

El Sistema solar bajo la mecánica celeste

Ernesto Pérez Chavela

Departamento de Matemática

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

Apartado Postal 55-534

09340 México, D.F.

`epc@xanum.uam.mx`

*A mi maestro y amigo
Donald G. Saari en su
60 aniversario.*

1 Introducción

Hablar del Sistema Solar y de todos los fenómenos que esto abarca, como son por ejemplo la estructura y dinámica de los anillos que circundan a los grandes planetas, la gran banda de asteroides entre Marte y Júpiter, los satélites naturales de los planetas, y tantas otras cosas, puede llevarnos muchísimo tiempo. Día con día se descubren detalles que abren campos de investigación novedosos para astrónomos, físicos y matemáticos. En estas notas pretendo dar un breve bosquejo, muy general y simple de nuestro Sistema Solar. Mi principal interés es ilustrar los tipos de problemas que se inscriben en una rama de las matemáticas llamada *Mecánica Celeste*, y cómo es que estos problemas pueden ser abordados. La *Mecánica Celeste* nace con Newton en su intento de conectar las leyes de la gravitación con la dinámica del sistema solar. Fue sin embargo con H. Poincaré con quien adquiere su forma actual y su reconocimiento como una rama muy importante de las matemáticas. Poincaré trabajó en uno de los sueños mas viejos

del ser humano: entender el movimiento de los cuerpos celestes, el sol, los planetas y lunas de nuestro sistema solar. Para esto, parte de una hipótesis muy simple: los cuerpos celestes pueden ser modelados como masas puntuales. *La Mecánica Celeste* entonces estudia en general “*el problema de los n -cuerpos*”, que consiste en describir el movimiento de n -masas puntuales moviéndose bajo la ley de atracción de Newton (que dice que la atracción entre dos partículas es directamente proporcional al producto de sus masas y está en razón inversa del cuadrado de la distancia que las separa). Si suponemos que la j -ésima partícula tiene masa positiva (es decir $m_j \in \mathbb{R}^+$) y al tiempo t se encuentra en la posición espacial x_j ($x_j \in \mathbb{R}^3$), si además consideramos a la constante de atracción universal $G = 1$, entonces las ecuaciones que describen el movimiento de las n -partículas está dado por

$$m_j \ddot{x}_j = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^3} (x_i - x_j) \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Como hemos mencionado anteriormente, un ejemplo particular importante de estos modelos lo constituye el Sistema Solar considerado como un problema de 10 cuerpos, formado por el Sol y los nueve planetas.

2 El Sistema Solar

El Sistema Solar está formado por muchos fragmentos rocosos que giran alrededor del Sol, destacando entre ellos nueve masas con características semejantes llamadas planetas. Éstos a su vez se dividen en planetas interiores, Mercurio, Venus, Tierra y Marte; y planetas exteriores, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno y Plutón. Los planetas interiores están muy cerca del Sol comparados con los planetas exteriores. Entre Marte y Júpiter hay un espacio muy grande donde se localizan aproximadamente unos 200,000 objetos de tamaño diverso conocidos como asteroides.

Mercurio es el planeta más cercano al Sol, y el más pequeño. Es muy difícil verlo desde la tierra por su proximidad al Sol. Se mueve en una órbita aproximadamente elíptica cuya excentricidad es muy grande, sólo comparable con la de Plutón que es aún mayor. Para modelar el movimiento de la órbita de Mercurio se ha recurrido al estudio de otros potenciales diferentes del Newtoniano, que obedecen fuerzas diferentes a las gravitacionales. Su movimiento también ha sido estudiado desde una perspectiva relativista.

Venus es el planeta que se encuentra más cerca de la Tierra y el más parecido a ella. Es fácil identificarlo en el cielo por ser el cuerpo celeste nocturno más brillante y por verse después del ocaso y antes del amanecer. Por su gran brillantez y esplendor, fue conocido por los griegos y romanos como la representación de la diosa de la belleza y el amor, y para los antiguos pobladores del Anáhuac como Quetzalcoatl. El movimiento de rotación de Venus es diferente al del resto de los planetas de nuestro Sistema Solar. En Venus el Sol sale por el oeste y se oculta por el este, contrario a lo que ocurre en la Tierra y los otros planetas del Sistema Solar; una de las teorías más aceptadas para explicar este fenómeno establece que este planeta chocó con un cuerpo celeste de gran tamaño en algún momento de su existencia, y que este choque cambió su movimiento de rotación.

A partir de la Tierra, todos los otros planetas tienen satélites naturales o lunas. Hasta el momento se ha descubierto que Marte tiene 2, Júpiter 16, Saturno 17, Urano 14, Neptuno 2 y Plutón 1.

Júpiter, el primero de los planetas exteriores, es el planeta más grande del Sistema Solar, y por ello pese a su lejanía, podemos observarlo a simple vista desde la Tierra. Este planeta al igual que Saturno y Urano tiene varios anillos que lo circundan. Saturno se localiza a una distancia que es casi el doble de la distancia que separa al Sol de Júpiter. A dos veces la distancia que separa a Saturno del Sol se encuentra Urano. Esto significa que con el descubrimiento de cada uno de estos dos planetas, nuestro Sistema Solar doblaba su tamaño.

Saturno, observado desde los telescopios, es un objeto celeste de increíble belleza; parecería ser la obra maestra de un gran artista. Este planeta tiene una luna llamada Titán, la cual es el satélite más grande del Sistema Solar, con una atmósfera similar a la terrestre. Este hecho intriga mucho a los científicos por la posibilidad de que exista algún tipo de vida en Saturno. El tamaño de Titán es aproximadamente 20% mayor que el de Mercurio.

Como mencionamos anteriormente, Plutón es el planeta del Sistema Solar cuya órbita elíptica tiene mayor excentricidad, lo que hace que su órbita se entrelace con la órbita de Neptuno, y cuando esto ocurre, el planeta más alejado del Sol es Neptuno y no Plutón. En estos momentos estamos viviendo esta situación: desde 1979 y hasta 1999 el planeta más alejado del Sol es Neptuno.

3 Potenciales cuasihomogéneos

El problema de los dos cuerpos o problema de Kepler establece que la órbita de un objeto celeste alrededor del Sol debe ser una elipse, un círculo, una parábola o una hipérbola dependiendo de las condiciones iniciales. Sin embargo al tomar 3 o más partículas las órbitas ya no son tan fáciles de describir, de hecho es bien conocido que si estudiamos el movimiento de Mercurio dentro del modelo de Kepler, la observación que podemos hacer de la órbita del planeta empieza a diferir rápidamente de la órbita teórica que podemos calcular explícitamente. Este fenómeno era conocido por el mismo Newton quien en su intento de explicar el movimiento de la luna respecto a la Tierra, publicó en sus Principia, Libro I, Artículo IX, Proposición XLIV, Teorema XIV, Corolario 2; que si estudiamos el potencial

$$W = \frac{1}{r} + \frac{B}{r^2},$$

en un sistema coordenado, con una partícula fija en el origen, la otra partícula se mueve sobre una elipse y esta elipse rota en su plano de movimiento. A esta elipse, con su movimiento de rotación Newton la llamo elipse precesional. En 1930 el físico búlgaro G. Manev propuso estudiar el anterior potencial para poder entender el avance del perihelio de Mercurio. Él estableció que con $B \approx \frac{1}{c^2}$, donde c es la velocidad de la luz, con este potencial podemos dar una buena justificación teórica del movimiento del perihelio de Mercurio.

En [5] estudiamos el potencial de Manev con B una constante positiva arbitraria. Usando técnicas geométricas y topológicas es posible sustituir la singularidad debida a la colisión entre las partículas por una subvariedad de codimensión uno en el espacio fase, que le llamamos la variedad de colisión total y la denotamos por Λ . Esta subvariedad es invariante por el flujo que determinan las ecuaciones de movimiento generadas por el potencial de Manev. Es en esta forma como nosotros hemos estudiado las órbitas que van a colisión y aquellas que pasan muy próximas a colisión, constituyendo nuestro principal resultado el poder demostrar que el conjunto de condiciones iniciales que dan origen a órbitas de colisión es de medida de Lebesgue positiva: es decir, a diferencia del problema clásico de Kepler, en el problema de Manev una gran cantidad de órbitas van a colisión; y lo que es más sorprendente todavía es que la mayoría de las órbitas que terminan en colisión lo hacen con una partícula espiraleando alrededor de la otra. Como consecuencia de estos resultados es posible dar una descripción en términos analíticos de las elipses precesionales postuladas por Newton en sus Principia.

Recordemos que el problema clásico de Kepler está modelado por un potencial de la forma

$$\mathcal{U} = \frac{m_1 m_2}{r},$$

donde r representa la distancia entre las dos partículas, observemos que \mathcal{U} es una función homogénea con grado de homogeneidad -1. Es natural preguntarse entonces qué pasa cuando estudiamos potenciales homogéneos de grado arbitrario, es decir de la forma

$$\mathcal{U} = \frac{m_1 m_2}{r^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

y más aún, qué pasa cuando estudiamos la dinámica de partículas moviéndose bajo la influencia de un potencial cuasihomogéneo de la forma

$$W = \frac{m_1 m_2}{r^a} + K \frac{m_1 m_2}{r^b}, \quad 0 \leq a < b, \quad K > 0.$$

En 1997 nos propusimos estudiar los diferentes tipos de movimiento que pueden producirse en el problema colineal cuasihomogéneo de los 3 cuerpos; es decir, un problema de tres partículas puntuales en la línea moviéndose bajo la influencia de un potencial cuasihomogéneo

$$W = \mathcal{U} + \mathcal{V},$$

donde

$$\mathcal{U} = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^a}, \quad \mathcal{V} = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^b}, \quad 0 \leq a < b,$$

y r_{ij} representa la distancia entre la partícula i y la partícula j . Observemos que cuando tenemos colisión triple o estamos muy cerca de ella, el potencial dominante es \mathcal{V} y para los escapes de las partículas a infinito el potencial dominante es \mathcal{U} . Como es de esperarse, una de las grandes dificultades en el estudio de este problema lo constituyen las singularidades que se presentan en el potencial, que corresponden a las colisiones de dos o tres partículas al mismo tiempo. Para $b < 2$ hemos probado que las predicciones de este modelo no difieren demasiado de aquellas del problema colineal clásico Newtoniano de los 3 cuerpos, en el sentido de que el conjunto de condiciones iniciales que van a colisión es muy flaco, es decir tiene medida de Lebesgue cero. Esta propiedad se pierde cuando $b > 2$, ya que en este caso el conjunto de condiciones iniciales que van a colisión triple es de medida positiva. De hecho es posible mostrar la existencia de un subconjunto abierto no acotado de

condiciones iniciales que van a colisión triple, con lo cual este conjunto tiene medida de Lebesgue infinita ([14]). En este enorme conjunto de condiciones iniciales podemos clasificar familias completas de órbitas que van a colisión triple en las que por ejemplo las partículas 1 y 2 chocan un número infinito de veces, pero jamás chocan con la partícula 3. A pesar de que la distancia entre las partículas en los extremos sea cada vez más pequeña (recordemos que las partículas están sobre una línea), la colisión triple se produce siguiendo la dinámica descrita cuando hacemos tender el tiempo t a infinito. Lo más sorprendente de este hecho es que dada la condición inicial tenemos total control sobre este tipo de movimientos, es decir, dependiendo de la posición inicial de la partícula intermedia respecto a las otras dos, podemos decir si el número infinito de colisiones tendrá lugar con la partícula de la extrema izquierda o la de la extrema derecha.

El caso especial $b = 2$, que incluye al problema de Manev para $a = 1$ es el más difícil de todos. Nuestra conjetura es que aquí también, el conjunto de condiciones iniciales que van a colisión triple tiene medida de Lebesgue positiva, aunque hasta ahora no hemos tenido éxito en la demostración de este hecho. El gran obstáculo es que para $b = 2$ las singularidades debidas a colisión binaria son de una naturaleza muy diferente que las que se presentan en los casos $b \neq 2$ (para más detalles consultar [14]).

4 Configuraciones Centrales

Dentro del Sistema Solar y en general en el problema de los n -cuerpos estamos interesados en encontrar soluciones periódicas, a partir de las cuales podamos obtener más información sobre dinámicas próximas a las periódicas usando teoría de perturbaciones o las técnicas del cálculo de variaciones. En 1767 Leonard Euler obtuvo una clase de soluciones periódicas para el problema de los 3 cuerpos.

Si tres partículas de masas arbitrarias son colocadas sobre una línea de tal forma que

$$\frac{AB}{BC} = g(m_1, m_2, m_3)$$

donde g nos proporciona una fórmula complicada que depende de las masas (ver figura 1), y donde ciertas velocidades iniciales son asignadas en forma adecuada, entonces las partículas se mueven periódicamente sobre elipses manteniendo en todo momento una configuración colineal. Además la razón de distancias $\frac{AB}{BC}$ medidas sobre la línea que va rotando

no cambia. Si nos detenemos a pensar un momento, éste es un fenómeno bastante curioso, ya que en general cuando a un problema de 2 cuerpos le añadimos un tercer cuerpo destruimos las órbitas elípticas y aún más, podemos encontrar caos.

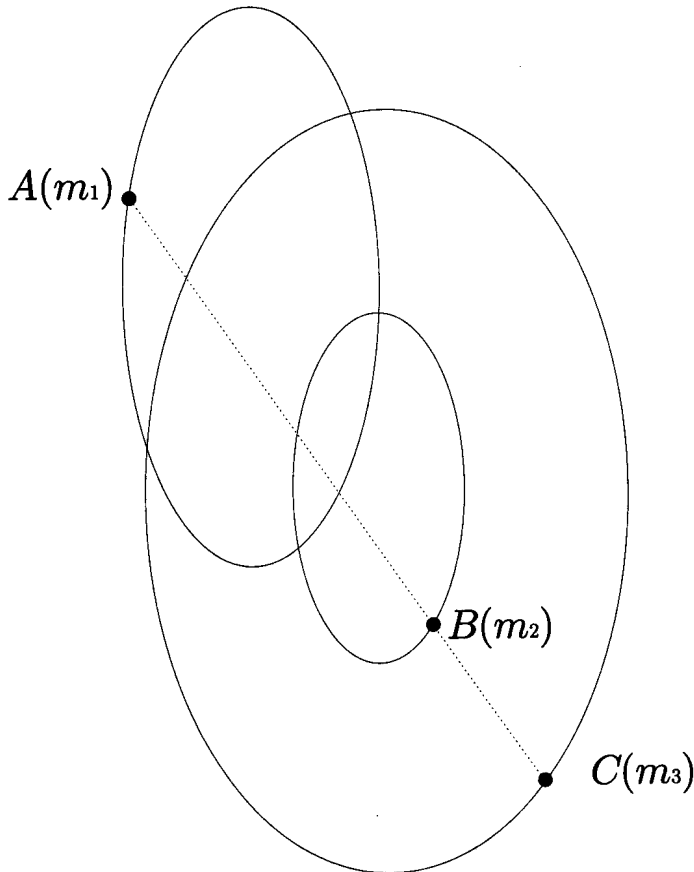


Figura 1. Las configuraciones de Euler

En 1772 Lagrange redescubrió las órbitas Eulerianas y encontró una segunda clase importante: si tres partículas son colocadas en los vértices de un triángulo equilátero y si tomamos velocidades iniciales adecuadas, entonces las masas se moverán en elipses como en la figura 2, preservando siempre su configuración de triángulo equilátero. Obviamente el triángulo cambiará su tamaño y orientación, pero siempre mantendrá su forma de triángulo equilátero.

Hay tres tipos de soluciones colineales correspondientes a las diferentes formas de ordenar 3 puntos en la recta y dos de tipo triangular correspondientes a las dos diferentes orientaciones del triángulo. En

ambos casos si las velocidades iniciales son cero, entonces las partículas se moverán hacia su centro de masa y tendremos una colisión triple en tiempo finito. Este es un caso límite en el que las órbitas elípticas degeneran a segmentos de línea.

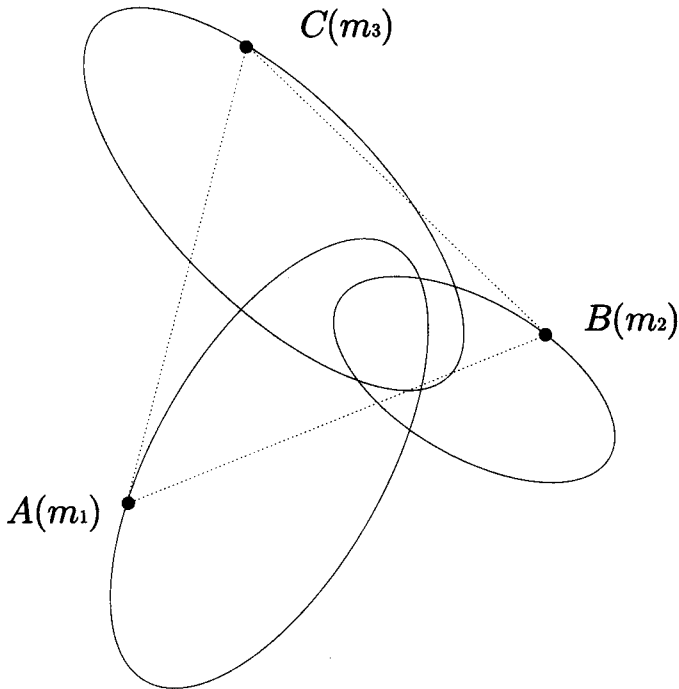


Figura 2. Las configuraciones de Lagrange

A las configuraciones originales que dan origen a estos movimientos les llamamos configuraciones centrales. Éstas quedan determinadas por la siguiente ecuación algebraica

$$\nabla \mathcal{U}(r_0) = \lambda r_0.$$

El vector r_0 es una configuración central si es paralelo al vector aceleración \ddot{r}_0 , o bien si r_0 es un punto crítico del potencial Newtoniano

$$\mathcal{U} = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Ya que el potencial \mathcal{U} es invariante bajo rotaciones cada configuración central da origen a una órbita periódica, y estas órbitas periódicas son las únicas soluciones del problema de los n -cuerpos conocidas explícitamente. En un sistema coordenado rotatorio estas soluciones

especiales se transforman en puntos fijos que son conocidos como equilibrios relativos, y como tales podemos estudiar su estabilidad.

Consideremos ahora un problema de 2-cuerpos (por ejemplo pensemos en el movimiento de la Tierra en órbita circular o elíptica alrededor del Sol), y una partícula de masa infinitesimal m moviéndose en el campo gravitacional de los cuerpos mayores, que llamaremos partículas primarias. La partícula de masa despreciable no influye en el movimiento de las primarias pero su movimiento está determinado por ellas. En este caso a las 5 posiciones de equilibrio relativo que el cuerpo pequeño puede ocupar en el plano que describe la órbita elíptica les llamamos puntos de libración y los denotamos por L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 (Ver figura 3).

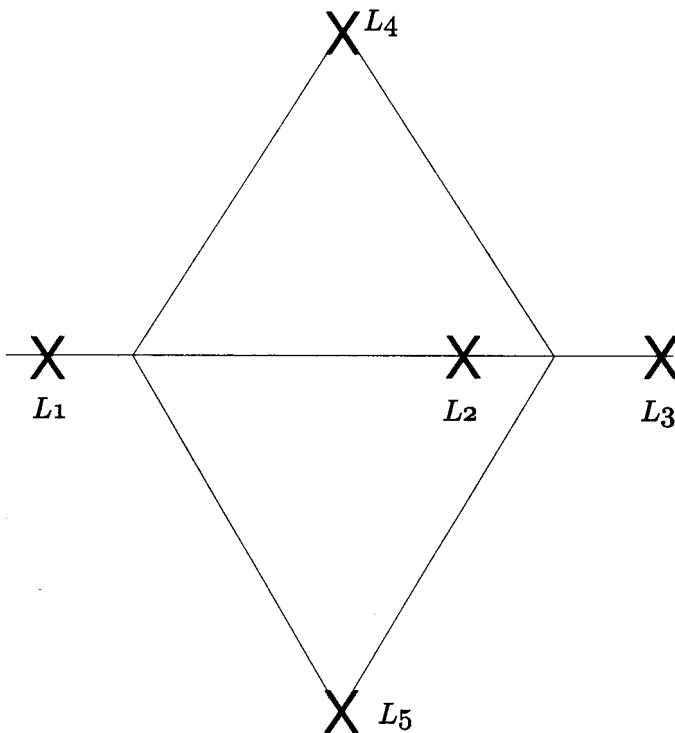


Figura 3. Los puntos de libración

Hoy en día sabemos bajo qué condiciones los puntos de libración L_4 y L_5 son estables, las cuales dependen por supuesto de los valores relativos de las masas grandes. Un ejemplo muy conocido en astronomía nos lo proporcionan los asteroides Troyanos, un cúmulo de asteroides que se mueven aproximadamente como Júpiter alrededor del Sol y que

forman en todo momento una configuración del triángulo equilátero con Júpiter y el Sol. En el sistema Tierra-Luna sobre los puntos L_4 y L_5 los astrónomos han encontrado cúmulos de polvo cósmico, lo que sugiere que la estabilidad de estos puntos permitiría identificar zonas donde colocar futuras bases espaciales o quizás colonias cósmicas.

Para $n = 3$ sabemos que existen exactamente 5 configuraciones centrales para cualquier conjunto dado de masas. Las 3 soluciones colineales de Euler y las dos soluciones de triángulo equilátero de Lagrange. En el problema colineal de los n -cuerpos hay exactamente $\frac{n!}{2}$ configuraciones centrales. Sin embargo muy poco es conocido sobre las configuraciones centrales para $n \geq 4$; de hecho no sabemos si el número de éstas es finito o no, ni tampoco si este conjunto está formado por puntos aislados o constituyen un continuo en el espacio fase. Para el problema de los n -cuerpos, toda colisión simultánea de k -partículas tiene lugar tendiendo a una configuración central formada por las k -partículas (para $n = 3$ este resultado fue probado por Sundman en 1912). Desafortunadamente ya que el conjunto de configuraciones centrales puede ser un continuo, no sabemos si la solución tiende a una configuración central específica u oscila entre varias de ellas.

En 1983 D. Saari ([17]) demostró que lo mismo ocurre para una clase muy grande de soluciones del problema de los n -cuerpos, donde las partículas se separan formando una configuración central. Este resultado ha sido de gran utilidad en cosmología.

De todo lo anterior llegamos a una pregunta natural planteada primeramente por Wintner en 1941. Para un conjunto dado de masas positivas ¿es el número de configuraciones centrales finito? Según S. Smale esta pregunta abierta será uno de los problemas centrales en la matemática del próximo siglo ([18]).

En 1993 conjuntamente con D. Saari y Z. Yan, empezamos a estudiar lo que hemos bautizado como "*problemas cargados*" es decir, problemas donde tomamos partículas puntuales dotadas al mismo tiempo de masa positiva m_i y una carga electrostática q_i de cualquier signo. Las partículas se mueven bajo la influencia de un potencial de la forma

$$U = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j - q_i q_j}{r_{ij}} = \sum_{i < j} \frac{\lambda_{ij}}{r_{ij}}$$

Ya que U puede tener cualquier signo tenemos una posibilidad mayor de encontrar puntos críticos del potencial. Para el problema general cargado de 3 cuerpos, hemos podido hallar las condiciones necesarias y suficientes para poder tener configuraciones centrales no colineales

([12]). El hecho sorprendente es que estas configuraciones centrales no necesariamente forman un triángulo equilátero, sino que ahora éste puede tener cualquier forma. Para el caso de las configuraciones centrales colineales demostramos que bajo ciertas relaciones entre los parámetros es posible tener 0, 1, 2, 3 ó 5 configuraciones centrales colineales.

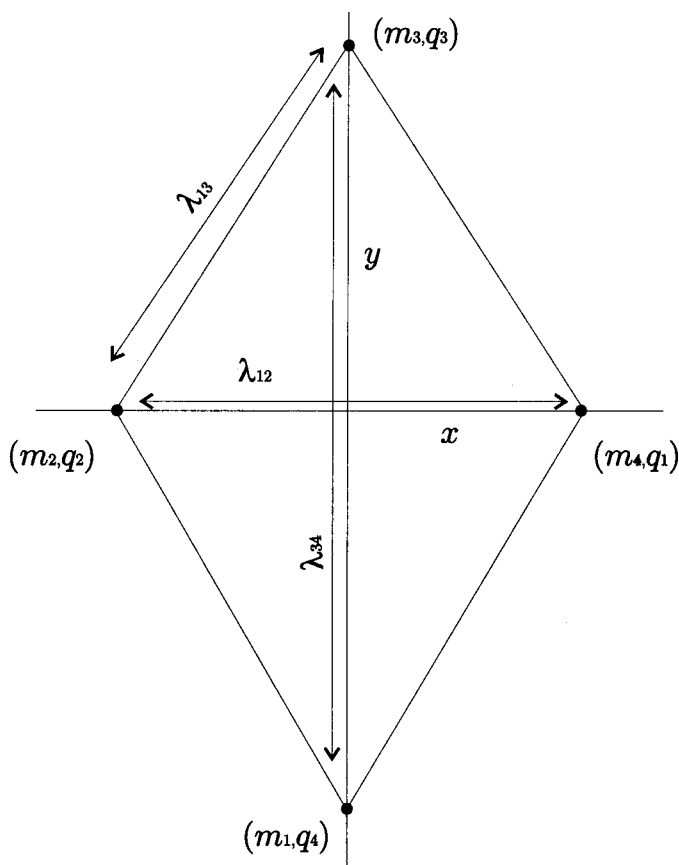


Figura 4. El problema romboidal cargado

En 1999 conjuntamente con Felipe Alfaro ([1]) demostramos que podemos obtener 0, 1 ó 2 configuraciones centrales en el problema romboidal cargado, es decir donde las partículas puntuales dotadas de masas y cargas forman todo el tiempo una configuración romboidal (Ver figura 4). Para valores muy particulares de los parámetros es posible tener un continuo de configuraciones centrales en el problema romboidal cargado; este sorprendente resultado no responde a la pregunta original de Wintner sobre la finitud de las configuraciones centrales, puesto que nosotros dotamos a las partículas de masas y cargas, pero sí establece

que la conjetura no es cierta si tomamos potenciales diferentes del clásico Newtoniano.

5 Dinámica simbólica y caos

En términos muy burdos decimos que un sistema es caótico si es muy sensible respecto a las condiciones iniciales, es decir si dadas dos condiciones iniciales muy próximas, sus órbitas respectivas tienden a alejarse en forma exponencial después de un tiempo considerablemente grande. La primera persona que se dio cuenta de lo complicadas e intrincadas que podían ser las órbitas que describen al Sistema Solar fue H. Poincaré, pero fue hasta la aparición de las supercomputadoras que pudieron hacerse simulaciones de la dinámica de nuestro sistema planetario para tiempos relativamente grandes, (200 millones de años), y con esto tener evidencia numérica de que el Sistema Solar es caótico ([10]).

Demostrar en forma analítica que un sistema es caótico es una tarea muy complicada, ya que entre otras cosas deberíamos ser capaces de probar la existencia de al menos una órbita densa y que el conjunto de órbitas periódicas forman un conjunto denso en el espacio fase; es decir la existencia de una órbita que visite cada uno de los rincones del espacio fase, y que tan cerca como queramos de cualquier órbita exista al menos una órbita periódica. Una de las técnicas más socorridas para probar que un sistema es caótico es debida a S. Smale a quien debemos un maravilloso objeto geométrico que él mismo bautizó como "*herradura*". La idea central es que si la variedad estable asociada a un punto de equilibrio interseca transversalmente a la variedad inestable del mismo punto de equilibrio (intersección homoclínica), o de algún otro punto (intersección heteroclínica), entonces en una vecindad de la intersección V podemos construir una herradura de Smale, que da lugar a un conjunto de Cantor, que denotamos I , contenido en la vecindad V , de tal forma que el flujo sobre I es relativamente fácil de describir y nos proporciona entre otras cosas la existencia de la órbita densa que mencionábamos anteriormente (en [11], puede encontrarse una bella demostración de estos hechos).

¿Cuál es la conexión entre las técnicas introducidas por Smale y la mecánica celeste?. Hagamos un poco de historia, en 1929, J. Chazy predijo la existencia de movimientos oscilatorios en el problema de los 3-cuerpos, es decir de órbitas cuya dinámica es impredecible para intervalos de tiempo suficientemente grandes; en 1950 el matemático ruso K.A. Sitnikov, fue el primero en dar una respuesta afirmativa a la pre-

gunta de Chazy en un caso particular del problema de los 3-cuerpos que a partir de entonces se conoce como el problema de Sitnikov. Este trabajo es sumamente técnico y por lo mismo prácticamente imposible de leer. Afortunadamente J.K. Moser en 1973 ([11]) retomó este modelo y fue capaz de expresar las ideas originales en un lenguaje más moderno y amable.

El modelo de Sitnikov consiste en dos partículas de igual masa que llamaremos primarias, y que se mueven en órbitas elípticas sobre un plano fijo. Moviéndose sobre la línea ortogonal al plano a través del centro de masa de las primarias se coloca una partícula de masa infinitesimal que no influye en el movimiento de las primarias, pero cuya dinámica está regida por las atracciones gravitacionales que ellas ejercen. Tomando la excentricidad de las elipses como un parámetro J. Moser demostró la existencia de un punto homoclínico transversal y a partir de aquí pudo construir la herradura de Smale y probar la existencia de movimientos oscilatorios; y la presencia de caos en este modelo. La técnica usada por Moser para este fin viene del cálculo de variaciones, que como es bien sabido involucra una gran cantidad de cálculos.

Nuestra aportación en esta línea de investigación ([9]) fue utilizar el método de Melnikov para probar la existencia del punto homoclínico transversal. Este método es mucho más geométrico y elegante, viene de la teoría de perturbaciones y fue introducido por primera vez por Melnikov en 1963. La primera idea en esta dirección fue dada por Dankowicz y Holmes en 1996 ([3]), quienes utilizaron funciones elípticas además de argumentos numéricos. Nuestra demostración es esencialmente geométrica, prescindimos de las funciones elípticas que son muy difíciles de trabajar y adicionalmente pudimos demostrar la existencia de una familia muy grande de órbitas periódicas obtenidas a partir de las órbitas periódicas originales del problema no perturbado ($\epsilon = 0$).

6 Los anillos de Saturno

Galileo Galilei fue la primera persona en observar los anillos de Saturno en 1610, utilizando para este fin un telescopio de su invención de tan sólo 20 aumentos. Las imágenes que Galileo percibía eran muy pobres, algo así como si el planeta tuviera un par de apéndices. Por esta razón, él pensó que se trataba de dos lunas cercanas al planeta. Fue Christian Huygens en 1665 quien afirmó que aquellos extraños apéndices correspondían a una formación de anillo alrededor del plane-

ta. En 1675, Jean D. Casini encontró una banda oscura que separaba el disco en dos anillos concéntricos, hoy en día esta banda es conocida como la división de Casini. El estudio moderno de los anillos de Saturno comenzó con los trabajos del físico James Clerk Maxwell quien en 1865 ganó el premio Adams de la Universidad de Cambridge por su demostración matemática de que los anillos consistían en numerosas partículas heladas cuyo diámetro oscila entre centímetros y decímetros moviéndose en órbitas independientes. La idea básica de su demostración fue suponer que dado que los anillos de Saturno han permanecido en la misma posición por muchos años, las soluciones de las ecuaciones que describen su movimiento debían ser estables. A partir de esto, Maxwell descubrió que si los anillos fueran sólidos o fluidos, la más ligera perturbación destruiría esta configuración.

El 25 de agosto de 1980 la nave espacial Voyager II pasó a escasos 100,000 kilómetros de Saturno, mandando unas fotos extraordinarias de los anillos de este planeta. Los datos recopilados fueron tan sorprendentes y maravillosos que aún hoy en día siguen causando admiración a todos los científicos que los analizan.

El cuerpo principal del sistema de anillos incluye un anillo muy brillante llamado anillo A, un anillo opaco llamado anillo B, ambos separados por la división de Casini, una región transparente de unos 5 000 Km. de ancho, que contrariamente a lo que se creyó por mucho tiempo no es vacía ya que contiene miles de pequeños anillos muy angostos. El cuerpo principal también incluye un anillo menos opaco y más angosto que los dos anteriores, interior al anillo B, llamado anillo C. Exteriores al anillo A hay tres pequeños anillos llamados anillos F, G y E. También es posible distinguir un anillo interior a C siendo con esto el anillo más próximo a la superficie de Saturno, este es llamado anillo D (ver figura 5). Los anillos son de un espesor muy fino, se cree que tienen un grosor máximo de unos cuantos kilómetros, si los comparamos con una hoja de afeitar, los anillos resultan ser mil veces más delgados. Después de las fotos enviadas por el Voyager, quedo establecido que los anillos arriba mencionados están formados a su vez por millones de pequeños subanillos, algunos más anchos y brillantes que otros.

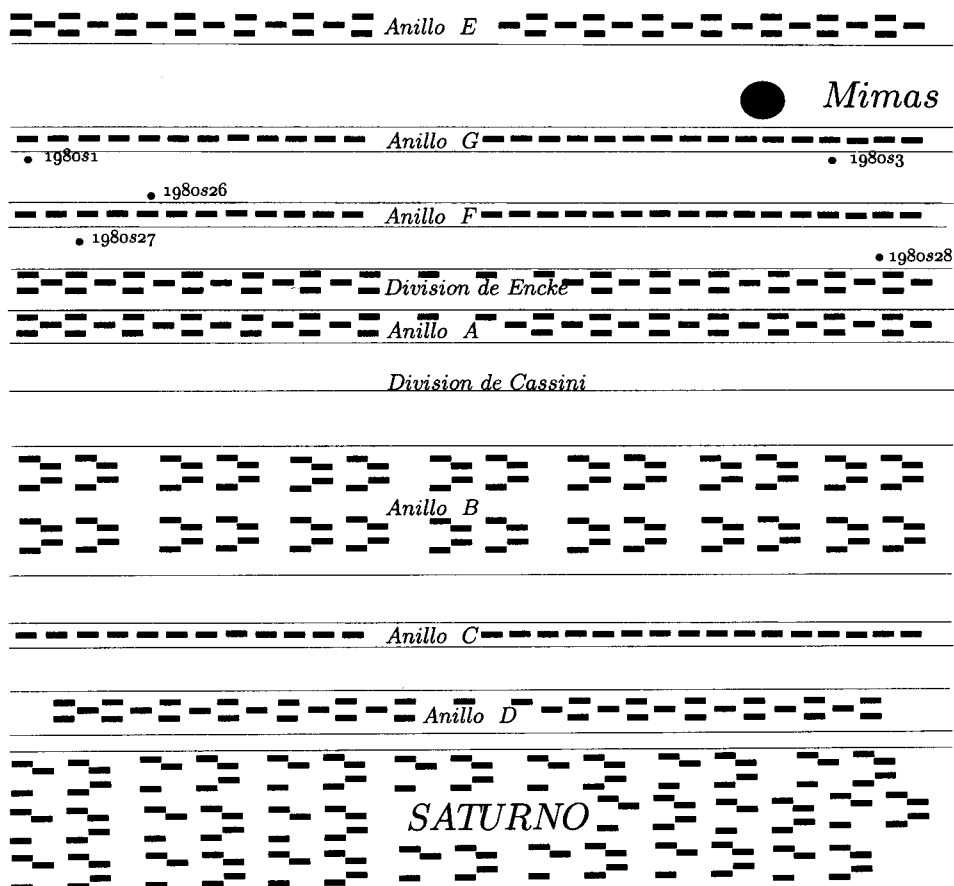


Figura 5. Los anillos de Saturno

Estudiar la dinámica de las partículas en los anillos es un problema muy complicado, ya que intervienen simultáneamente varios tipos de fuerzas entre las que destacan: las fuerzas gravitacionales debidas a las lunas fuera de los anillos y a las lunetas encajadas en ellos, fuerzas electromagnéticas debidas al campo magnético producido por la rotación del planeta y las fuerzas producidas por el medio gaseoso diluido en el cual los anillos rotan.

Nosotros estamos particularmente interesados en el estudio del anillo F, el cual presenta una estructura muy fina. De las fotos enviadas por el Voyager se puede apreciar una especie de *torcimiento* en una parte del anillo. También sabemos que existen dos lunas pastoras que acompañan al anillo, es decir, dos lunas cuyas órbitas están a ambos lados del anillo. La luna interior se llama Prometeo (1980-S27) y la exterior, Pandora (1980-S26). De las dos, Prometeo está más cercana al anillo F y es de mayor tamaño. Una posible explicación del aparente *torcimiento* del anillo es que se debe a los diferentes periodos de las lunas pastoras. Mientras Prometeo da 113 revoluciones sobre Saturno,

para eliminar el centro de masa, que como es sabido se mueve linealmente, definimos

$$z_0 = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^3 m_k x_k, \text{ donde } M = \sum_{k=0}^3 m_k, \text{ y } z_k = x_k - z_0, \text{ para } k=1, 2, 3,$$

obteniendo las ecuaciones

$$\ddot{z}_0 = 0,$$

$$\ddot{z}_k = -\frac{z_k}{|z_k|^3} + F_k(z, \bar{z}, m),$$

donde $m = (m_1, m_2, m_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$ y las funciones F_k tienen bellas propiedades de simetría. De esta forma las ecuaciones originales son reducidas a tres problemas de Kepler desacoplados. Si ahora tomamos un sistema coordenado rotatorio donde

$$z_j = w_j e^{i\alpha_1 t},$$

la ecuación diferencial correspondiente toma la forma

$$\ddot{w}_j + 2i\alpha_1 \dot{w}_j - \alpha_1^2 w_j = -\frac{w_j}{|w_j|^3} + F_j(w, \bar{w}, m), \quad j = 1, 2, 3.$$

En estas coordenadas las orbitas circulares estan dadas por

$$w_j = r_j e^{i(\alpha_j - \alpha_1)t}, \quad j = 1, 2, 3.$$

La expresión anterior representa una órbita periódica si existen enteros j_1, j_2, j_3 , no todos cero tales que

$$\sum_{k=1}^3 j_k \alpha_k = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^3 j_k = 0.$$

Usando este tipo de ideas se obtienen familias de órbitas periódicas sobre el anillo en el sistema rotatorio ([4]), las cuales en un sistema fijo solo podemos afirmar que son cuasiperiódicas.

Para finalizar quiero decir que estas son sólo algunas ideas y técnicas básicas que nosotros usamos en un intento por entender la dinámica de los anillos planetarios y en general del movimiento de los cuerpos celestes en nuestro Sistema Solar. Es obvio que aún falta mucho por hacer en esta dirección, cada día surgen nuevos retos y se abren nuevos horizontes. Todos ustedes estan invitados a acompañarnos en esta odisea.

Agradecimiento

El presente artículo es producto de la conferencia plenaria impartida por el autor durante el XXXI Congreso Nacional de la Soc. Mat. Mexicana. Agradezco a los organizadores del congreso este gran honor.

Referencias

- [1] F. Alfaro and E. Pérez-Chavela, *The Rhomboidal Charged Four Body Problem Proceedings. Third International Symposium HAM-SYS 98.* (por aparecer)
- [2] S. Craig, F. N. Diacu, E. A. Lacomba and E. Pérez-Chavela, *On the Anisotropic Manev Problem Journal of Mathematical Physics* **40**, No. 3, 1–17 (1999).
- [3] H. Dankowicz and P. Holmes, *The existence of transversal homoclinic points in the Sitnikov problem*, J. of Diff. Eq. **116**, 468–483 (1995).
- [4] J. Delgado, E. A. Lacomba, J. Llibre and E. Pérez-Chavela, *Models for explaining the structure of Saturn's F-ring*, AIP Conference Proceedings, **342**, pp. 506–513 (1994).
- [5] J. Delgado, F. N. Diacu, E. A. Lacomba, A. Mingarelli, V. Mioc, E. Pérez-Chavela and C. Stoica, *The Global Flow of the Manev Problem Journal of Mathematical Physics* **37**, No.6, 2748–2761 (1996).
- [6] F. N. Diacu and P. Holmes, *Celestial Encounters. The origins of chaos and stability.* Princeton University Press (1996).
- [7] J. Fierro, M. A. Herrera, *La familia del Sol*, La Ciencia desde México. **62**, 1993.
- [8] A. García de León Loza, *El Sistema Solar*, Publicaciones SEP-UNAM.
- [9] A. García and E. Pérez-Chavela. *Heteroclinic Phenomena in the Sitnikov Problem* (por aparecer).
- [10] J. B. A. Laskar, *A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system*, Nature, **338**, pp. 237–238 (1989).

- [11] J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Annals of Mathematics Studies **77**, Princeton University Press (1973).
- [12] Ernesto Pérez-Chavela, D. Saari, A. Susín and Z. Yan, *Central Configurations in the Charged Three Body Problem. Contemporary Mathematics. Hamiltonian Dynamics and Celestial Mechanics*.**198**, 137–155 (1996).
- [13] E. Pérez-Chavela, *Caos en el Sistema Solar*, *Miscelánea Matemática* **26**, 59–69, (1997).
- [14] Ernesto Pérez-Chavela and Luz Vianey Vela-Arévalo, *Triple Collision in the Quasihomogeneous Collinear Three-Body Problem. Journal of Differential Equations* **148**, 186–211 (1998).
- [15] Ernesto Pérez-Chavela, *Different Kinds of Potentials in Celestial Mechanics. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems* **5**, 545–560 (1999).
- [16] I. Peterson, *Newton's Clock. Chaos in the Solar System*, Science/Astronomy, Freeman (1993).
- [17] D. Saari, *Singularities and Collisions of Newtonian Gravitational Systems*, Arch. Rational Mech. Anal. **49**, pp. 311–320 (1973).
- [18] S. Smale, *Mathematical Problems for the Next Century*, Math. Intell. **20**, pp. 7-15 (1998).