

# Superficies minimales

Fernando Galaz-García

Dirección actual: Department of Mathematics

University of Maryland

College Park

MD. 20742

USA

galazg@math.umd.edu

Facultad de Matemáticas

Universidad de Guanajuato

México

fdogg@cimat.mx

## 1. Burbujas de jabón y el problema de Plateau

¿Qué pueden tener en común las burbujas de jabón y la Geometría Diferencial? Para contestar esta pregunta, preparemos algo de agua jabonosa y un aro de alambre. Sumerjamos el aro en el agua; al retirarlo de la solución jabonosa, notaremos que una película de jabón se ha formado en el interior del aro. Si soplamos con cuidado obtendremos algunas burbujas. Seamos curiosos, ¿qué pasaría si el marco de alambre, en lugar de un círculo, tuviera otra forma? ¿Un cubo, por ejemplo? Después de algunos experimentos, repararemos en que, tras retirar los marcos de alambre de la solución jabonosa, obtenemos películas de jabón cuya frontera es el marco que introducimos en el agua. Podemos preguntarnos qué caracteriza estas superficies. Sabemos hoy que estas películas de jabón corresponden a superficies que, bajo ciertas restricciones, tienen área mínima (en un sentido que precisaremos en las secciones siguientes). En 1760, el matemático francés Joseph-Louis de Lagrange, al trabajar en el Cálculo de Variaciones, reconoció la importancia del estudio de superficies con esta propiedad. Casi un siglo más tarde, alrededor de 1850, el físico belga Joseph Antoine Ferdinand



Figura 1. Marco de alambre para películas de jabón.

Plateau (quien vivió ciego los últimos 40 años de su vida) realizó numerosos experimentos con películas de jabón, dando origen al problema que lleva su nombre. En términos generales, podemos plantear el Problema de Plateau como: *probar que para cada curva cerrada  $C \subset \mathbb{R}^3$  existe una superficie  $S$  con área mínima y cuya frontera es  $C$ .*

Muchos años fueron dedicados al estudio del Problema de Plateau, el cual resultó ser bastante difícil de resolver. Una parte no trivial del problema consiste en precisar qué superficies y qué curvas están permitidas, y a qué nos referimos al decir que “ $C$  es la frontera de  $S$ ”. Por ejemplo, ¿qué pasa si  $C$  se intersecta a sí misma? H. A. Schwarz y B. Riemann, en 1865, seguidos por K. Weierstrass en 1866, y G. Darboux en 1914, contribuyeron a comprender mejor la pregunta planteada por Plateau. En 1928 el joven matemático norteamericano Jesse Douglas dio solución al Problema de Plateau en el caso en que  $C$  es una curva simple rectificable de Jordan (i.e., una curva sin intersecciones, cerrada y con longitud finita) y la superficie  $S$  tiene el tipo topológico del disco  $D^2$ . Sin embargo, su demostración resultó estar incompleta, y hasta 1931 su artículo aún no había sido publicado. En 1930, de manera independiente, el matemático húngaro Tibor Radó publicó una solución al Problema de Plateau [Ra]. En las décadas siguientes Douglas resolvió varios otros problemas de la teoría de superficies minimales [Do1], [Do2]. Su trabajo fue reconocido en 1936 con la Medalla Fields, la más alta distinción en Matemáticas.

## 2. Curvatura y el Teorema de Poisson- Laplace

La *curvatura* de una superficie suave (i.e., una superficie sin picos ni dobleces) es un concepto fundamental en la Geometría Diferencial. En esta sección, tras analizar muy brevemente la física de las películas de jabón, introduciremos de manera intuitiva los conceptos de *curvaturas principales* y *curvatura promedio* de una superficie suave. Estas herramientas serán de utilidad para estudiar las superficies que hemos encontrado en nuestros experimentos con películas de jabón. Al final de la sección enunciaremos el Teorema de Poisson-Laplace, que relaciona las propiedades físicas de las películas de jabón con los conceptos geométricos de curvatura. Las ideas presentadas en esta sección aparecen, salvo pequeñas modificaciones, en el primer capítulo de [FT].

Tomemos de nuevo nuestro aro para hacer burbujas y, previa inmersión en agua jabonosa, observemos la película de jabón que se ha formado en el interior de éste. Podemos pensar en una película de jabón como una membrana que separa dos medios homogéneos en equilibrio; en nuestro caso, aire-aire. ¿Qué está pasando en esta membrana? Para responder esta pregunta, tomemos un punto cualquiera en la película, una vecindad de éste, y midamos la presión del aire en cada uno de sus lados. Encontraremos que la presión en cada uno de los lados es la misma. Por lo tanto, la presión total en áreas pequeñas de la película es cero. Ahora, soplemos y veamos qué pasa con las burbujas de jabón que han salido del aro. En éstas la presión interna es mayor que la presión externa y la fuerza ejercida por la presión total en un área pequeña de la burbuja tiene dirección normal a ésta y apunta hacia afuera. Esta fuerza es compensada por las fuerzas de tensión superficial en la membrana de jabón, lo cual ocasiona que ésta se curve. Puesto que los medios que separa la burbuja de jabón son homogéneos, la fuerza ejercida por la presión total en cada uno de los puntos de la burbuja tiene la misma magnitud, ocasionando que ésta se curve “en promedio” de la misma manera en cada uno de sus puntos. Para dar un significado preciso a esta afirmación e interpretar matemáticamente estos resultados físicos necesitamos definir un concepto geométrico que capture la idea intuitiva de la curvatura de una superficie. Este concepto es la *curvatura promedio*, que definiremos en los párrafos siguientes.

Consideremos una superficie en  $\mathbb{R}^3$ , suave y de dos dimensiones, que denotaremos por  $S$ . Sean  $p$  un punto en  $S$  y  $N(p)$  uno de los dos vectores normales unitarios a  $S$  en  $p$ . El vector  $N(p)$  es ortogonal al plano tangente a  $S$  en el punto  $p$ , que denotaremos por  $T_pS$ . Notemos que  $T_pS \subset \mathbb{R}^3$ . Fijemos ahora nuestra atención en un plano  $\Pi$  que pasa

por  $p$  y que contiene a  $N(p)$ . El plano  $\Pi$  intersecta a  $S$  en una curva  $\gamma$ , a la que llamaremos *sección normal*. Sea  $v \in T_p S$  el vector unitario tangente a  $\gamma$  en  $p$ ; decimos que  $v$  es una *dirección* de esta sección normal.

Cuando se recorre una curva con velocidad constante, la segunda derivada mide el cambio de dirección de la curva, esto es, su curvatura. Entonces el vector de curvatura en la dirección de  $v$ , que denotaremos por  $\vec{\kappa}(v)$ , está dado por

$$\vec{\kappa}(v) = \gamma''(t_0),$$

donde  $\gamma(t_0) = p$  y  $\gamma'(t_0) = v$ . Notemos que  $\vec{\kappa}(v)$  corresponde al vector de aceleración en  $p$  al moverse a lo largo de  $\gamma$  con velocidad unitaria. Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto interno usual en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces  $\langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = 1$  y tenemos que

$$\langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle' = 2\langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0.$$

Esto implica que el vector de curvatura  $\vec{\kappa}(v)$  es perpendicular a la dirección  $v$ . No es difícil ver que  $\vec{\kappa}(v)$  es paralelo al vector normal  $N(p)$ . Definimos la curvatura  $\kappa(v)$  de una sección normal  $\gamma$  en la dirección  $v$ , con respecto al normal  $N(p)$ , como la cantidad  $\kappa(v) = \langle \vec{\kappa}(v), N(p) \rangle$ . Podemos interpretar  $\kappa(v)$  como qué tanto se curva la superficie en el punto  $p$ , en la dirección de  $v$ . Observemos que

$$\kappa : S^1 \subset T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \langle \vec{\kappa}(v), N(p) \rangle,$$

donde  $S^1 = \{v \in T_p S : \|v\| = 1\}$ , es una función continua. Luego, como  $S^1$  es compacto,  $\kappa$  toma sus valores máximo y mínimo. Estos valores,  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ , son las *curvaturas principales* de la superficie  $S$  en el punto  $p$ . Las secciones normales en las que se alcanzan  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  se llaman *secciones principales*. Las direcciones  $v_1$ ,  $v_2$  de estas secciones nos indican en qué dirección la superficie tiene curvatura máxima y mínima. Llamamos a  $v_1$  y  $v_2$  *direcciones principales*. Es posible demostrar (cf. [dC], sec. 3.2) que los valores  $-\kappa_1$ ,  $-\kappa_2$  son los valores propios de un mapa lineal  $A : T_p S \rightarrow T_p S$  (la diferencial del mapa de Gauss, que definiremos en la siguiente sección) y que los vectores propios correspondientes a  $-\kappa_1$ ,  $-\kappa_2$  son las direcciones principales  $v_1$ ,  $v_2$ . Se sigue que, si las curvaturas principales no son iguales,  $v_1$  y  $v_2$  forman una base ortonormal del plano tangente  $T_p S$ . En este caso, las secciones principales son ortogonales.

Una vez definidas las curvaturas principales, tiene sentido pensar en la curvatura promedio, que podemos interpretar como qué tanto se curva  $S$  en el punto  $p$ .

**Definición 2.1 (Curvatura promedio).** La *curvatura promedio*  $H$  de una superficie  $S$  en el punto  $p \in S$ , con respecto al vector normal  $N(p)$ , es el promedio de las curvaturas principales,

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Denotemos por  $\varphi$  al ángulo entre la dirección  $v$  de una sección normal  $\gamma$  arbitraria en el punto  $p \in S$  y la dirección de la sección principal  $\gamma_1$ . Si  $\kappa_1$  es la curvatura de la sección principal  $\gamma_1$  y  $\kappa_2$  es la otra curvatura principal, entonces, por la fórmula de Euler (cf. [dC], p. 145),

$$\kappa(v) = \kappa(\varphi) = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi.$$

Para representar más claramente la distribución de las curvaturas de las secciones normales  $\gamma$  conforme cambia el ángulo  $\varphi$ , construyamos en el plano con coordenadas polares  $(\rho, \varphi)$  la gráfica de  $\rho = |\kappa(\varphi)|$ . Podemos distinguir los siguientes casos:

- (a)  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  son distintos de cero y tienen el mismo signo. En este caso la gráfica de  $\rho$  es una elipse con semiejes  $|\kappa_1|$  y  $|\kappa_2|$ . Si  $\kappa_1 = \kappa_2 \neq 0$  la elipse degenera en un círculo.
- (b)  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  son distintos de cero y tienen signos distintos. En este caso la gráfica de  $\rho$  es semejante a una “flor de cuatro pétalos”.
- (c) Una de las curvaturas principales  $\kappa_i$  es cero. Entonces la “flor de cuatro pétalos” degenera en una “flor de dos pétalos”, semejante al símbolo  $\infty$ .
- (d) Ambas curvaturas principales son cero. En este caso la gráfica de  $\rho$  es un solo punto: el origen.

Las consideraciones anteriores nos indican que, si  $\kappa_1$  es distinto de  $\kappa_2$ , entonces hay exactamente dos secciones principales ortogonales una con la otra. Si las curvaturas principales son iguales, entonces la curvatura de todas las secciones normales es la misma e igual a la curvatura promedio  $H$ . Enunciaremos ahora el Teorema de Poisson-Laplace, que relaciona las presiones en los medios que separa una superficie con la curvatura promedio de ésta.

**Teorema 2.2 (Poisson-Laplace).** *Supongamos que una superficie suave bidimensional  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  separa dos medios homogéneos en equilibrio. Sean  $P_1$  y  $P_2$  las presiones en los medios. Entonces la curvatura*

promedio  $H$  de la superficie  $S$  es constante e igual a  $h\|P_1 - P_2\|$ , donde la constante  $\lambda = 1/h$  es el coeficiente de tensión superficial, y  $P_1 - P_2$ , la presión resultante, es la diferencia entre las presiones en los medios.

Entonces que una superficie esté “curvada en promedio idénticamente” corresponde a que la curvatura promedio de la superficie sea constante. Luego, tomando en cuenta las consideraciones físicas que hicimos al inicio de esta sección, podemos concluir que la curvatura promedio  $H$  de una película de jabón es constante e igual a cero y que la curvatura promedio de una burbuja de jabón es una constante diferente de cero. Llamamos a las superficies con  $H = \text{const}$  superficies con curvatura promedio constante. Para el caso  $H = 0$  estas superficies reciben un nombre especial: *superficies minimales*. Aunque no es muy frecuente, algunas veces también se les llama *películas de jabón* y, a las superficies con  $H$  constante y distinta de cero, *burbuja de jabón*.

Las superficies con curvatura promedio constante aparecen con frecuencia en la naturaleza y juegan un papel importante en varios fenómenos físicos. Por ejemplo, la interacción en la superficie que separa dos medios determina las características y la velocidad de algunas reacciones químicas; varias membranas, como el tímpano y las que separan células vivas, son superficies minimales.

### 3. El punto de vista geométrico

Las consideraciones físicas nos han sugerido una definición, en términos de la curvatura promedio, de las superficies que se obtienen a partir de películas de jabón. Estas superficies, como muchas otras, son susceptibles de estudio mediante los métodos de la Geometría Diferencial. En esta sección daremos un vistazo a algunas propiedades de las superficies minimales y probaremos algunos resultados sobre estos objetos. Referimos al lector a [dC] (principalmente los capítulos 2 y 3) para un tratamiento más amplio de los resultados y conceptos básicos de la Geometría Diferencial de superficies. La mayor parte del material que presentaremos a continuación está basado en la última sección del capítulo 3 de [dC]. Por ser de fundamental importancia, incluiremos aquí las definiciones de *superficie regular*, *superficie parametrizada* y de la *primera y segunda forma fundamental* de una superficie.

Definiremos primero una *superficie regular*; esto nos permitirá contar con un objeto matemático que capture la idea intuitiva de una superficie suave, que usamos en la sección anterior como modelo de las películas de jabón que queremos estudiar.

**Definición 3.1 (Superficie regular).** Un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una *superficie regular* si, para cada  $p \in S$ , existe una vecindad  $V$  en  $\mathbb{R}^3$  y un mapa  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  de un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que:

1.  $\mathbf{x}$  es diferenciable, i.e., de clase  $C^\infty$ .
2.  $\mathbf{x}$  es un homeomorfismo.
3. Para cada  $q \in U$ , la diferencial  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es uno a uno.

Llamamos al mapa  $\mathbf{x}$  una *parametrización* o un *sistema de coordenadas* (locales) de  $S$  en  $p$  y a  $\mathbf{x}(U) \subset S$  una *vecindad coordinada* de  $p$ . Nos referiremos a las derivadas parciales de  $\mathbf{x}$ ,  $\partial\mathbf{x}/\partial u$ ,  $\partial\mathbf{x}/\partial v$ , por  $\mathbf{x}_u$ ,  $\mathbf{x}_v$ , respectivamente. Hay otro tipo de superficies, las *superficies parametrizadas*, que definiremos a continuación.

**Definición 3.2 (Superficie parametrizada).** Una *superficie parametrizada*  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un mapa diferenciable  $\mathbf{x}$  de un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ . El conjunto  $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$  se llama la *traza* de  $\mathbf{x}$ . La superficie parametrizada  $\mathbf{x}$  es *regular* si la diferencial  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es uno a uno para todo  $q \in U$  (i.e., los vectores  $\partial\mathbf{x}/\partial u$ ,  $\partial\mathbf{x}/\partial v$  son linealmente independientes para todo  $q \in U$ ). Un punto  $p \in U$  donde  $d\mathbf{x}_q$  no es uno a uno se llama *punto singular* de  $\mathbf{x}$ .

Es posible probar (cf. [dC], p. 79) que una superficie parametrizada regular es localmente una superficie regular. Hay varias estructuras geométricas asociadas a una superficie regular. Una de ellas es la *primera forma fundamental*, que relaciona el producto interno en la superficie con el producto interno de  $\mathbb{R}^3$ , y que definiremos en los párrafos siguientes.

Consideremos una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ . El producto interno usual en  $\mathbb{R}^3$  induce en cada plano tangente  $T_p S$  un producto interno, que denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ , es decir, si  $w_1, w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ , entonces  $\langle w_1, w_2 \rangle_p$  es igual al producto interno de  $w_1$  y  $w_2$  como vectores en  $\mathbb{R}^3$ . A este producto interno, que es una forma bilineal simétrica (i.e.,  $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_2, w_1 \rangle_p$  y  $\langle w_1, w_2 \rangle_p$  es lineal en  $w_1$  y  $w_2$ ) corresponde una forma cuadrática  $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0.$$

**Definición 3.3 (Primera forma fundamental).** La forma cuadrática  $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  que hemos definido en el párrafo anterior es la *primera forma fundamental* de la superficie regular  $S$  en  $p \in S$ .

La primera forma fundamental es la expresión de cómo la superficie  $S$  hereda el producto interno natural de  $\mathbb{R}^3$ . Geométricamente, nos permite hacer mediciones en la superficie (longitudes de curvas, ángulos entre vectores tangentes, áreas de regiones) sin necesidad de referirnos al espacio ambiente  $\mathbb{R}^3$  que contiene a la superficie.

Podemos expresar la primera forma fundamental en términos de la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $T_p S$  asociada a la parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  en  $p$ . Como un vector tangente  $w \in T_p S$  es el vector tangente a una curva parametrizada  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , tal que  $p = \alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u'v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2, \end{aligned}$$

donde los valores para las funciones que aparecen están evaluados en  $t = 0$ . Los valores

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p \end{aligned}$$

son los *coeficientes de la primera forma fundamental* en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $T_p S$ . Al hacer variar  $p$  en la vecindad coordenada correspondiente a  $\mathbf{x}(u, v)$  obtenemos funciones  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$ ,  $G(u, v)$  que son diferenciables en esa vecindad. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2. \end{aligned}$$

En lo que resta de este texto omitiremos el subíndice  $p$  en el producto interno, salvo cuando haya riesgo de confusión.

Otra estructura geométrica importante es la *segunda forma fundamental* de  $S$ . Para definir este objeto, consideremos  $V \subset S$  abierto y un mapa diferenciable  $N : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}^3$  que asocia a cada  $q \in V$  un vector normal unitario en  $q$ . El mapa  $N$  es un *campo diferenciable de vectores normales unitarios en  $V$* . Decimos que una superficie regular es *orientable* si admite un campo diferenciable de vectores normales unitarios definido en toda la superficie; un campo  $N$  con tales características es una *orientación* de  $S$ . Observemos que, una vez escogida una orientación  $N$ , el mapa  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  toma sus valores en la esfera unitaria  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Al mapa  $N : S \rightarrow S^2$  se le conoce como el *mapa*



de Gauss de  $S$ . Es posible probar (cf. [dC], p. 140), que la diferencial  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  del mapa de Gauss es un mapa lineal autoadjunto. Definimos ahora la *segunda forma fundamental* de una superficie regular.

**Definición 3.4 (Segunda forma fundamental).** La forma cuadrática  $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle,$$

es la *segunda forma fundamental* de  $S$  en  $p$ .

Procediendo de manera semejante a como lo hicimos con la primera forma fundamental, podemos calcular los coeficientes asociados a la expresión de la segunda forma fundamental en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $T_p S$ . Estos coeficientes, que denotaremos por  $e, f, g$ , pueden calcularse en términos de  $\mathbf{x}$  y de  $N$ , y sus expresiones son:

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle; \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle \\ &= \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle; \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales nos permitirán expresar, en términos de la parametrización de una superficie, varios conceptos geométricos como el área y la curvatura. Ahora que contamos con las definiciones anteriores estamos listos para estudiar la geometría de las superficies con curvatura promedio cero. Comencemos definiendo una *superficie minimal* en términos de la caracterización que obtuvimos de manera intuitiva en la sección anterior.

**Definición 3.5 (Superficie minimal).** Una superficie parametrizada regular es *minimal* si su curvatura promedio se anula en todas partes. Una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  es *minimal* si cada una de sus parametrizaciones es minimal.

Para ver por qué usamos el adjetivo *minimal* para referirnos a estas superficies, introducimos la noción de *variación*.

Consideremos una superficie regular parametrizada  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y escojamos un dominio acotado  $D \subset U$  y una función diferenciable  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\bar{D}$  es la unión del dominio  $D$  con su frontera  $\partial D$ . La *variación normal* de  $\mathbf{x}(\bar{D})$ , determinada por  $h$ , es el mapa dado por

$$\varphi : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{aligned}\varphi(u, v, t) &= \mathbf{x}(u, v) + th(u, v)N(u, v), \\ (u, v) &\in \overline{D}, t \in (-\varepsilon, \varepsilon).\end{aligned}$$

Intuitivamente, esto corresponde a sumar un múltiplo del vector normal  $N(u, v)$  al punto  $\mathbf{x}(u, v)$ , obteniendo así una nueva superficie parametrizada.

Fijemos  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Observemos que el mapa  $\mathbf{x}^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por  $\mathbf{x}^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$  es una superficie parametrizada con

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial u} &= \mathbf{x}_u + thN_u + th_uN, \\ \frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial v} &= \mathbf{x}_v + thN_v + th_vN.\end{aligned}$$

Entonces, si denotamos por  $E^t, F^t, G^t$  a los coeficientes de la primera forma fundamental de  $\mathbf{x}^t$ , efectuando los cálculos necesarios, obtenemos que

$$\begin{aligned}E^t &= E + th(\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle + \langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_u \rangle + t^2h_uh_u, \\ F^t &= F + th(\langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_v \rangle + t^2h_uh_v, \\ G^t &= G + th(\langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle) + t^2h^2\langle N_v, N_v \rangle + t^2h_vh_v.\end{aligned}$$

Usando el hecho que

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle &= -e, \\ \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle &= -2f, \\ \langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle &= -g,\end{aligned}$$

donde  $e, f, g$  son los coeficientes de la segunda forma fundamental de  $\mathbf{x}$ , y que podemos expresar (cf. [dC], p.156) la curvatura promedio  $H$  como

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}E^tG^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R,\end{aligned}$$

donde  $\lim_{t \rightarrow 0}(R/t) = 0$ .

Entonces, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño,  $\mathbf{x}^t$  es una superficie parametrizada. Aún más, el área  $A(t)$  de  $\mathbf{x}^t(\bar{D})$  es

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} dudv \\ &= \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}\sqrt{EG - F^2}} dudv, \end{aligned}$$

donde  $\bar{R} = R/(EG - F^2)$ . Por lo tanto, si  $\varepsilon$  es pequeño,  $A$  es una función diferenciable y su derivada en  $t = 0$  es

$$A'(0) = - \int_{\bar{D}} 2hH\sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (1)$$

La siguiente proposición justifica el uso de la palabra *minimal* en relación a superficies con curvatura promedio  $H \equiv 0$ .

**Proposición 3.6.** *Sea  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie regular parametrizada y  $D \subset U$  un dominio acotado en  $U$ . Entonces  $\mathbf{x}$  es minimal si y sólo si  $A'(0) = 0$  para todos los conjuntos de la forma de  $D$  y todas las variaciones normales de  $\mathbf{x}(\bar{D})$ .*

*Demostración.* Si  $\mathbf{x}$  es minimal,  $H \equiv 0$  y la condición se satisface claramente. Supongamos ahora que la condición se satisface y que  $H(q) \neq 0$  para algún punto  $q \in D$ . Escojamos  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(q) = H(q)$  y  $h$  es idénticamente cero fuera de una pequeña vecindad de  $q$ . Entonces  $A'(0) < 0$  para la variación determinada por esta  $h$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

Por lo tanto, cualquier región acotada  $\mathbf{x}(\bar{D})$  de una superficie minimal  $\mathbf{x}$  es un punto crítico para la función de área de cualquier variación normal de  $\mathbf{x}(\bar{D})$ . Este punto crítico puede o no ser un mínimo, lo cual hace que el uso de la palabra *minimal* parezca algo inapropiado. Es, sin embargo, una terminología que ha sido respetada a lo largo de la historia, y que fue introducida por Lagrange en 1760, quien usó primera vez el término *superficie minimal*.

Es pertinente ahora hacer algunos comentarios sobre la relación entre la definición matemática de una superficie minimal y las películas de jabón que la motivaron. Observemos en primer lugar que, de acuerdo a la definición dada, no todas las películas de jabón son superficies minimales, pues hemos supuesto que las superficies minimales son superficies regulares. Sin embargo, podemos formar superficies de jabón con singularidades a lo largo de líneas. Tal sería el caso si usáramos

como marco de alambre un cubo o un tetraedro, que tienen singularidades en las aristas (figura 1). Las singularidades a lo largo de líneas también pueden presentarse aunque el marco de alambre no tenga singularidades. Por ejemplo, si el marco consiste de dos aros paralelos, una de las superficies que se pueden formar tiene como singularidad un círculo.

Para obtener otras propiedades de las superficies minimales, será conveniente introducir, para cualquier superficie regular parametrizada, el *vector de curvatura promedio*, definido por  $\mathbf{H} = HN$ . El significado geométrico de la dirección de  $\mathbf{H}$  puede ser obtenido de la ecuación (1). Escogiendo  $h = H$  tenemos que, para esta variación en particular,

$$A'(0) = -2 \int_{\bar{D}} \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \sqrt{EG - F^2} dudv < 0.$$

Esto significa que, si deformamos  $\mathbf{x}(\bar{D})$  en la dirección del vector  $\mathbf{H}$ , el área inicialmente decrece.

Podemos interpretar el vector de curvatura de otra manera, que estudiaremos ahora y que tiene implicaciones importantes para la teoría de superficies minimales. Para esto nos será de utilidad la siguiente definición.

**Definición 3.7 (Superficie isothermal).** Decimos que una superficie regular parametrizada  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  es *isothermal* si  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$  y  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ ; esto es,  $E = G$  y  $F = 0$ .

**Proposición 3.8.** *Sea  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  una superficie regular parametrizada y supongamos que  $\mathbf{x}$  es isothermal. Entonces*

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H},$$

donde  $\lambda^2 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$ .

*Demostración.* Como  $\mathbf{x}$  es isothermal,  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$  y  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ . Derivando, obtenemos que

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle.$$

Entonces

$$\langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = 0.$$

De manera similar,

$$\langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = 0.$$

Se sigue entonces que  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}$  es paralelo a  $N$ . Puesto que  $\mathbf{x}$  es isotermal,

$$H = \frac{1}{2} \frac{g + e}{\lambda^2}.$$

Luego,

$$2\lambda^2 H = g + e = \langle N, \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} \rangle;$$

por lo tanto,

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H}.$$

□

Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ . El *laplaciano*  $\Delta f$  de una función diferenciable  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  está definido por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \quad (u, v) \in U.$$

Decimos que  $f$  es *armónica* en  $U$  si  $\Delta f = 0$ . A partir de la Proposición 3.8 obtenemos el siguiente

**Corolario 3.9.** *Sea  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  una superficie parametrizada y supongamos que  $\mathbf{x}$  es isotermal. Entonces  $\mathbf{x}$  es minimal si y sólo si sus funciones coordenadas  $x, y, z$  son armónicas.*

Finalizaremos esta sección estableciendo una relación bastante útil entre superficies minimales y funciones analíticas de una variable compleja. Sea  $\mathbb{C}$  el plano complejo e identifiquemos  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  al hacer  $\zeta = u + iv$ ,  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ . Recordemos que una función  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es *analítica* (u *holomorfa*) si, al escribir

$$f(\zeta) = f_1(u, v) + if_2(u, v),$$

las funciones reales  $f_1$  y  $f_2$  tienen derivadas parciales continuas de primer orden que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}.$$

Ahora, sea  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizada regular y definamos las funciones complejas  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  por

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \varphi_2(\zeta) = \frac{\partial y}{\partial u} - i \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \varphi_3(\zeta) = \frac{\partial z}{\partial u} - i \frac{\partial z}{\partial v},$$

donde  $x, y$  y  $z$  son las funciones componentes de  $\mathbf{x}$ . La última proposición de esta sección relaciona las superficies minimales con la analiticidad de las funciones  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ .

**Proposición 3.10.** *La superficie  $\mathbf{x}$  es isotermal si y sólo si  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$ . Si se satisface esta última condición,  $\mathbf{x}$  es minimal si sólo si  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  y  $\varphi_3$  son funciones analíticas.*

*Demostración.* Mediante un sencillo cálculo, obtenemos que

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = E - G + 2iF,$$

de lo cual se sigue la primera parte de la proposición. Por otra parte,  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$  si y sólo si

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= -\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right) &= -\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right) &= -\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right), \end{aligned}$$

lo cual nos da la mitad de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ . Como la otra mitad se satisface de manera inmediata, concluimos que  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$  si y sólo si  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  y  $\varphi_3$  son analíticas.  $\square$

## 4. Un par de ejemplos

### La superficie minimal de Enneper.

La superficie de Enneper es la superficie parametrizada

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right), (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Es fácil ver que esta superficie es minimal. Observemos que, al cambiar  $(u, v)$  por  $(-v, u)$  cambiamos, en la superficie,  $(x, y, z)$  por  $(-y, x, -z)$ . Entonces, si rotamos la superficie un ángulo de  $\pi/2$  alrededor del eje  $z$  y después aplicamos una simetría en el plano  $xy$ , la superficie permanece invariante.

Una característica interesante de la superficie de Enneper es que se interseca a sí misma. Para ver esto, hagamos el cambio de coordenadas  $u = \rho \cos \theta$ ,  $v = \rho \sin \theta$  y escribamos

$$\mathbf{x}(\rho, \theta) = \left( \rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} \cos 3\theta, \rho \sin \theta + \frac{\rho^3}{3} \sin 3\theta, \rho^2 \cos 2\theta \right).$$

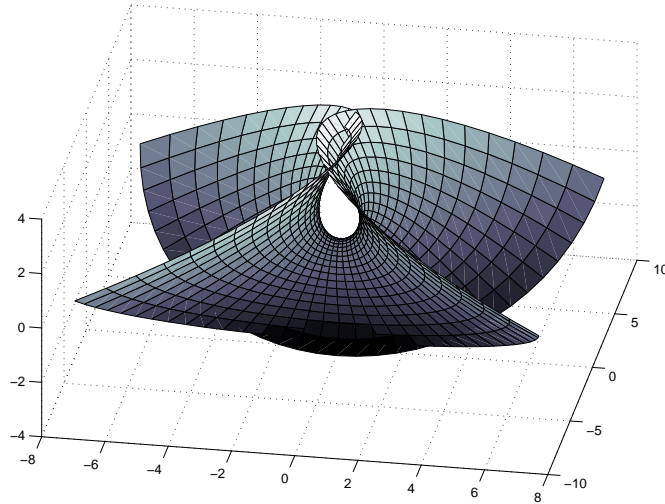


Figura 2. Superficie minimal de Enneper.

Entonces, si  $\mathbf{x}(\rho_1, \theta_1) = \mathbf{x}(\rho_2, \theta_2)$ , efectuando algunos cálculos, obtenemos que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho_1^2 + \frac{\rho_1^6}{9} - \cos 4\pi \frac{2\rho_1^4}{3} \\ &= \left(\rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}(\rho_1^2 \cos 2\theta_1)^2 \\ &= \left(\rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}(\rho_2^2 \cos 2\theta_2)^2. \end{aligned}$$

Luego, como  $\rho_1^2 \cos 2\theta_1 = \rho_2^2 \cos 2\theta_2$ , obtenemos

$$\rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3} = \rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3},$$

lo cual implica que  $\rho_1 = \rho_2$ . Por lo tanto,  $\cos 2\theta_1 = \cos 2\theta_2$ .

Si, por ejemplo,  $\rho_1 = \rho_2$  y  $\theta_1 = 2\pi - \theta_2$ , a partir de

$$y(\rho_1, \theta_1) = y(\rho_2, \theta_2)$$

obtenemos que  $y = -y$ . Por lo tanto,  $y = 0$ ; esto es, los puntos  $(\rho_1, \theta_1)$  y  $(\rho_2, \theta_2)$  pertenecen a la curva  $\sin \theta + (\rho^2/3)\sin 3\theta = 0$ . Claramente, para cada punto  $(\rho, \theta)$  que pertenece a esta curva, el punto  $(\rho, 2\pi - \theta)$  también pertenece a ésta, y

$$x(\rho, \theta) = x(\rho, 2\pi - \theta), \quad z(\rho, \theta) = z(\rho, 2\pi - \theta).$$

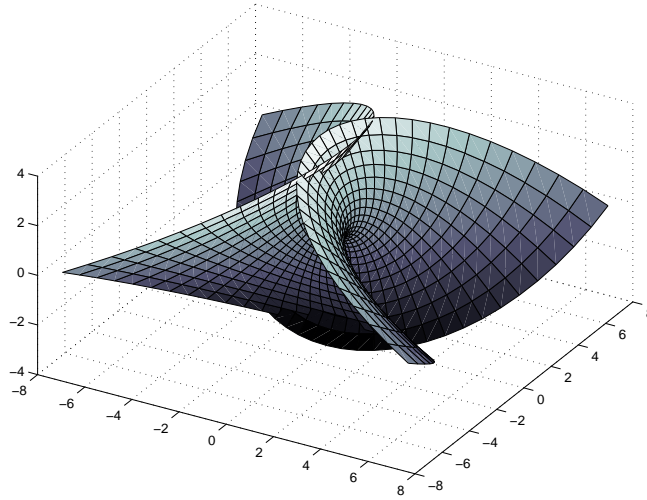


Figura 3. Superficie minimal de Enneper.

Entonces, la intersección de la superficie con el plano  $y = 0$  es una curva a lo largo de la cual la superficie se interseca a sí misma.

Podemos ver, de manera similar, que la intersección de la superficie con el plano  $x = 0$  es también una curva de auto-intersección (esto corresponde al caso  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $\theta_1 = \pi - \theta_2$ ). Es posible demostrar que éstas son las únicas auto-intersecciones de la superficie de Enneper.

### La superficie minimal de Scherk.

Esta superficie está dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( \arg \frac{\zeta + i}{\zeta - i}, \arg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}, \log \left| \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right| \right),$$

$$\zeta \neq \pm 1, \zeta \neq \pm i,$$

donde  $\zeta = u + iv$ , y  $\arg \zeta$  es el ángulo entre el eje real y  $\zeta$ .

Haciendo los cálculos pertinentes, obtenemos que

$$\arg \frac{\zeta + i}{\zeta - i} = \tan^{-1} \frac{2u}{u^2 + v^2 - 1},$$

$$\arg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} = \tan^{-1} \frac{-2v}{u^2 + v^2 - 1},$$

$$\log \left| \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right| = \frac{1}{2} \log \frac{(u^2 - v^2 + 1)^2 + 4u^2v^2}{(u^2 - v^2 - 1)^2 + 4u^2v^2};$$



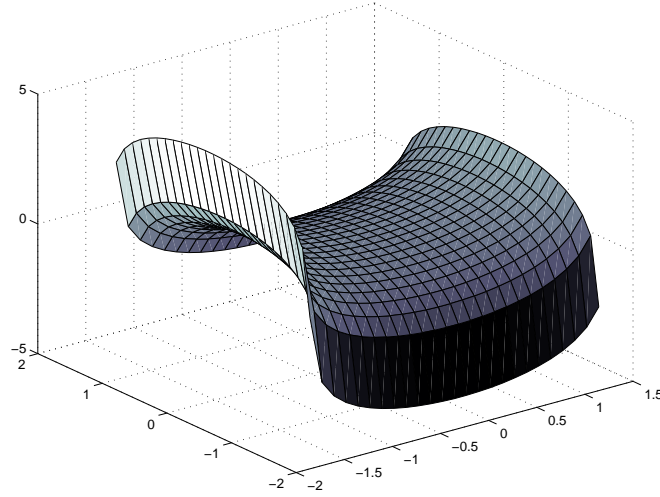


Figura 4. Superficie minimal de Scherk.

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{2}{1 + \zeta^2}, \\ \varphi_2 &= -\frac{2i}{1 - \zeta^2}, \\ \varphi_3 &= \frac{4\zeta}{1 - \zeta^2}.\end{aligned}$$

Como  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$  y  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  son analíticas,  $\mathbf{x}$  es una parametrización isothermal de una superficie minimal.

Más ejemplos, junto con varias gráficas de superficies minimales, pueden encontrarse en [Gr]. [Os] y [La] ofrecen una exposición muy completa de la teoría de superficies minimales. El lector interesado en las matemáticas de las películas de jabón o del Problema de Plateau puede consultar [Op] o [Al].

## Agradecimientos

Deseo agradecer las sugerencias del árbitro, los comentarios de Adrián Pérez Galván sobre la definición física de la presión, y a Gonzalo Contreras por haberme sugerido escribir este texto.

## Referencias

- [Al] Frederick J. Almgren, Jr. *Plateau's Problem: An Invitation to Varifold Geometry*, Revised Edition, Amer. Math. Soc. (2001).
- [dC] Manfredo P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, (1976).
- [Do1] J. Douglas, *Solution of the problem of Plateau*, Trans. Amer. Math. Soc. **33** (1931), 263–321.
- [Do2] J. Douglas, *Minimal surfaces of higher topological structure*, Ann. Math. (2) **40** (1939), 205–298.
- [FT] A. T. Fomenko, A. A. Tuzhilin, *Elements of the Geometry and Topology of Minimal Surfaces in Three-Dimensional Space*, Amer. Math. Soc., (1991).
- [Gr] Alfred Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, 2nd ed., CRC Press, (1998).
- [La] H. Blaine Lawson, *Lectures on minimal submanifolds - Volume 1*, IMPA. (1970).
- [Op] John Oprea, *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*, Amer. Math. Soc. (2000).
- [Os] Robert Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover Publications, (1969).
- [Ra] T. Radó, *The problem of the least area and the problem of Plateau*, Math. Z., **32** (1930), 763–796.