

Acerca de Mapas

J. J. Rivaud

Sección de Metodología y

Teoría de la Ciencia

CINVESTAV

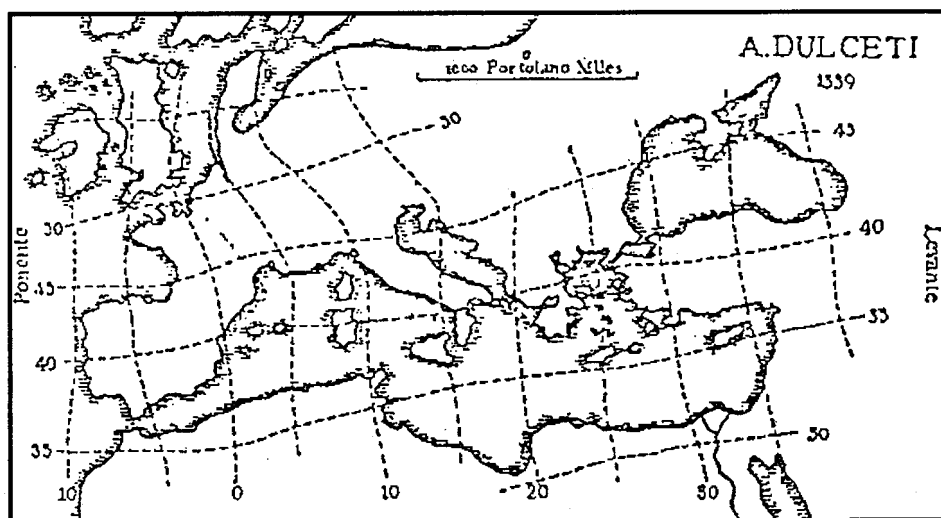
A Sam Feder en sus 60 años.

Introducción.

Los últimos años del siglo XV son testigos de los largos viajes a mar abierto que llevan a cabo las coronas Portuguesa y Española y con los que se inaugura la llamada Edad de la exploración. En buena parte estos viajes llevaban siglos de estarse preparando; el Mediterráneo fue en mucho la escuela y el campo de experimentación tanto de navegantes como de constructores de naves. Por su tamaño el Mediterráneo es lo suficientemente grande para que se presenten toda clase de situaciones problemáticas y por el otro lado lo suficientemente pequeño para que la navegación sea razonablemente segura y difícilmente uno puede perderse en él. Además ya los navegantes mediterráneos llevaban más de un siglo de salir del Mediterráneo y navegar en el Atlántico norte e iniciar la exploración de la costa atlántica del norte de África.

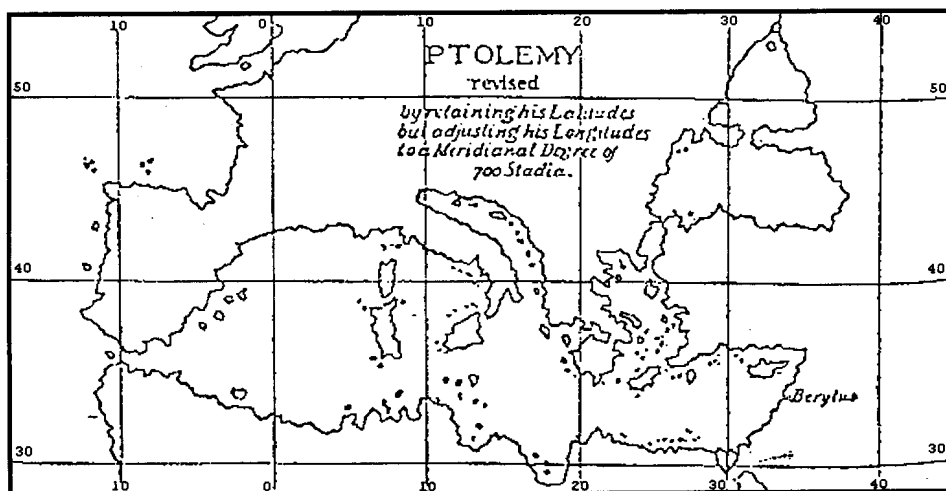
Para auxiliarse en sus travesías usaban instrumentos muy simples que les permitían aproximar la velocidad del navío, estimar el tiempo transcurrido, la declinación de la polar y conocer su latitud, pero sobre todo conocer la dirección del norte. Para ello, además de las estrellas de la bóveda celeste y del astrolabio, contaban con la piedra imantada o brújula que había sido introducida en la navegación mediterránea desde el siglo XII por los árabes. Estos elementos durante cuatro siglos hicieron que se navegase manteniendo el rumbo, o dicho de otra manera haciendo que la travesía cortase a todos los meridianos en el mismo ángulo; tan fuerte fue esta *influencia* que todavía hoy en día usamos la expresión *perdió el rumbo*.

Otro elemento indispensable para llevar a cabo estas empresas de navegación era contar con los elementos que nos permitiesen darnos cuenta de dónde estábamos situados nosotros y el punto al que nos queremos dirigir. Por ello también desde el siglo XII aproximadamente se empezaron a elaborar los primeros mapas, llamados portulanos. En ese momento los mapas contenían, grandes distorsiones, pese a que para situarse se usaba ya, a sugerencia de Tolomeo, la longitud y la latitud (a continuación aparece un portulano del mediterráneo en donde posteriormente se han introducido los paralelos y meridianos. También aparece un mapa elaborado más cuidadosamente en donde paralelos y meridianos vienen representados por rectas).



Desafortunadamente en los mapas del tipo de Tolomeo las trayectorias de rumbo constante no son de ninguna manera fáciles de reconocer y por ello surge el problema de construir mapas en los que abriendo la distancia entre los paralelos en forma adecuada a medida que nos acercamos hacia los polos consigamos que las trayectorias de rumbo constante también corten a las representaciones de los meridianos en el mapa con el mismo ángulo. Dicho de otra manera, que las trayectorias de rumbo constante vengán representadas en el mapa por rectas. El cartógrafo Flamenco Gerard Mercator (o Gerhard Kremer, 1512-1594), fue quien resolvió este problema, prácticamente un siglo antes del de-

sarrolló del cálculo diferencial e integral.



La solución de Mercator constituye la parte medular del presente trabajo. Las presentaciones que conocemos usan variable compleja o cálculo en varias variables; la nuestra solo requiere de cálculo elemental y por ello nos parece interesante darla a conocer.

No queremos cerrar este apartado sin dejar de llamar la atención sobre cómo la navegación fue motor de numerosos adelantos científicos y tecnológicos como son el ejemplo que tratamos, la construcción de relojes o el establecimiento de observatorios.

Por último queremos darle las gracias a la Mtra. Ana Irene Ramírez Galarza, del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, por algunas sugerencias en la redacción y elaborar uno de los dibujos que no nos salía.

1 Primeras consideraciones.

Los primeros mapas con los que nos familiarizamos son diagramas que nos indican cómo ir de un lugar a otro, señalándonos algunos elementos extra, fácilmente identificables, para que nos sea más sencillo el recorrido (Figura 1).

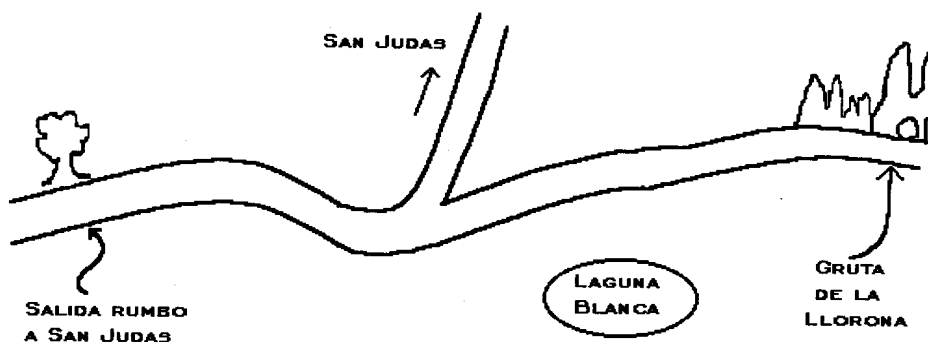


Figura 1:

Otros mapas que empezamos a usar muy pronto, son los que nos permiten ubicarnos en una ciudad o población de gran tamaño. En estos mapas, la ciudad o parte de ésta, es representada sobre una cuadrícula que, en general, está situada de sur a norte y de este a oeste. Sobre dicha cuadrícula marcamos los elementos más relevantes: calles, parques, mercados, edificios públicos, etc., e indicamos que un centímetro en la cuadrícula equivale a cierta longitud en la realidad (la escala a la que está construido el plano), para de esa manera tener noción de las distancias en el mapa (Figura 2).



Figura 2:

Hay ciudades que han sido diseñadas pensando en esta manera de ubicarse en ellas, y la mayoría de las calles corren de sur a norte o de este a oeste. Un ejemplo es la ciudad de Puebla, (Figura 3). Otro caso, la ciudad de Bogotá donde las sur a norte son avenidas y las de este a oeste carreras.

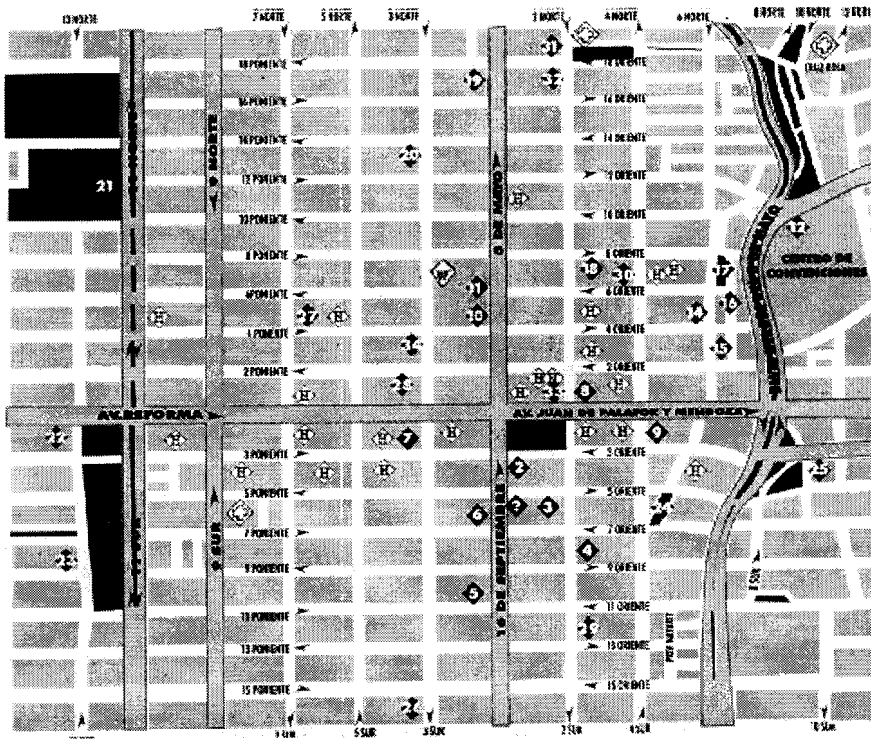


Figura 3:

2 Mapas del globo terráqueo elaborados a partir de la idea anterior.

Con esta misma idea —la de un reticulado formado por las líneas que van de sur a norte y por las que van de este a oeste—, se han elaborado mapas de todo (o casi todo) el globo terráqueo, que también han sido usados con éxito para ubicarnos sobre la Tierra, poder ir de un sitio a otro y algunos otros propósitos más, en especial, la Navegación. La dificultad que se presenta es que, a diferencia del caso del plano de una ciudad,

no tenemos una escala para las distancias, pues en el globo terráqueo, las líneas que corren de sur a norte, es decir, los meridianos, convergen a los polos y al acercarnos a ellos, la representación de los meridianos en la retícula necesariamente distorsiona las distancias. Además, en un mapa que cubra toda la Tierra debemos saber que al llegar a uno de los que están en el borde, para continuar, lo tenemos que hacer por el otro meridiano, que también está en el borde (figura 4 (a)). Lo anterior nos sugiere la idea de identificar o pegar ambos bordes, formando así un cilindro (figura 4 (b)). También hay que señalar que a cada polo no le corresponde un punto, sino un segmento de recta, el borde superior o inferior del mapa, cuando estos bordes existen.

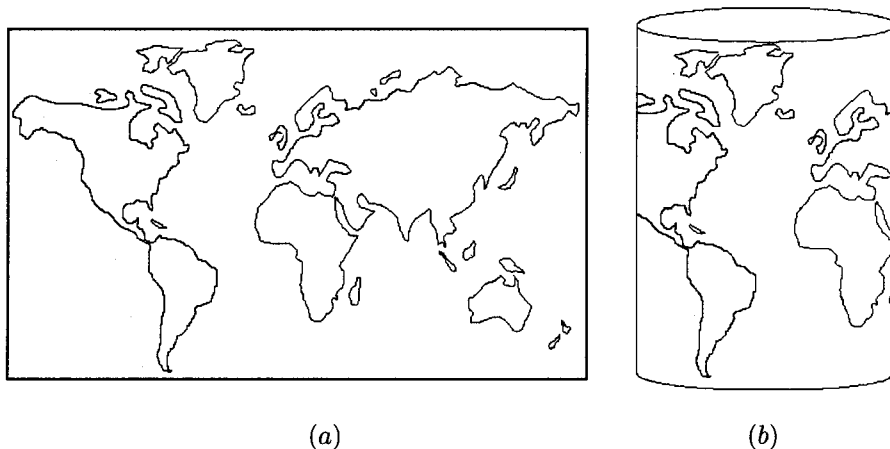


Figura 4:

A continuación precisamos lo dicho hasta ahora y en los incisos siguientes vemos cómo se construyen algunos mapas específicos, que buscan la correspondencia entre los puntos de la superficie cilíndrica o una faja rectangular y la superficie esférica.

Un punto P en la esfera terrestre queda determinado por su longitud y su latitud, es decir por dos ángulos que llamaremos θ y φ . (Figura 5)

Así θ , que varía entre -180° y 180° , nos dice en qué meridiano se encuentra el punto P . El paralelo en que está situado el punto, viene dado por φ , el cual varía entre -90° y 90° .

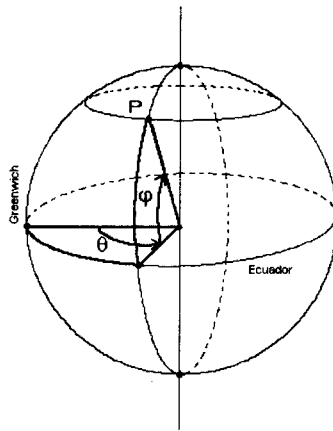


Figura 5:

Directamente, estas coordenadas nos dan un mapa con las características que anteriormente hemos señalado, es decir, que cada línea vertical represente un meridiano y cada línea horizontal un paralelo (Figura 6).

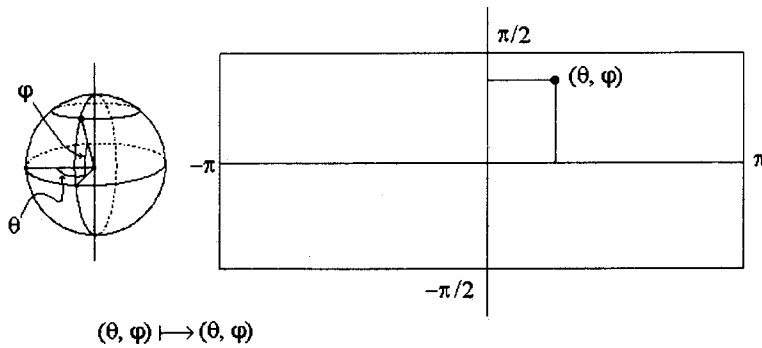


Figura 6:

Este mapa tiene su utilidad, pero ésta es mínima, pues no preserva ninguna propiedad interesante como rumbo, áreas o distancias.

Para que se preserve alguna propiedad específica y el mapa tenga

un tamaño adecuado tenemos que usar una idea un poco más sofisticada, que esencialmente consiste en deformar con mayor libertad el eje vertical y multiplicar la longitud por una constante k que depende del radio de la Tierra y de la escala que deseemos darle al mapa, es decir del tamaño.

Lo anterior, en términos matemáticos, se expresa como:

$$(\theta, \varphi) \mapsto (k\theta, f(\varphi))$$

que también tiene las propiedades, señaladas antes, acerca de meridianos y paralelos, con una interpretación geométrica similar a la anterior (véase Figura 7). Por comodidad, en lo que sigue, tomaremos k igual al radio de la tierra r .

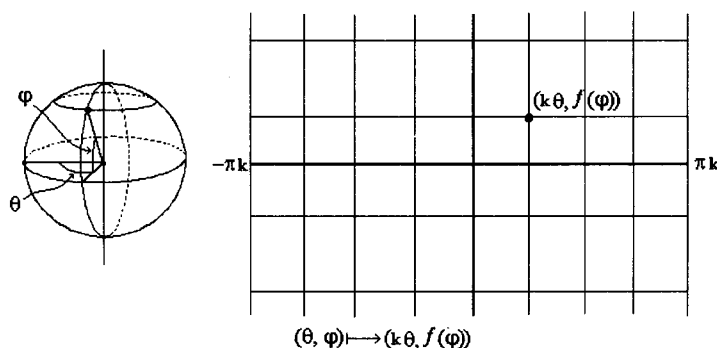


Figura 7:

Enunciemos con precisión los problemas que trataremos y veamos cómo se construyen mapas de este estilo que preserven alguna propiedad importante. Por ejemplo:

- Si queremos que las superficies en el globo terráqueo y en el mapa sean iguales ¿cuál es la función f que debemos tomar?
- Si queremos que los *rumbos*, o dicho de otra forma, los ángulos en el globo terráqueo y en el mapa, sean iguales ¿cuál es la función f que debemos tomar? (En el inciso 4 se insiste en la relevancia de estos mapas).

Para responder estas preguntas, primero veamos a qué corresponde un incremento infinitesimal $d\theta$, tomado en el punto (θ, φ) en la esfera y

en el punto correspondiente $(r\theta, f(\varphi))$ del mapa, (y lo mismo para un incremento $d\varphi$).

De la Figura 8, vemos que en la esfera el incremento correspondiente a $d\theta$ es:

$$\text{incremento correspondiente a } d\theta \text{ en la esfera} = r \cos \varphi d\theta$$

Asimismo, para $d\varphi$ tenemos:

$$\text{incremento correspondiente a } d\varphi \text{ en la esfera} = r d\varphi$$

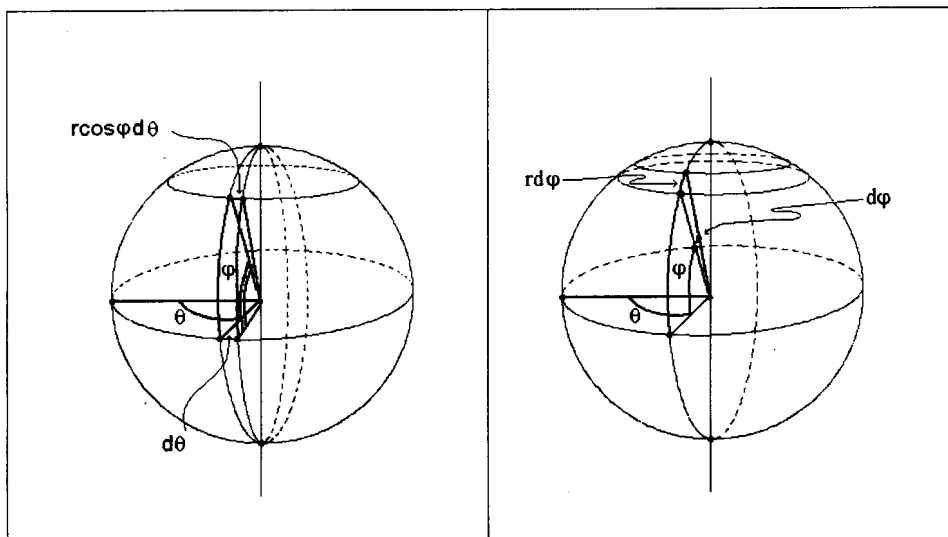


Figura 8:

Para el mapa (Figura 9), tenemos:

$$\text{incremento correspondiente a } d\theta \text{ en el mapa} = r d\theta$$

e

$$\text{incremento correspondiente a } d\varphi \text{ en el mapa} = f'(\varphi) d\varphi$$

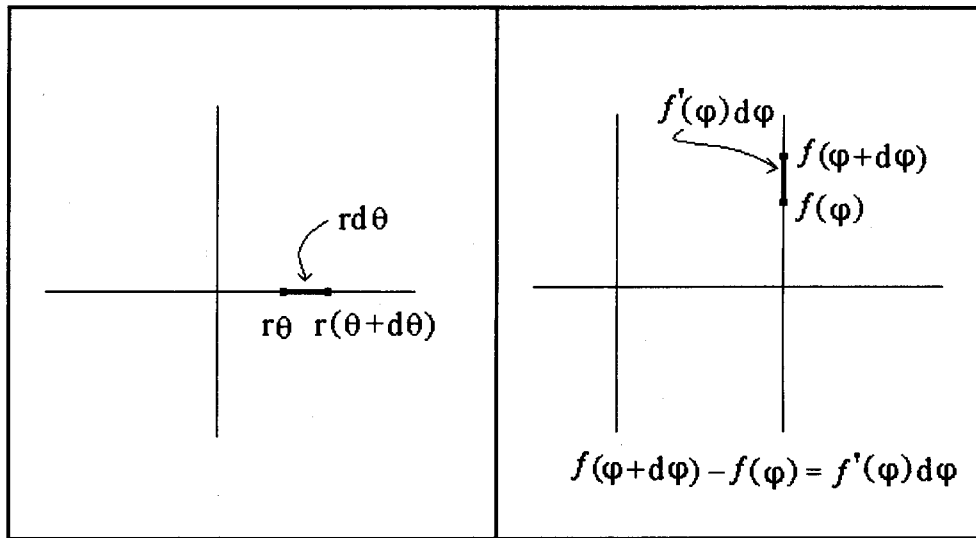


Figura 9:

3 Mapas que preservan el área.

Si queremos que el área de una figura en la esfera y el área de la figura correspondiente en el mapa sean iguales, es necesario que el rectángulo infinitesimal de lados $r \cos \varphi d\theta$ y $rd\varphi$ y su correspondiente, el de lados $rd\theta$ y $f'(\varphi)d\varphi$ tengan áreas infinitesimales iguales, para lo cual el producto de los lados de uno de dichos rectángulos debe ser igual al producto de los lados del otro, es decir,

$$r \cos \varphi d\theta \cdot rd\varphi = rd\theta \cdot f'(\varphi)d\varphi$$

que después de simplificar nos da:

$$f'(\varphi) = r \cos \varphi$$

e integrando, obtenemos

$$f(\varphi) = r \operatorname{sen} \varphi$$

que es la solución de nuestro problema.

Veamos su significado geométrico: para ello pensemos en un cilindro de altura $2r$ y radio r , que circunscribe a la esfera de radio r (Figura 10). Notemos que si a cada punto P en la esfera le hacemos corresponder el

punto Q del cilindro, de tal forma que la recta PQ determine un radio del cilindro, entonces esta asociación es precisamente

$$(\theta, \varphi) \mapsto (r\theta, r\text{sen } \varphi)$$

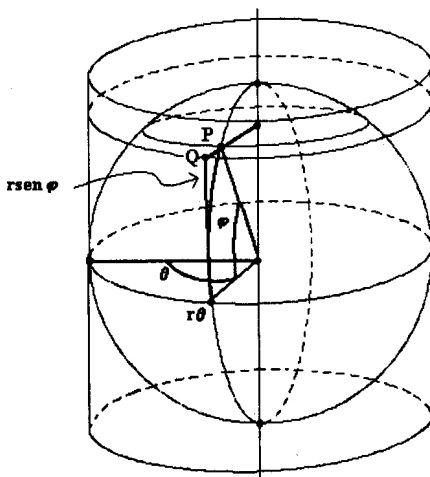


Figura 10:

Por cierto que esta proyección ya había sido estudiada por Arquímedes de Siracusa, en el siglo III A. de C., en su trabajo acerca del área de la esfera, en donde enunció este resultado para el caso particular de casquetes esféricos.

4 Mapas que preservan rumbos.

Desde el inicio de la navegación a mar abierto, con el auxilio de la brújula o los astros, los marinos pudieron conocer sin muchos esfuerzos el *rumbo*, es decir el ángulo en el que la trayectoria de la nave corta a los meridianos.

Debido a este hecho y a pesar de otros factores, como son las corrientes marinas y los vientos, las trayectorias de las travesías se diseñaron precisamente a base de *mantener el rumbo*, o sea cortar a los méridianos con el mismo ángulo. Como veremos más adelante estas trayectorias no son las que minimizan las distancias, pero si resultaban las más convenientes para la navegación con los elementos de los que se disponía.

Un mapa del tipo de los que nos hemos ocupado que tenga la propiedad de preservar rumbos (lo que es equivalente a preservar ángulos), hace que las trayectorias de rumbo constante se representen en el mapa por líneas que cortan a las verticales con el mismo ángulo, y por lo tanto ¡son líneas rectas!, hecho que facilita enormemente el diseño de las travesías (Figura 11)

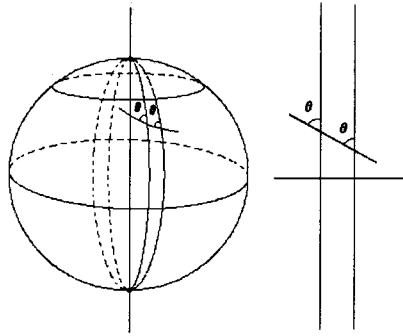


Figura 11:

Pasemos ahora a la solución del problema.

Primero notemos que infinitesimalmente una transformación manda rectas en rectas y cuadriláteros en cuadriláteros.

Una transformación que manda rectas en rectas y cuadriláteros en cuadriláteros, preserva rumbos si (y sólo si) manda *rectángulos en rectángulos semejantes*. Vease Figura 12.

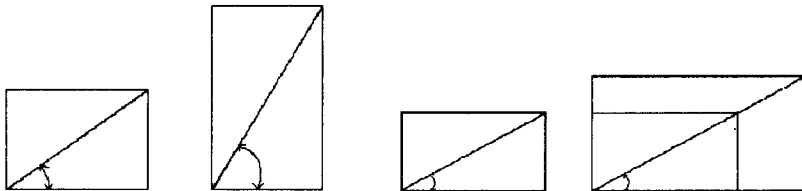


Figura 12:

Así pues, para que el mapa preserve rumbos es necesario que los rectángulos infinitesimales en la esfera y en el mapa sean semejantes, o lo que es lo mismo, que la razón entre el incremento producido por $d\theta$ en la esfera y en el mapa, sea igual a la razón del incremento producido por $d\varphi$ en la esfera y en el mapa, es decir que:

$$\frac{r \cos \varphi d\theta}{rd\theta} = \frac{rd\varphi}{f'(\varphi)d\varphi}$$

o sea

$$f'(\varphi) = \frac{r}{\cos \varphi},$$

que después de integrar nos da

$$f(\varphi) = r \ln \left| \tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

Ésta es la llamada proyección de Mercator que ha servido de base para la construcción de mapas de navegación desde el siglo XVI.

El lector no tendrá dificultad en verificar que:

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(\varphi) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(\varphi) = -\infty$$

lo que quiere decir que el mapa de la Tierra se encuentra en una franja infinita de ancho $2\pi r$.

Si retomamos la idea de formar un cilindro identificando las aristas de nuestro mapa, vemos que las rectas que no son verticales u horizontales, en el cilindro son hélices de paso constante, que se enrollan en él (Figura 13).

Cuando consideramos a las trayectorias en la esfera, de donde provienen, vemos que son espirales que se enredan en los polos dando una infinidad de vueltas (Figura 14).

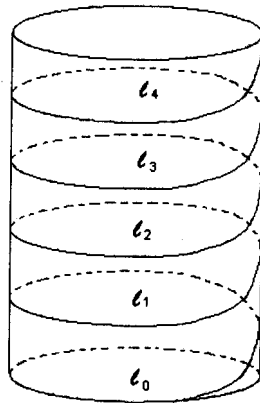


Figura 13:

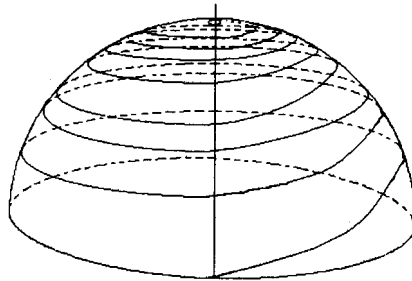


Figura 14:

5 Por qué no hay mapas que preserven distancias.

Una pregunta que, después de lo que hemos visto, sigue teniendo sentido es:

¿No hay un procedimiento que, con otros principios, nos permita construir un mapa plano, aunque sea de una pequeña porción de la Tierra, que preserve distancias?

La respuesta es negativa: No, no lo hay. Y, además, el argumento para convencernos de ello es bastante sencillo; a continuación lo ex-

ponemos.

Primero permítasenos hacer una observación:

En cualquier mapa que preserve las distancias, arcos de círculos máximos en la esfera deben estar representados por segmentos de rectas. Esto es debido a que las curvas de mínima longitud son arcos de círculos máximos en la esfera y segmentos de recta en el plano. Asimismo arcos de círculos máximos que se intersecan, deben de ser representados por segmentos que se intersecan.

Pasemos, ahora, al argumento. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la región de la que construiremos el mapa rodea al polo norte, designado en la Figura 15 por la letra P . Consideremos dos meridianos cuyos planos se intersecan perpendicularmente y sobre ellos tomemos puntos Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 que equidisten del polo P (Figura 15).

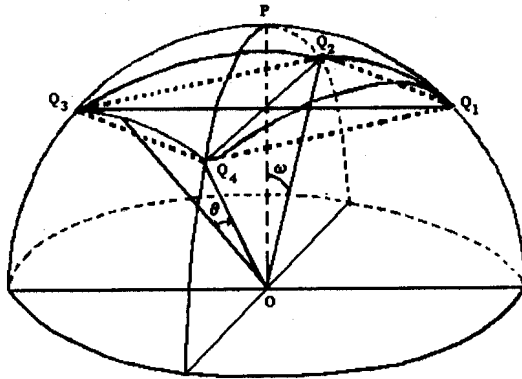


Figura 15:

De acuerdo a la figura, tenemos que los puntos de la esfera Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 determinan un cuadrado cuyos lados tienen longitud L dada por

$$L = 2r \operatorname{sen} \theta .$$

Y cuyas diagonales tienen longitud D , expresada por:

$$D = 2r \operatorname{sen} \omega .$$

Aplicando el teorema de Pitágoras y simplificando, tenemos:

$$2 \operatorname{sen}^2 \theta = \operatorname{sen}^2 \omega$$

que, después de sacar raíz cuadrada, toma la forma:

$$\sqrt{2}\text{sen } \theta = \text{sen } \omega \quad (1)$$

Analicemos, ahora, el cuadrilátero sobre la esfera que tiene esos mismos vértices y como lados y diagonales, los arcos que unen dichos vértices.

Si llamamos L' a la longitud de los lados y D' a la longitud de las diagonales, también de la Figura 16, vemos que :

$$L' = 2r\theta \quad \text{y} \quad D' = 2r\omega$$

(los ángulos θ y ω están medidos en radianes).

Si existiese un mapa plano, que preserve las distancias, para una región de la esfera que contenga a este cuadrilátero, tendríamos que la representación de éste en el mapa sería un cuadrado, pues sus cuatro lados tienen la misma longitud y sus dos diagonales también (Figura 16)

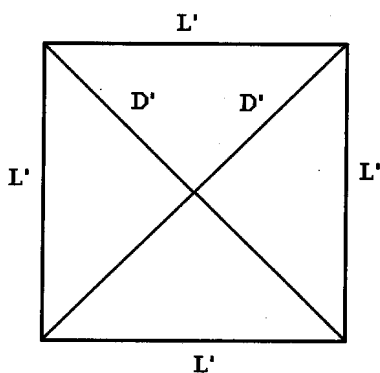


Figura 16:

Aplicando Pitágoras, simplificando y sacando raíz cuadrada, nos da:

$$\sqrt{2}\theta = \omega \quad (2)$$

Que al ser substituida en (1), toma la forma

$$\sqrt{2}\text{sen } \theta = \text{sen } \sqrt{2}\theta . \quad (3)$$

Igualdad que, como veremos continuación, no es posible para $0 < \theta < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, lo cual prueba la imposibilidad del mapa deseado. Para ello consideremos:

$$f(\theta) = \sqrt{2}\text{sen } \theta - \text{sen } \sqrt{2}\theta \quad (\text{Nótese que } f(0) = 0)$$

Si probamos que $f(\theta) > 0$ para $0 < \theta < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ habremos terminado con nuestra demostración, pero esto es inmediato del hecho de que $f(\theta) = 0$ y de que $f'(\theta) > 0$ para $0 < \theta < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, pues

$$f'(\theta) = \sqrt{2} [\cos \theta - \cos \sqrt{2}\theta]$$

y

$$\cos \theta - \cos \sqrt{2}\theta > 0 \quad \text{para } 0 < \theta < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

pues $\cos \theta$ es estrictamente decreciente para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

6 Apéndice. En la esfera las geodésicas o trayectorias de menor longitud son arcos de círculos máximos.

Un resultado conocido por todos es que, en la esfera, las geodésicas o trayectorias de menor longitud son arcos de círculos máximos. Hecho que usamos en el inciso anterior.

El propósito de este apéndice es dar una justificación de dicho resultado, pues, como sucede en muchas otras ocasiones, a pesar de su sencillez, ésta no forma parte de nuestra cultura geométrica.

Empecemos por precisar con más cuidado qué es lo que probaremos. En la esfera consideremos dos puntos (no antipodales) arbitrarios, y llamémosles P y Q . Los puntos P y Q , junto con el centro O de la esfera determinan un plano que corta a la esfera en un círculo del mismo radio que el de ésta, es decir, en un círculo máximo (Figura 17).

En dicho círculo los puntos P y Q determinan dos segmentos, de los cuales son los extremos. Estos dos segmentos no tienen la misma longitud, pues P y Q no son antipodales, y por lo tanto uno de ellos, al que llamaremos s , tiene menor longitud que el otro. Demostraremos que cualquier otra curva que una P y Q tiene longitud mayor que la del segmento s (más adelante precisaremos qué entendemos por tales

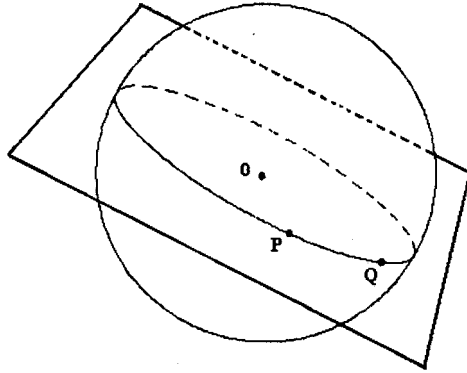


Figura 17:

trayectorias). Para facilitar nuestro argumento, fuera del segmento s tomemos dos puntos antipodales N y S y coloquemos la esfera de tal forma que correspondan al polo norte y al polo sur, respectivamente, (Figura 18).

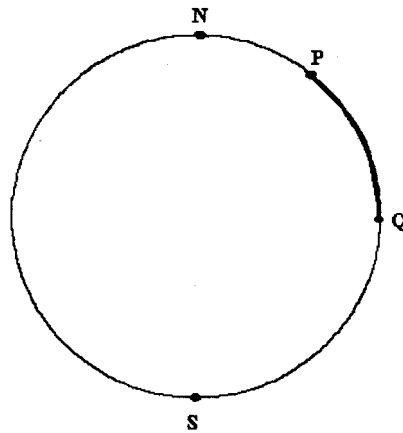


Figura 18:

Con la esfera en esta posición, el segmento s y los puntos P y Q quedan situados en un mismo meridiano, entre N y S , (Figura 19)

Las trayectorias en la esfera con las que nosotros trabajaremos son curvas con tangente en todos sus puntos, que varía continuamente,

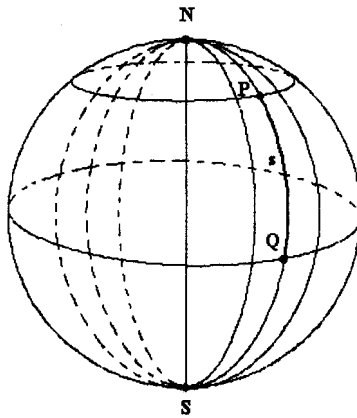


Figura 19:

orientadas de P a Q y que en su viaje cambian su dirección de norte a sur sólo un número finito de veces, (la Figura 20 ilustra, esta condición).

Bajo las condiciones anteriores, una trayectoria en la esfera que une P con Q (Figura 20), puede iniciarse dirigiéndose a puntos más al norte que P , pero eventualmente volverá al mismo paralelo (punto P'_0), continuando, por un trecho, su camino descendente en dirección al paralelo en el que se encuentra Q .

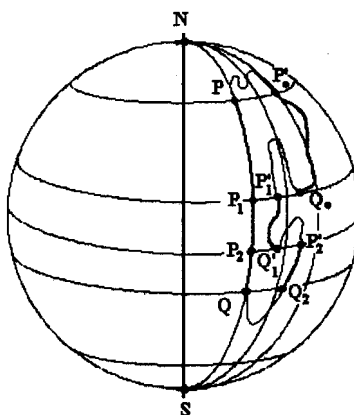


Figura 20:

Antes de llegar al nivel del punto Q , puede que la trayectoria inicie nuevamente a partir de un punto Q'_0 su camino ascendente para luego volver a atravesar el paralelo en el que se encuentra Q'_0 y que este proceso vuelva a repetirse varias veces más antes de llegar al paralelo sobre el que está Q .

Al final, como resultado, tendremos, sobre el arco s , una colección de puntos $P, P_1, P_2, \dots, P_n, Q$, que cada vez se encuentran más al sur, y una colección de arcos $(P'_0, Q_0), (P'_1, Q_1), \dots, (P'_n, Q_n)$ que tiene la característica de tener sus extremos sobre los mismos paralelos en los que se encuentran los puntos, $P, P_1; P_1, P_2$, etcétera.

Si probamos que el arco de meridiano (P_i, P_{i+1}) tiene longitud menor o igual al arco (P'_i, Q_i) tendremos prácticamente el resultado, pues la longitud del arco de meridiano s será también menor o igual que la suma de las longitudes de los subarcos $(P'_0, Q_0), (P'_1, Q_1)$ etcétera, que a su vez es menor o igual a la de la trayectoria completa. A continuación exponemos tal demostración.

Para ello veamos la Figura 21.

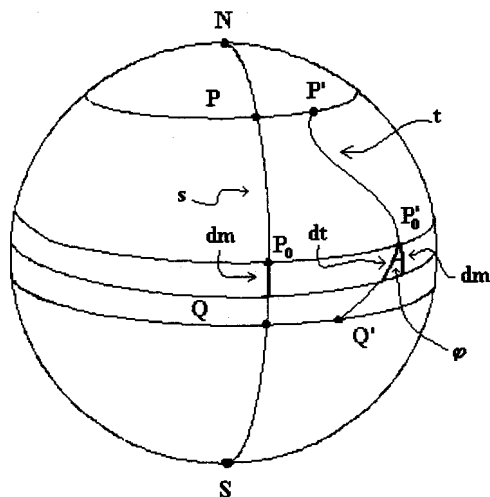


Figura 21:

En ella aparece un arco de meridiano s , con extremos P y Q y una trayectoria t que une los puntos P' y Q' . Los puntos P y P' se encuentran sobre el mismo paralelo, y, análogamente, Q y Q' . Además

la trayectoria t corta a los mismos paralelos que el arco s , y los corta en un solo punto.

Tomemos un punto P_0 en s , el punto correspondiente P'_0 en t y un diferencial dm de meridiano, que podemos trasladar al meridiano que pasa por P'_0 . Consideremos el diferencial sobre t , que corresponde a dm y denotémoslo por dt . Llamemos φ al ángulo que forma la trayectoria t con el meridiano que pasa por P'_0 . Como los meridianos son perpendiculares a los paralelos, estos elementos nos dan un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es dt y el cateto adyacente al ángulo φ es dm y por lo tanto.

$$\cos \varphi dt = dm$$

Como $1 \geq \cos \varphi \geq 0$, tenemos que:

$$dt \geq dm$$

Lo que al "sumar" (o integrar) nos da longitud $t \geq$ longitud s .

Observemos que si $\cos \varphi = 1$, para todo punto P_0 , la trayectoria t es también un arco de meridiano. Si no es éste el caso y $\cos \varphi < 1$ para algún punto P_0 , entonces, para puntos suficientemente cercanos a P_0 , se tiene que

$$\cos \varphi < 1$$

y por lo tanto:

$$dt > dm$$

Que al "sumar" nos da

$$\text{longitud } t > \text{longitud } s.$$

Terminando con ello nuestro argumento.

Hemos presentado el caso en que los puntos P y Q no son antipodales, pero el lector no debe tener mayor dificultad en extenderlo a este caso, pues el argumento es casi el mismo.

El lector más informado puede objetar que la clase de trayectorias no es suficientemente amplia, le queda a él generalizar el argumento.