circunferencias que pasan por el centro de inversión, entonces C'_p es un conjunto de rectas que coincide con ser el conjunto de rectas conectoras determinadas por P' ; por lo tanto por el Teorema de Sylvester existe $c' \in C'_p$ que contiene sólo dos puntos de P' y entonces c (la imagen inversa de c') es una circunferencia que pasa por p y por únicamente otros dos puntos de P . Probándose así el Teorema. ■

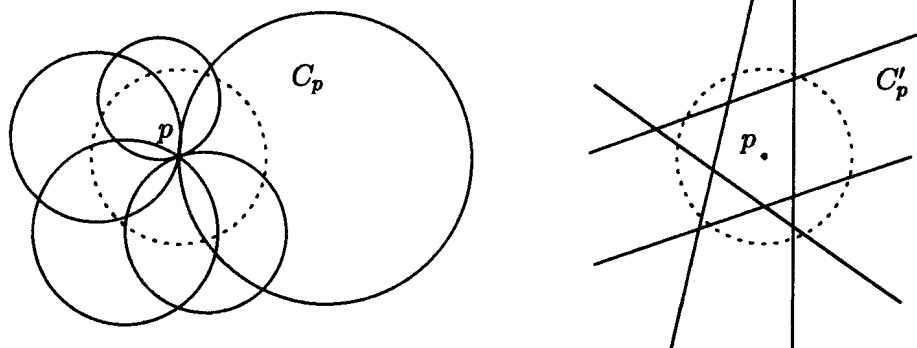


Figura 3.1:

Teorema 3 (Ábrego, 1994) *Si P es un conjunto finito de puntos en el plano con la propiedad de que por cada dos puntos de P hay otro, de forma que los tres son vértices de un triángulo equilátero; entonces P tiene tres elementos.*

Demostración Supóngase que P tiene más de tres elementos. Sean X y Y dos puntos en P a distancia máxima, por hipótesis hay $Z \in P$ tal que $\triangle XYZ$ es equilátero. Como la distancia máxima entre puntos de P es igual al lado del triángulo $\triangle XYZ$ entonces P está contenido

en el triángulo de Reuleáux con vértices XYZ . Sea W el centroide de $\triangle XYZ$, considérense las regiones ZXW , XYW y YZW (Fig. 3.2.A); por simetría se puede suponer que hay un cuarto punto $V \in P$ en la región YZW . Sean V_1 y V_2 los dos puntos en el plano que cumplen que los triángulos $\triangle XVV_1$, y $\triangle XVV_2$ son equiláteros y sean Z_1ZW_1 , y YY_2W_2 las regiones obtenidas de rotar la región ZYW desde X , 60° y -60° respectivamente (Fig. 3.2.B). Como $\angle XVV_1 = 60^\circ$ y $|XV| = |XV_1|$ entonces V_1 está en la región Z_1ZW_1 , análogamente V_2 está en la región YY_2W_2 . Dado que la recta W_1Z es tangente al arco XZ en Z , y la recta W_2Y es tangente al arco XY en Y ; se tiene que las regiones Z_1ZW_1 , y YY_2W_2 intersectan al triángulo de Reuleáux XYZ en los puntos Z y Y respectivamente. Por lo tanto ni V_1 ni V_2 están en P , y entonces la pareja XV no cumple con la hipótesis, contradiciendo así la suposición de que P tiene más de tres elementos. Por lo tanto P tiene tres elementos. ■

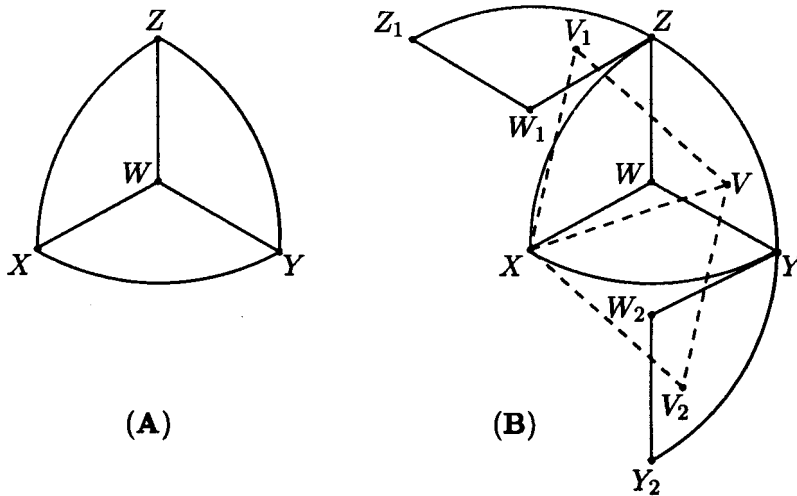


Figura 3.2:

Observación: El teorema sigue siendo válido si P es un conjunto compacto de E^2 .

Observación: Si T es un triángulo isósceles con ángulo desigual α ($\alpha \neq 60^\circ$) existe un conjunto P de cinco puntos con la propiedad de que por cada dos puntos de P hay otro, de forma que los tres son vértices de un triángulo semejante a T (Fig. 3.3).

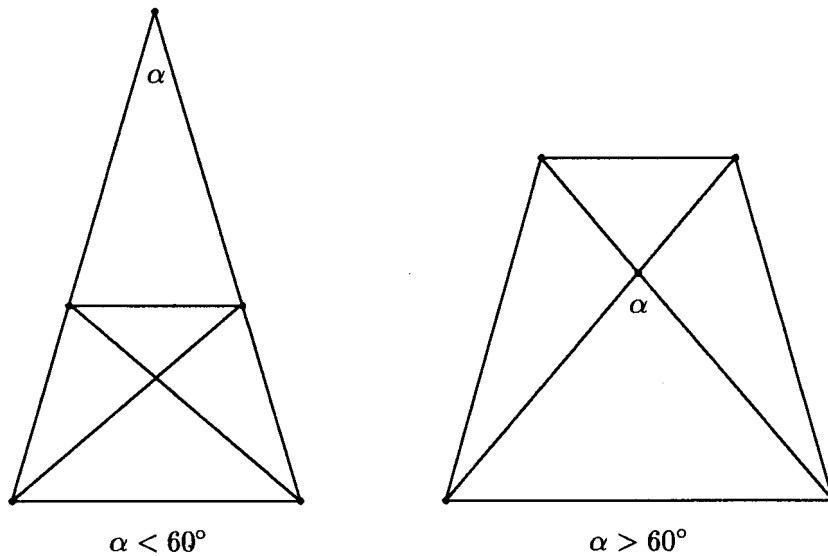


Figura 3.3:

Referencias

- [1] J. J. Sylvester, *Mathematical Question 11851*, Educational Times 59, (1893), 98.
- [2] P. Erdős, *Problem 4065*, American Mathematical Monthly 50, (1943). 65.
- [3] T. Gallai, *Solution to Problem 4065*, American Mathematical Monthly 51, (1944), 169–171.
- [4] R. Steinberg, *Three point collinearity*, American Mathematical Monthly 51, (1944), 169–171.
- [5] T. S. Motzkin, *The lines and planes connecting the points of a finite set*, Transactions of the American Mathematical Society 70, (1951), 451–464.
- [6] G.D. Chakerian. *Sylvester's problem on collinear points and a relative*, American Mathematical Monthly 77, (1970), 164–167.
- [7] J. A. Wiseman and P. R. Wilson, *A Sylvester theorem for conic sections*, Discrete and Computational Geometry 3, (1988), 295–305.

- [8] P. Borwein and W.O.J. Moser, *A survey of Sylvester's problem and its generalizations*, *Aequationes Mathematicae* 40, (1990), 111–135.
- [9] V. Klee and S. Wagon, *Old and New Unsolved problems in Plane Geometry and Number Theory*, Mathematical Association of America, *Dolciani Mathematical Expositions* 11, (1991), 29–35, 103–110.