

# El delicado arte de tirar y detener penalties

Guillermo Pastor\*

Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM)

Río Hondo No. 1, San Angel

01000 México D.F.

`pastor@gauss.rhon.itam.mx`

## 1 La maldición del penalty.

¿Quién de nosotros no se ha preguntado si los equipos mexicanos están condenados a perder eternamente los partidos decisivos en las series de penalties? La mayoría de los expertos coincide en que la razón principal del pobre desempeño de nuestros tiradores es el nerviosismo. La psicología y la brujería no han producido hasta ahora resultados palpables. El objetivo de este trabajo es mostrar que las matemáticas pueden aportar soluciones reales para liberar a los jugadores mexicanos de la *maldición del penalty*. Además, analizaremos los fundamentos que sustentan algunos axiomas de nuestra cultura futbolística tales como:

- i) Un penalty bien tirado es gol.
- ii) Un portero sin suerte no es portero.
- iii) El tiro de penalty debe ser raso, bien colocado y con potencia.

## 2 Elementos básicos de la teoría de los penalties.

Las propiedades esenciales del modelo que emplearemos en nuestro análisis son:

---

\*Investigación apoyada por la Asociación Mexicana de Cultura, A.C

- i) El tirador elige un punto  $(x_i, y_i)$  de la portería hacia el cual dirige su disparo con potencia.
- ii) De manera simultánea, el portero se coloca en una región  $\Omega(j)$  en la cual es capaz de detener el balón.
- iii) Debido a la potencia y a las habilidades naturales del tirador, el punto  $(x, y)$  a donde finalmente llega el balón se representa por medio de una variable aleatoria.
- iv) La probabilidad de que el resultado del tiro sea gol es igual a la probabilidad de que el balón entre a la portería menos la probabilidad de que el balón caiga en la región  $\Omega(j)$  en que se colocó el portero.

En lo que resta de esta sección acotaremos con precisión las características de este modelo. Supondremos que las variables  $x$  y  $y$  son independientes, normales con medias  $x_i$  y  $y_i$ , respectivamente, y ambas con una desviación estándar  $\sigma$ .

Las dimensiones (en metros) del área libre dentro de los postes de la portería son  $7.32 \times 2.44$ <sup>1</sup>. Para determinar la probabilidad de que el balón entre a la portería es necesario analizar los tiros que pegan en los postes y el larguero, así como los tiros rasos. En la figura 1, el círculo pequeño con centro en  $A$  representa el poste lateral de radio  $6\text{ cm}$ , mientras que el balón con  $11\text{ cm}$  de radio es representado por el círculo con centro en  $B$ .

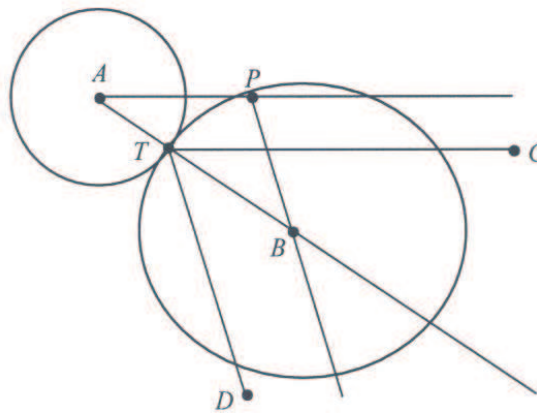


Figura 1. Geometría de los tiros al poste.

<sup>1</sup>Toda la información técnica de fútbol puede consultarse en [2]

Denotemos por  $T$  al punto de contacto del balón con el poste y por  $P$  al punto al que se dirige el balón. Sean  $DT$  y  $TC$  paralelos a la dirección en la que viaja el balón y a la línea de gol, respectivamente. Observemos que el balón rebota paralelamente a la línea de gol cuando los ángulos  $DTB$  y  $BTC$  son iguales, digamos  $\alpha$ .

El punto medio de la línea de gol, el punto desde donde se tira el penalty y el punto  $P$  hacia donde se dirige el balón forman un triángulo rectángulo. El cateto opuesto a  $P$  de este triángulo tiene una longitud de 11 metros, mientras que el cateto opuesto al punto donde se tira el penalty tiene una longitud ligeramente menor a 3.66 metros, digamos  $3.66 - d$ . De esta forma vemos que

$$\tan(2\alpha) = \frac{11}{3.66 - d}. \quad (1)$$

Por otro lado, el triángulo  $ABP$  es isósceles. Sus lados iguales tienen longitud  $d$  y la longitud del lado  $AB$  es la suma de los dos radios, esto es, 0.17. De la ley de cosenos se obtiene la relación

$$d^2 = (0.17)^2 + d^2 - 2(0.17)d \cos(\alpha).$$

que al cancelar términos produce

$$2d \cos(\alpha) = 0.17. \quad (2)$$

La solución de este sistema de dos ecuaciones es  $\alpha = 0.625$  y  $d = 0.105$ . Como el radio del poste es de  $0.06 m$ , la distancia del poste al punto  $P$  es de  $0.045 m$ . Hemos entonces establecido que un tiro que pega en el poste rebota hacia adentro de la portería si la distancia del poste al punto al que se dirige el centro del balón es mayor a  $4.5 cm$ . Si en la discusión anterior reemplazamos la distancia del centro de la línea de gol al poste ( $3.66 m$ ) por la altura de la portería ( $2.44 m$ ), podemos determinar que los tiros que pegan en el larguero rebotan hacia adentro de la portería si la distancia del larguero al punto al que se dirige el centro del balón es ahora mayor a  $4.9 cm$ .

El problema de los tiros rasos es más complejo, ya que por razones físicas el balón no se desvía por abajo del suelo. La altura mínima que alcanza el centro del balón está determinada por el radio del balón y es de  $11 cm$ . Debemos entonces permitir tiros ligeramente desviados hacia abajo. Sin embargo, si el tiro está dirigido a un punto por abajo un cierto umbral  $y_0$ , el resultado será un *calcetinazo* y el portero tendrá oportunidad de detener el balón. Así, representaremos los tiros rasos que entran a la portería como aquellos donde la variable  $y \in [y_0, 0.11]$ .

Observemos entonces que la probabilidad de que el tiro resulte raso es positiva.

En resumen, la probabilidad de que el balón entre a la portería cuando el tirador pretende dirigir su disparo hacia el punto  $(x_i, y_i)$  viene dada por

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_R \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2)\right) dx dy, \quad (3)$$

donde  $R$  es el rectángulo  $[-3.615, 3.615] \times [y_0, 2.391]$ . En lo sucesivo, asignaremos a  $y_0$  el valor 0.

La región  $\Omega(j)$  donde el portero puede detener el balón está constituida por una región básica que el portero puede colocar en diferentes zonas de la portería. Basados en estudios de Leonardo, en la figura 2 podemos deducir que esta región básica está formada por la unión de una región elipsoidal, donde el portero puede detener el balón con las manos, y un segmento anular, en la cual el portero puede detener el balón con los pies.

Si suponemos que la altura del portero es de 1.78 m, los ejes de la elipse tendrán una longitud aproximada de 1.58 y 1.28 m, mientras que la distancia del centro de la elipse a los pies del portero será de 1.44 m. Supondremos también que la apertura máxima de las piernas es de  $\pi/8$ , es decir, de 22.5 grados. Así, si situamos el centro de la elipse en el origen, entonces la región básica donde el portero ataja los penalties está descrita por

$$\{(x, y) : \frac{x^2}{(0.79)^2} + \frac{y^2}{(0.64)^2} \leq 1\} \cup \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq (1.44)^2, \frac{23\pi}{16} \leq \arg(x, y) \leq \frac{25\pi}{16}\}$$

Al lanzarse hacia un punto de la portería, el portero coloca el pecho (centro de la elipse) en cierto punto  $(x_j, y_j)$  de la portería, pero no tiene control de cómo gira la región básica, ya que que la posición de las piernas está determinada por la fuerza de gravedad.

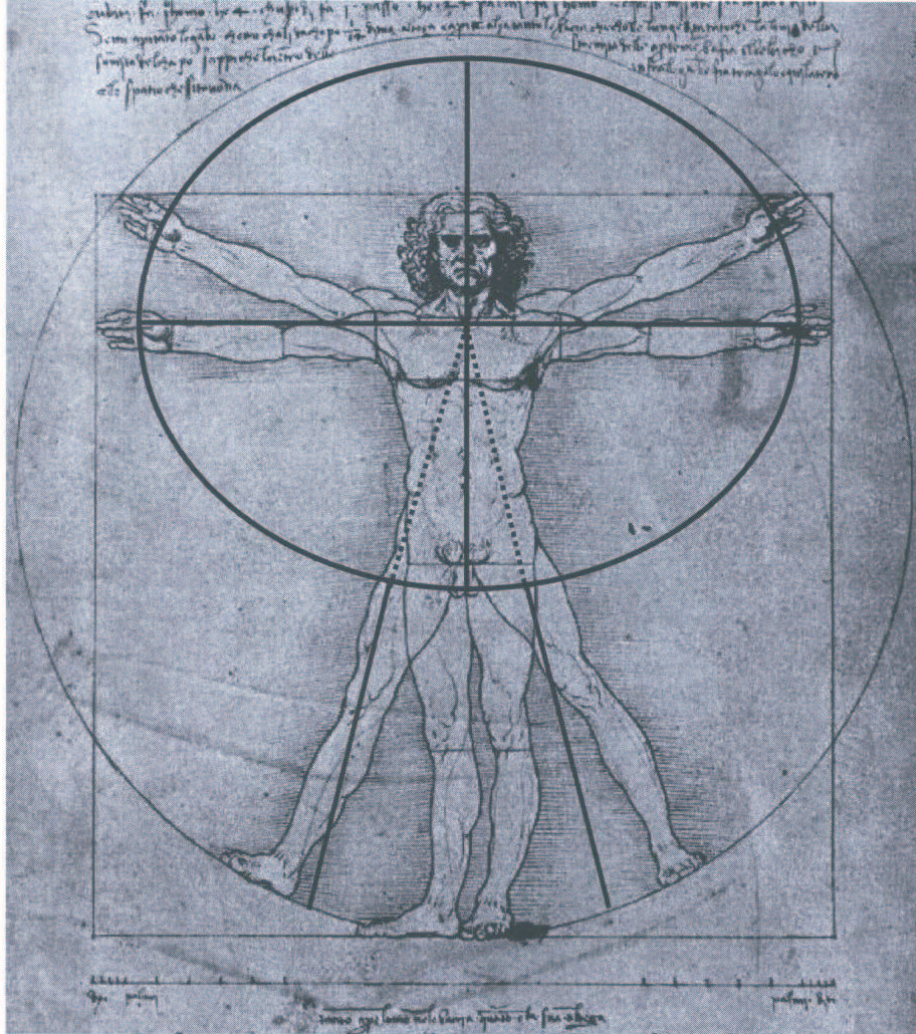


Figura 2. Región donde el portero detiene penalties.

Es conveniente descomponer la probabilidad de que el portero pueda detener el balón en dos términos, dependiendo si el tiro se levanta o si resulta raso. El tiro se levanta cuando la variable  $y$  es mayor a 0.11, así que la probabilidad de que el portero detenga un tiro que se levanta viene dada por

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_S \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)\right) dx dy \quad (4)$$

donde  $S$  es la intersección de  $\Omega(j)$  con el rectángulo  $[-3.615, 3.615] \times [0.11, 2.391]$ . Para calcular la probabilidad de que el portero detenga un tiro raso es necesario identificar la intersección de la región  $\Omega(j)$  con

la recta  $y = 0.11$ . Cuando esta intersección es no-vacía consta de uno o dos intervalos. En el caso de que esta intersección sea el intervalo  $\{(x, y) : a_j \leq x \leq b_j, y = 0.11\}$ , la probabilidad de que el portero ataje un tiro raso es

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_T \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2)\right) dx dy, \quad (5)$$

donde ahora  $T$  es el rectángulo  $[a_j, b_j] \times [y_0, 0.11]$ .

### 3 El juego de los penalties.

Una *estrategia del tirador* consiste de cada uno de los puntos de la portería  $(x_i, y_i)$  hacia donde el tirador puede dirigir su disparo. Supondremos que el conjunto de estrategias del tirador consisten de cada uno de los vértices interiores de la cuadrícula de  $61 \times 61$  cm en que podemos dividir uniformemente la portería. La figura 3 muestra las 33 estrategias que puede elegir el tirador.

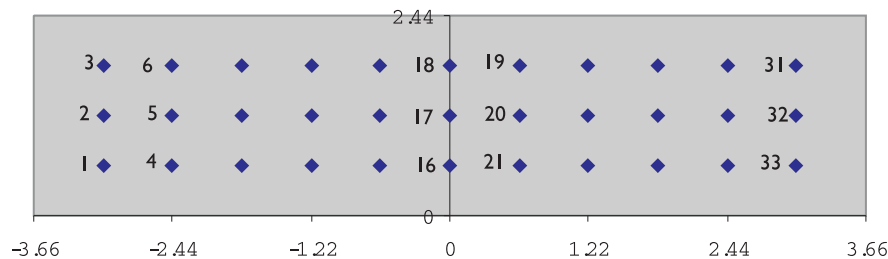


Figura 3. Las estrategias del tirador.

Observemos que hemos numerado las estrategias del tirador de manera que al reflejar con respecto al eje vertical central de la portería, para  $i \neq 16, 17, 18$ , se obtiene una correspondencia entre las estrategias  $(x_i, y_i)$  y  $(x_{34-i}, y_{34-i})$ .

Las *estrategias del portero* consisten de una serie de puntos donde el portero intuye que puede colocar el centro de la elipse de la región  $\Omega(j)$  para tener mayor oportunidad de detener el tiro. Supondremos que el portero puede elegir siete direcciones diferentes hacia donde se puede lanzar, y que en cada una de estas direcciones se puede arrojar con mucha o poca fuerza. En la figura 4 numeramos estos catorce puntos.

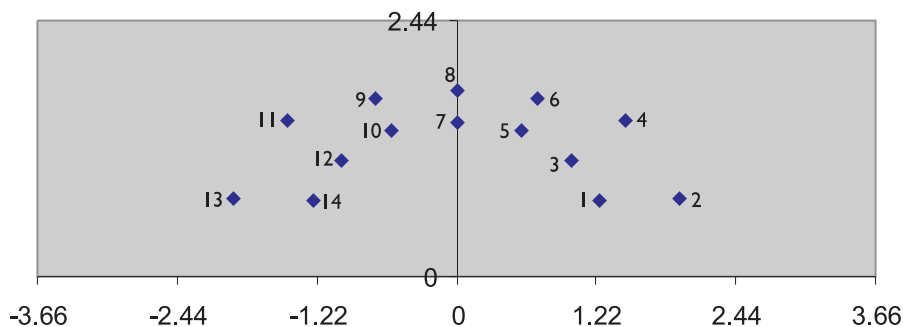


Figura 4. Las estrategias del portero.

La numeración de las estrategias del portero responde ahora a la simetría entre las estrategias  $(x_j, y_j)$  y  $(x_{15-j}, y_{15-j})$ . Como ya se discutió en el párrafo anterior, la inclinación de las piernas está de terminada por razones físicas. En la siguiente tabla especificamos las coordenadas de los diferentes puntos  $(x_j, y_j)$  así como de los ángulos  $\theta_j$  de inclinación del eje de simetría de la región  $\Omega(j)$ . Estas coordenadas están dadas en metros y resultan de identificar la portería con el rectángulo  $[-3.66, 3.66] \times [0, 2.44]$ .

$j$	$x_j$	$y_j$	$\theta_j$
1	1.25	0.73	0.2
3	1	1.1	0.6
5	0.56	1.29	1.05
7	0	1.46	$\pi/2$
9	-0.56	1.39	$\pi - 1.05$
11	-1	1.1	$\pi - 0.6$
13	-1.25	0.73	$\pi - 0.2$

$j$	$x_j$	$y_j$	$\theta_j$
2	1.95	0.75	0.2
4	1.48	1.48	0.6
6	0.7	1.7	1.05
8	0	1.78	$\pi/2$
10	-0.7	1.7	$\pi - 1.05$
12	-1.48	1.48	$\pi - 0.6$
14	-1.95	0.75	$\pi - 0.2$

Tabla 1. Especificaciones de las estrategias del portero.

En la figura 5 ilustramos la posición de las regiones  $\Omega(2)$  y  $\Omega(10)$  que se obtiene con esta información. La línea punteada señala la recta  $y = 0.11$ . La intersección de las regiones  $\Omega(2)$  y  $\Omega(10)$  con esta línea son los intervalos  $[1.621, 2.366]$  y  $[-0.133, 0.100]$ , respectivamente.

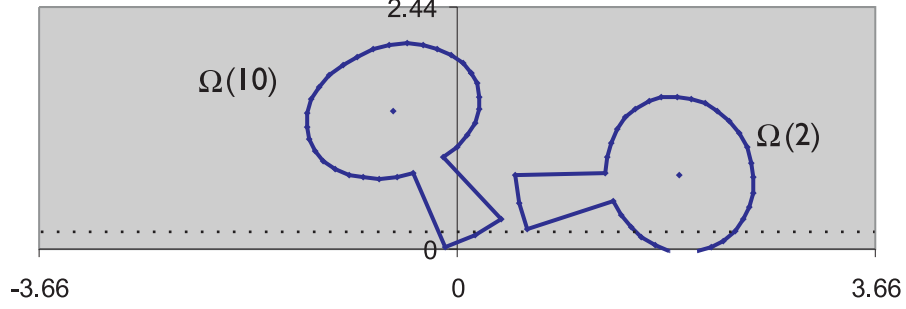


Figura 5. Las regiones  $\Omega(2)$  y  $\Omega(10)$ .

Para cada pareja de estrategias  $(i, j)$  podemos calcular la probabilidad de que el tiro sea gol empleando las expresiones (3), (4) y (5). Por ejemplo, supongamos que el tirador elige la estrategia 20 y el portero la estrategia 10. El tirador apunta entonces su disparo hacia el punto  $(x_{20}, y_{20}) = (0.61, 1.22)$ . Si denotamos por  $f(x, y)$  a la densidad conjunta

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-((x - 0.61)^2 + (y - 1.22)^2)/2\sigma^2\right),$$

la probabilidad de que el tiro sea gol es

$$\iint_R f(x, y) dx dy - \iint_S f(x, y) dx dy - \iint_T f(x, y) dx dy$$

donde  $R$  es el rectángulo  $[-3.615, 3.615] \times [y_0, 2.391]$ ,  $S$  es la intersección de  $\Omega(10)$  con  $[-3.615, 3.615] \times [0.11, 2.391]$  y  $T$  es el rectángulo  $[-0.133, 0.1] \times [y_0, 0.11]$ .

Procediendo de esta manera obtenemos una matriz  $\mathbf{M}(\sigma) = (a_{ij})$  de tamaño  $33 \times 14$  cuyas entradas son las probabilidades de que el disparo sea gol dependiendo de las diferentes estrategias que seleccionan el tirador y el portero. Observemos que por la simetría con respecto al eje central vertical de la portería esta matriz satisface las siguientes condiciones de simetría:

$$\begin{cases} a_{i,j} = a_{34-i,15-j} & \text{si } i \neq 16, 17, 18 \text{ y } j \neq 7, 8. \\ a_{i,j} = a_{34-i,j} & \text{si } i \neq 16, 17, 18 \text{ y } j = 7, 8. \\ a_{i,j} = a_{i,15-j} & \text{si } i = 16, 17, 18 \text{ y } j \neq 7, 8. \end{cases} \quad (6)$$



Con el fin de analizar el impacto del nerviosismo en un penalty consideraremos dos casos: el de un jugador nervioso con una desviación estándar  $\sigma = 0.5 m$  y el de un jugador frío e inmutable caracterizado con una desviación estándar  $\sigma = 0.3 m$ . Para percibir de qué forma la desviación estándar caracteriza la actitud de un tirador es oportuno recordar que un tirador coloca el 39% de sus tiros en un disco de radio  $\sigma$  con centro en su objetivo  $(x_i, y_i)$ , el 86% de sus tiros en un disco de radio  $2\sigma$  y sólo el 1% de sus disparos se aleja más de tres desviaciones estándar de su objetivo. En el apéndice hemos incluido las matrices de probabilidades  $\mathbf{M}(0.5)$  y  $\mathbf{M}(0.3)$  con valores redondeados a cuatro cifras decimales.

Consideraremos primero el caso del jugador nervioso con  $\sigma = 0.5 m$ . Nuestro modelo presupone que los conjuntos de estrategias y la matriz  $\mathbf{M}$  de probabilidades son conocidos por ambos jugadores. En el renglón  $i$  aparecen las probabilidades de que el tirador anote gol cuando elige su estrategia  $i$  y el portero emplea cada una de sus 14 estrategias posibles. Por otro lado, la columna  $j$  contiene las probabilidades de que al portero le anoten gol cuando él emplea su estrategia  $j$  y el tirador cada una de sus 33 diferentes estrategias. Por lo tanto, el objetivo del tirador es elegir un renglón con entradas lo más alto posible, mientras que el portero busca una columna con entradas lo más bajo posible.

Si encontráramos un renglón cuyas entradas fuesen mayores o iguales a las de cualquier otro renglón, ésta sería la estrategia a jugar por el tirador. Sin embargo, después de una mirada rápida a la matriz  $\mathbf{M}(0.5)$ , es fácil ver que tal renglón no existe. Ya que no hay una estrategia óptima obvia del tirador tratemos de simplificar el juego eliminando las estrategias que evidentemente nunca debe emplear el tirador, esto es, aquellos renglones cuyas entradas fuesen todas menores o iguales a las de otro renglón. Un nuevo examen a la matriz muestra que tampoco existen estas estrategias. Después de un análisis similar, pero ahora desde el punto de vista del portero, se puede ver que el portero tampoco tiene una estrategia óptima obvia (ahora una columna con entradas menores o iguales a las de cualquier otra) ni estrategias que sea evidente que nunca deba emplear (columnas con entradas mayores a las de alguna otra columna).

Es claro que la dificultad que tiene el tirador en decidir qué estrategia debe jugar radica en la incertidumbre que tiene acerca de la estrategia que el portero elegirá. Resulta entonces importante sopesar qué tan riesgosa es cada una de las 33 posibles estrategias, esto es, cuál es el peor escenario de cada renglón. Como el mínimo de cada renglón representa el peor escenario asociado a la correspondiente estrategia,

la estrategia menos riesgosa del tirador es aquella que contiene el valor máximo de los 33 mínimos. Para  $\mathbf{M}(0.5)$  el máximo de los mínimos es de 0.764 y se encuentra en los renglones 2 y 32:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	.856	.856	.856	.856	.856	.856	.856	.856	.856	.856	.833	.854	.764	.852
32	.852	.764	.854	.833	.856	.856	.856	.856	.856	.856	.856	.856	.856	.856

Esto significa que si el tirador elige cualquiera de estas dos estrategias, entonces la probabilidad de que anote gol es siempre mayor o igual a 0.764. A cada una de estas estrategias se le conoce como *estrategia maximín pura*. Con respecto al portero, el peor escenario asociado a cada estrategia es el valor máximo de la correspondiente columna. La estrategia del portero con menor riesgo es aquella donde se encuentra el mínimo de los máximos. En el caso  $\mathbf{M}(0.5)$  el valor mínimo de los máximos de las columnas es de 0.97 y se alcanza en la columna 7. Cuando el portero emplea la estrategia 7 la probabilidad de que le anoten es menor o igual a 0.97. Esta es la *estrategia minimax pura*.

Ya observamos que las estrategias 2 y 32 del tirador son razonablemente buenas. Sin embargo, es claro que el tirador tendrá mayores oportunidades de anotar si logra engañar al portero y que el portero tendrá una mayor probabilidad de detener el tiro si logra adivinar la trayectoria del balón. Una forma de tratar de engañar al portero, y a la vez emplear una buena estrategia, es mezclando las estrategias 2 y 32, esto es, eligiendo la estrategia 2 con cierta probabilidad  $q$  y la estrategia 32 con probabilidad  $1 - q$ . Las probabilidades de anotar vendrían dadas por la *estrategia mixta* (combinación convexa)  $q\mathbf{r}_2 + (1 - q)\mathbf{r}_{32}$ , donde  $\mathbf{r}_2$  y  $\mathbf{r}_{32}$  denotan los renglones 2 y 32 de  $\mathbf{M}(0.5)$ . Por ejemplo, si el tirador elige cada una de estas dos estrategias con probabilidad 0.5, entonces esta estrategia mixta sería:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
.854	.810	.855	.845	.856	.856	.856	.856	.856	.856	.654	.855	.810	.854

El mínimo de este vector es ahora 0.81, esto es, empleando esta estrategia mixta el tirador mejora su desempeño y tiene garantizado anotar con al menos una probabilidad de 0.81, independientemente de la estrategia que siga el portero. En la figura 3 podemos apreciar que estas dos estrategias corresponden a dirigir el tiro a media altura y bien colocado a una distancia de 61 *cm* de los postes.

Una estrategia que a menudo siguen los porteros es la de tirarse con probabilidad 0.5 a cada uno de los lados lo más bajo y lejos posible,

que corresponde a elegir con probabilidad 0.5 las estrategias 2 y 13 (ver figura 4). Esta estrategia mixta viene dada por la combinación convexa  $0.5\mathbf{c}_2 + 0.5\mathbf{c}_{13}$ , donde ahora  $\mathbf{c}_2$  y  $\mathbf{c}_{13}$  denotan columnas de  $\mathbf{M}(0.5)$ . El máximo de este vector es ahora de 0.981. Esto significa que el portero logra mejores resultados quedándose prácticamente inmóvil (estrategia 7) que lanzándose al azar a los extremos. Sin embargo, si combinamos las tres estrategias con la misma probabilidad,  $(\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_7 + \mathbf{c}_{13})/3$ , entonces el máximo de esta nueva columna es de 0.863. Hemos entonces encontrado una estrategia que le garantiza al portero detener casi el 14% de los penalties.

A pesar de haber encontrado estrategias buenas de ambos jugadores, queda la duda si éstas son las mejores estrategias de los jugadores. Afortunadamente, el *teorema mínimax* de von Neumann [4] afirma que existe una probabilidad  $P^*$ , una estrategia mixta del tirador  $i^*$  y una estrategia mixta  $j^*$  del portero, tales que

- i) Si el tirador emplea  $i^*$  la probabilidad de anotar es mayor o igual a  $P^*$ , independientemente de la estrategia del portero.
- ii) Si el portero elige  $j^*$  la probabilidad de que le anoten gol es menor o igual a  $P^*$ , independientemente de la estrategia del tirador.

Además, es posible determinar las *estrategias óptimas*  $i^*$  y  $j^*$ , así como la *probabilidad óptima*  $P^*$  resolviendo un problema asociado de programación lineal [1]. La existencia de algoritmos para resolver problemas de programación lineal nos permite encontrar las estrategias óptimas y el valor  $P^*$  (ver [3, cap. 3]). Para el caso  $\sigma = 0.5$  obtenemos:

- i) La probabilidad óptima es de  $P^* = 0.849$ .
- ii) La estrategia óptima  $i^*$  del tirador consiste de elegir las estrategias 5 y 29 con probabilidad 0.289, las estrategias 14 y 20 con probabilidad 0.131 y las estrategias 11 y 23 con probabilidad 0.08.
- iii) La estrategia óptima  $j^*$  del portero se obtiene al elegir las estrategias 2 y 13 con probabilidad 0.347, la estrategia 7 con probabilidad 0.233 y las estrategias 3 y 12 con probabilidad 0.037.

En las figuras 6 y 7 ilustramos las estrategias óptimas del tirador y del portero.

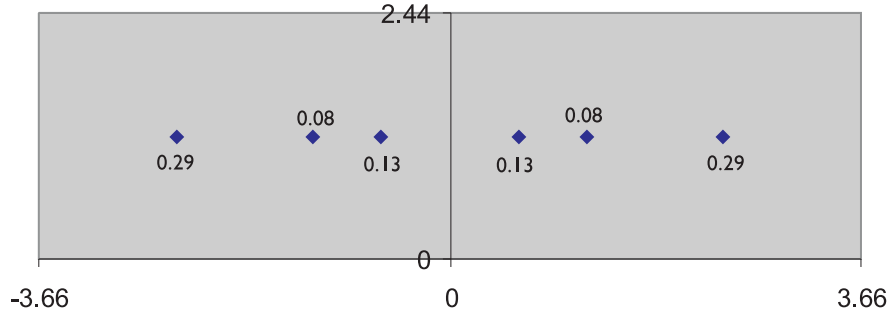


Figura 6. Estrategias óptimas del tirador. ( $\sigma = 0.5$ ).

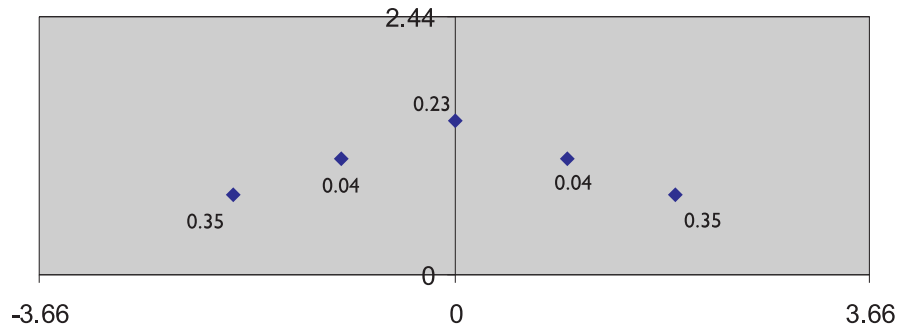


Figura 7. Estrategias óptimas del portero. ( $\sigma = 0.5$ ).

Consideremos por último el caso del jugador frío, impasible y con buena técnica de disparo cuya desviación estándar es de  $0.3 m$ . Empleando de nuevo la relación entre juegos matriciales y programación lineal se puede obtener que para  $\sigma = 0.3$  la solución del juego viene dada por:

- i) La probabilidad óptima es de  $P^* = 0.959$ .
- ii) La estrategia óptima  $i^*$  del tirador consiste de elegir las estrategias 2 y 32 con probabilidad 0.473, la estrategias 17 con probabilidad 0.005 y las estrategias 13 y 21 con probabilidad 0.025.
- iii) La estrategia óptima  $j^*$  del portero se obtiene al elegir las estrategias 2 y 13 con probabilidad 0.457, la estrategia 7 con probabilidad 0.039 y las estrategias 3 y 12 con probabilidad 0.024.

Las figuras 8 y 9 muestran las estrategias óptimas del tirador y portero cuando  $\sigma = 0.3$ .

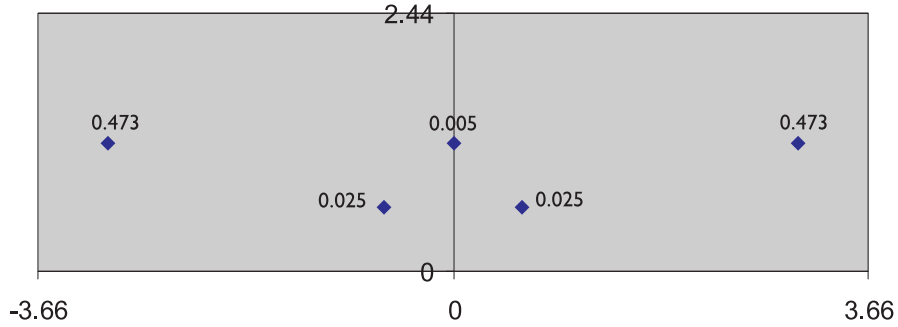


Figura 8. Estrategias óptimas del tirador. ( $\sigma = 0.3$ ).

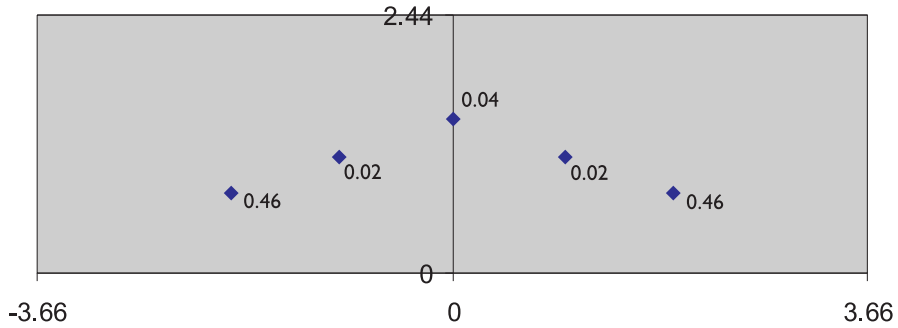


Figura 9. Estrategias óptimas del portero. ( $\sigma = 0.3$ ).

## 4 Conclusiones.

Finalizaremos este trabajo presentando algunas reflexiones sobre los resultados logrados.

1. Es posible diseñar estrategias óptimas para el tirador que le garanticen que la probabilidad de anotar sea mayor o igual a cierto valor  $P^*$ .

2. Cuando el portero conoce lo suficiente al tirador, entonces se pueden determinar estrategias óptimas para el portero que le garanticen que la probabilidad de que le anoten gol no sea mayor al valor  $P^*$ .
3. Las estrategias óptimas de ambos jugadores, así como el valor  $P^*$ , dependen de las habilidades y nerviosismo tirador del tirador. Por lo tanto, no existen recomendaciones universales para cualquiera de estos jugadores.
4. Aun en el caso de tiradores intranquilos e imprecisos, la probabilidad de anotar un penalty cuando se siguen las estrategias óptimas es bastante alta (cerca 0.85 cuando  $\sigma = 0.5 m$ ).
5. El principio ‘un penalty bien tirado es gol’ es consistente con nuestros resultados en el caso del tirador frío con una desviación estándar pequeña, ya que entonces la probabilidad de anotar un penalty bien tirado es cercana a 1.
6. Cuando un penalty está bien tirado el portero tiene poca oportunidad de detener el disparo, aun para tiradores nerviosos e imprecisos. Luego, la expresión ‘un portero sin suerte no es portero’ está sustentada en el hecho de que a menudo el tirador emplea malas estrategias, como la de tratar de colocar el balón *donde las arañas tejen su nido* estando muy nervioso.
7. Sin embargo, no encontramos sustento para el principio ‘el tiro de penalty debe ser raso, bien colocado y con potencia’, ya que en general nuestros modelos recomiendan los tiros a altura media sobre los rasos.
8. La estrategia de los porteros de lanzarse aleatoriamente a los lados lo más lejos posible y un poco bajo bajo es recomendable cuando el tirador es impasible y preciso.
9. Por último, es evidente que el desempeño de nuestros equipos fútbol se beneficiaría considerablemente si nuestros directores técnicos tuviesen conocimientos básicos de teoría de juegos.

## Apéndice.

Las columnas 9 a 14 de las matrices  $\mathbf{M}(\sigma)$  se obtienen por medio de las relaciones (6).

## M(0.5)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.7738	0.7738	0.7738	0.7738	0.7738	0.7738	0.7738	0.7738
2	0.8561	0.8561	0.8561	0.8561	0.8561	0.8561	0.8561	0.8561
3	0.7567	0.7567	0.7567	0.7567	0.7567	0.7567	0.7567	0.7567
4	0.8803	0.8803	0.8803	0.8803	0.8803	0.8803	0.8802	0.8802
5	0.9738	0.9738	0.9738	0.9738	0.9738	0.9738	0.9736	0.9737
6	0.8608	0.8608	0.8608	0.8608	0.8608	0.8608	0.8606	0.8606
7	0.8884	0.8884	0.8884	0.8884	0.8883	0.8884	0.8850	0.8871
8	0.9829	0.9829	0.9829	0.9829	0.9827	0.9828	0.9741	0.9769
9	0.8688	0.8688	0.8688	0.8688	0.8686	0.8687	0.8611	0.8593
10	0.8885	0.8886	0.8881	0.8886	0.8845	0.8879	0.8387	0.8649
11	0.9830	0.9831	0.9824	0.9831	0.9732	0.9799	0.8751	0.9042
12	0.8689	0.8689	0.8686	0.8689	0.8600	0.8638	0.7761	0.7551
13	0.8842	0.8886	0.8749	0.8882	0.8365	0.8754	0.6438	0.7547
14	0.9796	0.9830	0.9630	0.9819	0.8679	0.9314	0.5561	0.6446
15	0.8680	0.8689	0.8576	0.8676	0.7668	0.7905	0.5118	0.4337
16	0.8145	0.8860	0.7664	0.8788	0.6768	0.8103	0.4722	0.6482
17	0.9240	0.9810	0.8028	0.9534	0.5555	0.7228	0.3286	0.4415
18	0.8515	0.8684	0.7654	0.8365	0.5036	0.5065	0.3314	0.2150
19	0.7765	0.8559	0.5725	0.6436	0.3732	0.2511	0.5118	0.4337
20	0.6910	0.9400	0.4601	0.7671	0.3663	0.5017	0.5561	0.6446
21	0.5240	0.8361	0.5063	0.8078	0.5693	0.7338	0.6438	0.7547
22	0.7109	0.7868	0.5611	0.3516	0.5844	0.4163	0.7761	0.7551
23	0.4931	0.7301	0.4004	0.4517	0.6006	0.6121	0.8751	0.9042
24	0.2672	0.5807	0.4252	0.6633	0.6929	0.7742	0.8387	0.8649
25	0.7761	0.7041	0.7473	0.4082	0.8071	0.7376	0.8611	0.8593
26	0.6770	0.4894	0.7248	0.4676	0.8940	0.8727	0.9741	0.9769
27	0.4822	0.2788	0.6717	0.6543	0.8443	0.8570	0.8850	0.8871
28	0.8428	0.7476	0.8444	0.7021	0.8566	0.8486	0.8606	0.8606
29	0.9074	0.6167	0.9349	0.7821	0.9675	0.9635	0.9736	0.9737
30	0.7869	0.4202	0.8466	0.7929	0.8772	0.8775	0.8802	0.8802
31	0.7557	0.7306	0.7561	0.7387	0.7566	0.7564	0.7567	0.7567
32	0.8518	0.7644	0.8544	0.8330	0.8560	0.8558	0.8561	0.8561
33	0.7674	0.6493	0.7723	0.7636	0.7738	0.7738	0.7738	0.7738

## M(0.3)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.9498	0.9498	0.9498	0.9498	0.9498	0.9498	0.9498	0.9498
2	0.9701	0.9701	0.9701	0.9701	0.9701	0.9701	0.9701	0.9701
3	0.9404	0.9404	0.9404	0.9404	0.9404	0.9404	0.9404	0.9404
4	0.9789	0.9789	0.9789	0.9789	0.9789	0.9789	0.9789	0.9789
5	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
6	0.9692	0.9692	0.9692	0.9692	0.9692	0.9692	0.9692	0.9692
7	0.9790	0.9790	0.9790	0.9790	0.9790	0.9790	0.9790	0.9790
8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9999	0.9998	0.9999
9	0.9693	0.9693	0.9693	0.9693	0.9693	0.9693	0.9692	0.9691
10	0.9790	0.9790	0.9790	0.9790	0.9790	0.9790	0.9746	0.9783
11	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9999	0.9584	0.9825
12	0.9693	0.9693	0.9693	0.9693	0.9691	0.9692	0.9376	0.9195
13	0.9790	0.9790	0.9784	0.9790	0.9728	0.9787	0.8212	0.9106
14	0.9999	0.9999	0.9992	0.9999	0.9539	0.9930	0.4615	0.6828
15	0.9693	0.9693	0.9690	0.9693	0.9292	0.9479	0.5298	0.3685
16	0.9639	0.9790	0.9314	0.9789	0.8298	0.9513	0.4021	0.6531
17	0.9903	0.9999	0.8820	0.9981	0.4371	0.7773	0.9159	0.2562
18	0.9687	0.9693	0.9284	0.9667	0.4895	0.5034	0.2119	0.0349
19	0.9378	0.9690	0.6288	0.7740	0.2749	0.5472	0.5298	0.3685
20	0.6922	0.9954	0.2319	0.8398	0.0939	0.3465	0.4615	0.6828
21	0.5565	0.9723	0.5198	0.9604	0.6410	0.8659	0.8212	0.9106
22	0.8678	0.9454	0.6417	0.1936	0.6926	0.3431	0.9376	0.9195
23	0.2738	0.7679	0.1458	0.2399	0.4909	0.5191	0.9584	0.9825
24	0.0574	0.6686	0.3032	0.7977	0.8332	0.9355	0.9746	0.9783
25	0.9401	0.8579	0.9229	0.3492	0.9582	0.9060	0.9692	0.9691
26	0.6818	0.2668	0.7686	0.2322	0.9714	0.9528	0.9998	0.9999
27	0.4633	0.0789	0.7927	0.7592	0.9731	0.9765	0.9790	0.9790
28	0.9687	0.9231	0.9688	0.8852	0.9692	0.9690	0.9692	0.9692
29	0.9880	0.5793	0.9963	0.8614	0.9998	0.9997	0.9999	0.9999
30	0.9529	0.3540	0.9761	0.9505	0.9789	0.9789	0.9789	0.9789
31	0.9404	0.9390	0.9404	0.9399	0.9404	0.9404	0.9404	0.9404
32	0.9701	0.9454	0.9701	0.9691	0.9701	0.9701	0.9701	0.9701
33	0.9498	0.9004	0.9498	0.9497	0.9498	0.9498	0.9498	0.9498

## Referencias

- [1] G. B. Dantzig, *A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem*, en *Activity Analysis of Production and Allocation*, Koopmans, T.C., ed., Wiley, New York, 1951.
- [2] FIFA, *The rules of the game*, [www.fifa.org](http://www.fifa.org).
- [3] G. Owen, *Game Theory*, 3a. edición, Academic Press, San Diego, 1995.
- [4] J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, *Mathematische Annalen* **100** (1928), 295–320.