

Lo visual y lo deductivo en las matemáticas

Carlos Torres Alcaraz

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias, UNAM

cta@lya.ciencias.unam.mx

Introducción

En 1995 tuve la ocasión de publicar, en colaboración con Jaime Óscar Falcón, un ensayo cuyo tema central era la necesidad de la demostración en matemáticas¹. A fin de evidenciar este hecho decidimos acudir a un hito conceptual en la historia de las matemáticas: al descubrimiento de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Para ello, recorrimos el mismo camino que, al parecer, siguieron los pitagóricos hasta alcanzar el punto en que la evidencia visual no tuvo ningún poder, no pudo producir nada. El caso no se eligió al azar: se trata de la primera demostración matemática en el sentido pleno de la palabra. Paralelamente, exploremos el recurso a la evidencia sensible como fuente del conocimiento en matemáticas. Tras fijar límites a lo que se puede lograr por este camino, y asegurar con ello la necesidad de la demostración, el ensayo concluye con un análisis del lugar que ocupan los principios lógicos de no contradicción y del tercero excluido en la aceptación de la verdad de aquello que se demuestra. El propósito de este trabajo es extender, en una de sus direcciones, la tarea iniciada en aquella ocasión. En particular, busca valorar el papel de la evidencia sensible en la construcción del conocimiento matemático, examinar el carácter de las pruebas visuales y explorar los nexos, un tanto problemáticos, entre la tendencia visual y la tendencia deductiva en la matemática. Dada la relevancia de las ideas contenidas en el trabajo con Falcón, en la primera parte de este ensayo recapitulamos algunas de ellas.

¹El título del ensayo es “To Show and to Prove” (Mostrar y demostrar). Véase (Falcón y Torres, 1995).

Pruebas visuales

En cierta ocasión Juan José Rivaud presentó el siguiente mosaico al referirse al origen de la demostración pitagórica del teorema de la suma de los ángulos de un triángulo. Una mirada atenta a la figura será suficiente para descubrir un interesante patrón geométrico:

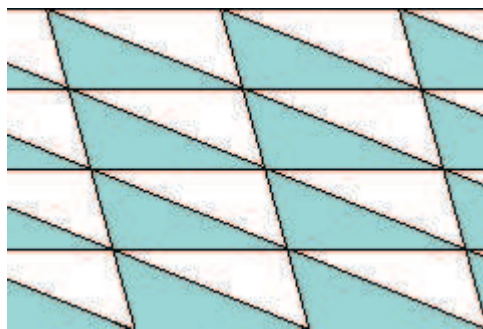


Figura 1.

El mosaico se compone de múltiples copias de un mismo triángulo. En cada vértice, cada ángulo del triángulo concurre dos veces, una como parte del triángulo de color y otra como parte del triángulo en blanco. Si denotamos los ángulos con letras, el teorema de la suma de los ángulos se hace aún más evidente:

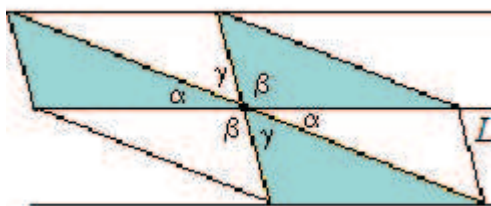


Figura 2.

Tenemos: $2(\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ$. Por tanto, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Lo sorprendente, como lo advierte Rivaud, es que la demostración atribuida a los pitagóricos resulta de eliminar en la figura anterior algunos elementos innecesarios²:

²Véase (Heat, 1963, pp. 93-94). La idea es que la demostración tiene como base la observación directa de figuras, aunque en ella sólo se retiene lo esencial, quedando con ello oculto su origen. La demostración pitagórica pone un mayor énfasis en la argumentación lógica.



Figura 3.

Lo anterior proyecta alguna luz sobre la naturaleza del conocimiento matemático. Lo que tenemos en la Figura 1 no es en sí una configuración geométrica. Un mosaico es un mosaico, no una proposición ni la prueba de una proposición. Para convertir el mosaico (o lo que hay en él) en un objeto matemático se requiere de la participación activa del observador (o si se quiere, de la mente). Es él quien lo convierte en una configuración geométrica; es él quien advierte las relaciones existentes entre los distintos elementos de la configuración; es él quien aplica las nociones de *punto*, *línea*, *ángulo*, *triángulo*, *paralelismo*, etc. a lo que le es dado en la intuición. La prueba visual reclama además ciertos experimentos mentales, como los requeridos en nuestro ejemplo para confirmar que se trata de múltiples copias de un mismo triángulo. Es entonces que la figura adquiere el carácter de una proposición.

Es indiscutible que la evidencia intuitiva no es una recepción pasiva de datos. Es más bien una elaboración mental, un modo activo de mirar hacia las figuras. Es un hecho que los atributos aprehendidos a través de la evidencia intuitiva los consideramos como residentes en el objeto. Por ejemplo, un enunciado aritmético como $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$ señala una relación entre objetos, en este caso configuraciones espaciales de puntos, como a continuación se muestra:

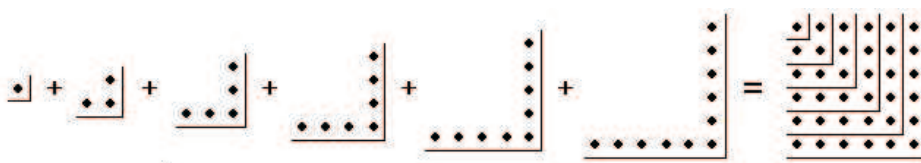


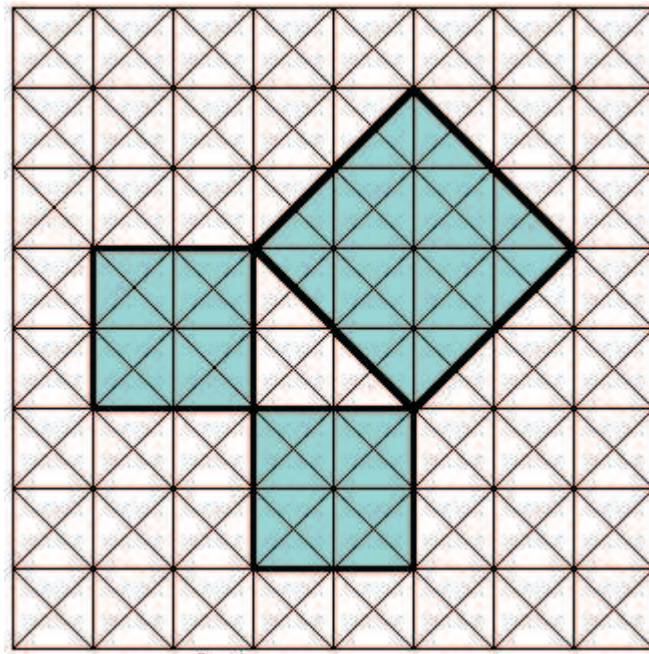
Figura 4.

En este caso tenemos un juego que conducimos mediante experimentos mentales con ciertas configuraciones. En él, la naturaleza específica de los arreglos no importa mucho; lo principal son los patrones que podemos formar. Su fuerza radica en la claridad con que los hechos se manifiestan, en lo que de golpe se muestra. Hay ahí una verdad objetiva, independiente del sujeto. No se trata de una afirmación metafísica, sino

la constatación del modo en que se lleva a cabo la práctica matemática. Cual si fuéramos matemáticos griegos, seguimos extrayendo la verdad de las figuras. Esto es lo que hemos querido significar al decir que “la figura adquiere el carácter de una proposición”. Es tarea de la epistemología de las matemáticas explicar esta noción de evidencia.

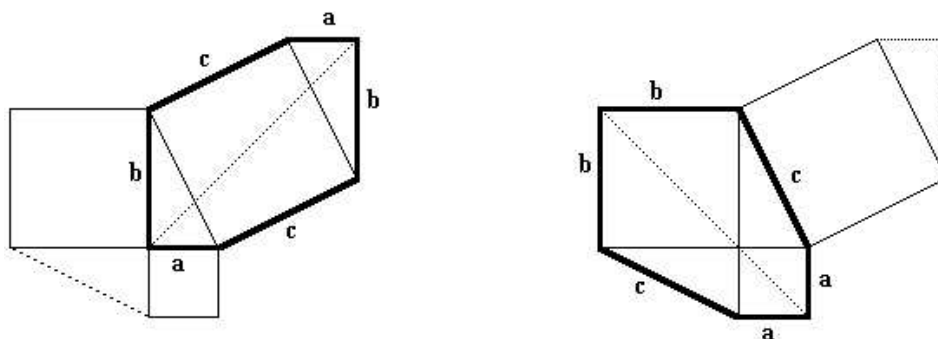
Mostrar y demostrar

Desde siempre, la observación y la evidencia han sido fuentes primarias del conocimiento matemático. En la geometría son múltiples los casos en los que la “verdad” se descubre por medio de la inspección directa de figuras, a través de la evidencia de los sentidos. **Veamos**, por ejemplo, el teorema de Pitágoras (el cual, por cierto, se especula que así fue descubierto):



Mosaico Árabe

La siguiente es una prueba visual del teorema:



Leonardo da Vinci (1452-1519)

Un juego muy frecuente en matemáticas, ya puesta en práctica en el ejemplo de Rivaud, consiste en combinar la escritura con la visualización, es decir, en “escribir” lo que se ve. Para ello se utilizan números y letras en relación a las figuras:

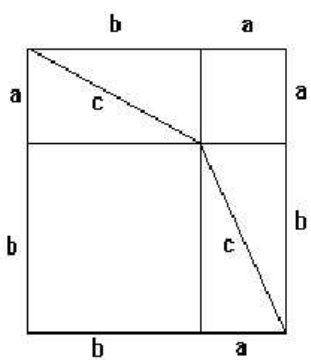


Figura 5

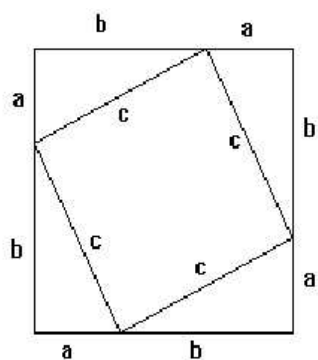


Figura6

Escribamos lo que se muestra en estas figuras:

Figura 5 $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 4\frac{ab}{2}$

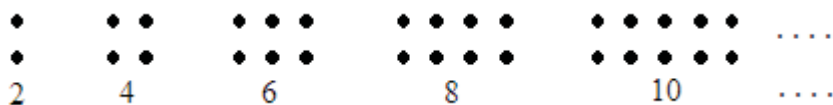
Figura 6 $c^2 = (a+b)^2 - 4\frac{ab}{2}$

La conclusión es simple: $a^2 + b^2 = c^2$. Esta prueba visual del teorema de Pitágoras supone que al mover los triángulos dentro del cuadrado de lado $a + b$ éstos no se alteran, que las propiedades geométricas de los cuerpos rígidos son las mismas en cualquier lugar.

El teorema de Pitágoras expresa una propiedad de los triángulos en términos de números. Dice: *cuando un triángulo es rectángulo, las longitudes de sus lados cumplen la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$* . Esto llevó al descubrimiento de que todas la ternas de números (a, b, c) que cumplen tal relación son los lados de un triángulo rectángulo. Con ello apareció un nuevo problema: el de hallar ternas *pitagóricas*³. Como veremos, este problema se puede resolver con base en ciertos conocimientos que podemos adquirir observando configuraciones que representan números, un artificio muy común entre los griegos.

Un *número figurado* es un número que se puede representar en forma geométrica por medio de un arreglo de puntos. La noción queda expuesta en las siguientes figuras:

Números pares⁴



Números impares

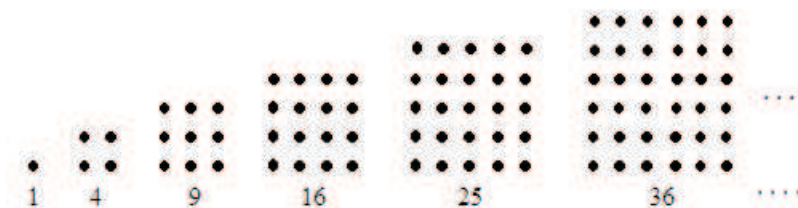


Números triangulares

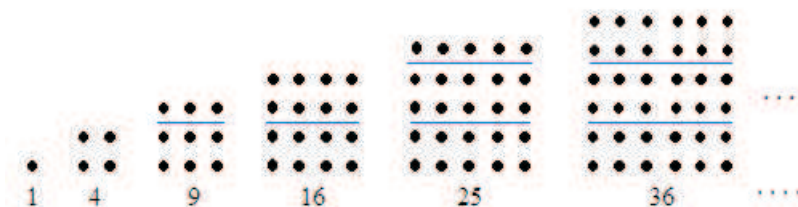


³Una terna de números a, b, c se dice que es pitagórica cuando $a^2 + b^2 = c^2$.

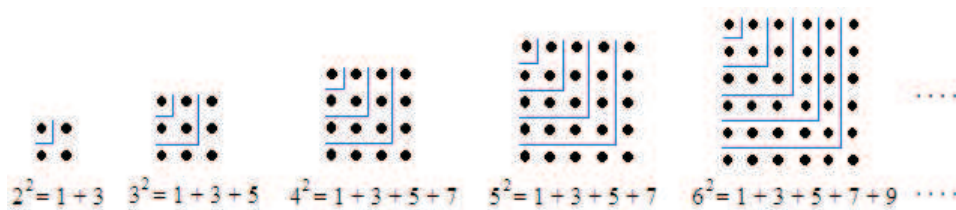
Números cuadrados



Muchas propiedades de los números saltan a la vista en esta representación. **Veamos:**

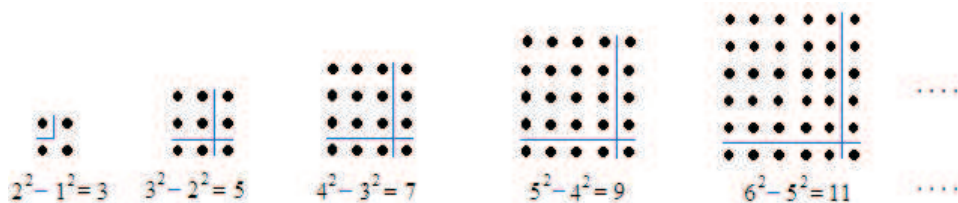


El cuadrado de un número par es par; el de un número impar es impar (los cuadrados son como sus raíces, pares o impares).



Todo número cuadrado es la suma de los números impares menores que el doble de su lado. Los cuadrados crecen como los impares:

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1); (n + 1)^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1).$$



La diferencia entre dos cuadrados consecutivos es un número impar:

$$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1, \quad \text{o bien,} \quad (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

La fórmula anterior enuncia una relación entre los números cuadrados y los nones. dicetodo impar es la diferencia de dos cuadrados consecutivos. Escribamos esta relación en una tabla.

Enteros:	1	2	3	4	5	6	7	8	
Cuadrados:	1	4	9	16	25	36	49	64	
Impares:		3	5	7	9	11	13	15	17

9	10	11	12	13	14	15	16	
81	100	121	144	169	196	225	256	
	19	21	23	25	27	29	31	33

17	18	19	20	21	22	23	24
289	324	361	400	441	484	529	576
	35	37	39	41	43	45	47

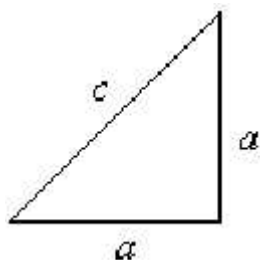
	25	26	27 ...
	625	676	729 ...
49	51	53	...

Cada número impar es la diferencia de los cuadrados arriba de él. Para encontrar dos cuadrados cuya suma es un cuadrado basta con tomar del último renglón de la tabla aquellos nones que también son cuadrados. Así, por simple inspección, podemos hallar números enteros que sean los lados de un triángulo rectángulo. Por ejemplo, como $25 = 5^2$, el triángulo de lados 5, 12, 13 es rectángulo; y como $49 = 7^2$, el triángulo de lados 7, 24, 25 también lo es. La regla es: cada número cuadrado e impar determina, junto con los cuadrados arriba de él, un triángulo rectángulo de lados enteros⁵. El método, claro está, se apoya decididamente en un procedimiento visual.

⁵Conociendo esta regla fue algo natural que los antiguos griegos buscaran una fórmula que permitiera encontrar las ternas de números que determina. La fórmula es: $a = \frac{1}{2}(m^2 - 1)$, $b = m^2$ y $c = \frac{1}{2}(m^2 + 1)$, con m un número impar.

Lo que no existe no se puede mostrar

Un caso particular del problema que nos ocupa es el siguiente: *hallar números enteros que sean los lados de un triángulo rectángulo isósceles* (el que tiene dos lados iguales). Una vez en posesión del teorema de Pitágoras es natural considerar el problema a la luz de las relaciones numéricas que implica. Veamos:



Según el Teorema de Pitágoras, las longitudes de los lados del triángulo deberán satisfacer la relación numérica $a^2 + a^2 = c^2$, o bien,

$$2a^2 = c^2.$$

La relación es muy simple: el cuadrado de c es el doble del cuadrado de a ; a^2 y c^2 son dos cuadrados tales que el segundo es el doble del primero. El problema aritmético que se plantea es igualmente simple: encontrar un número cuadrado que sea el doble de otro cuadrado⁶.

Para acometer esta dificultad podemos recurrir a un procedimiento que ya probé su eficacia: enumerar en tres renglones los números implicados –en este caso los enteros, sus cuadrados y los dobles de sus cuadrados– y buscar en el tercero de ellos aquellos que sean cuadrados.

Enteros:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Cuadrados:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
Impares:	2	8	18	32	50	72	98	128	162	200	242	288	338

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625	6792
392	450	512	578	648	722	800	882	968	1058	1152	1250	1352

27	28	...
729	784	...
1458	1568	...

⁶Nuevamente nos enfrentamos al hecho de que para solucionar una cuestión geométrica debemos resolver un problema aritmético, característica que en los tiempos modernos distingue a la geometría analítica.

Hoy en día sabemos lo inútil de continuar la revisión del tercer renglón en busca de un cuadrado, pues por este camino no llegaremos a una solución. No hay un cuadrado cuyo doble sea otro cuadrado. Pero, ¿cómo se llegó a saber esto? Respuesta: mediante un razonamiento. **Pensemos.** Al buscar en el tercer renglón de la lista un número que sea cuadrado, puede ser que éste jamás aparezca. De ser así, la simple inspección de la tabla no lo dirá: nuestra búsqueda es finita y la enumeración infinita. El procedimiento utilizado sólo es capaz de *mostrar* un número con tales características cuando lo hay, pero es incapaz de dar una respuesta cuando no lo hay.

La solución la podemos alcanzar mediante el siguiente razonamiento. Supongamos que se ha encontrado en el tercer renglón un primer número cuadrado, digamos a^2 . Como este número es el doble de otro cuadrado, se tiene

$$a^2 = 2b^2 .$$

Es obvio que $b^2 < a^2$. Como a^2 es par, a también es par (se trata, como ya hemos visto, de un conocimiento con raíces sensoriales), de modo que para algún número c :

$$a = 2c .$$

En consecuencia

$$2b^2 = 4c^2$$

y

$$b^2 = 2c^2 .$$

Según esto, b^2 es el doble de otro cuadrado y es menor que a^2 . Por tanto, antes de llegar a un primer cuadrado en el tercer renglón la lista, ya deberíamos haber llegado a otro menor que él. En otras palabras: entre la unidad y el “primer” cuadrado que es el doble de otro cuadrado, ¡por fuerza debería haber uno más!. Esto *demuestra* la imposibilidad de que tal número exista: al buscar en la lista un cuadrado que sea el doble de otro cuadrado, nunca lo encontraremos.

Hemos *demostrado* lo siguiente:

No hay un número cuadrado que sea el doble de otro cuadrado.

o bien,

Ningún triángulo rectángulo isósceles tiene lados enteros.

Se trata de un conocimiento cuya verdad no se descubre por medio de la inspección de figuras o a través de la evidencia de los sentidos: *Lo que no existe no se puede mostrar*⁷. Es sólo mediante un argumento

⁷La etimología de las palabras *mostrar* y *demostrar* nos da un indicativo de

que podemos saber de la inexistencia de un número cuadrado que sea el doble de otro cuadrado⁸. Esto justifica la necesidad de la demostración en matemáticas. Sin ella, jamás tendríamos conocimiento de este hecho. Es únicamente por demostración que podemos saber de aquello que no se puede mostrar, de aquello que trasciende lo que se muestra.

Este fue, digamos, el *leit motiv* del trabajo con Falcón. Hay un límite para lo que se puede alcanzar por simple observación de figuras. Históricamente, se trata de uno de los móviles que llevaron a la organización deductiva de la geometría. No obstante, la visualización no dejó de ocupar un importante lugar en la matemática, incluso en su reconstrucción axiomática.

Axiomática e intuición

La geometría euclidiana, en su presentación axiomática, no abandona el razonamiento sobre figuras. Por el contrario, es sobre éstas que se elaboran las demostraciones, haciendo de las figuras una parte esencial del argumento. Un atento examen de los *Elementos* será suficiente para convencerse de lo anterior. Ciertamente, la forma de cada argumento hace ver que éste es aplicable a cualquier figura de la misma especie (en ello radica su universalidad), más no por ello se libera de su presencia. Sin las figuras, la demostración euclidiana se viene abajo. Al mismo tiempo, son las figuras las que dan significado a las proposiciones de los *Elementos* y las hacen comprensibles.

De alguna manera, la demostración euclidiana devuelve a las figuras la verdad que tomó de ellas, pero lo hace otorgándoles un carácter de necesidad lógica ausente en un principio.

Lo anterior señala uno de los vínculos más importantes entre la tendencia visual y la tendencia deductiva en matemáticas. Cuando una teoría se organiza deductivamente (método axiomático), el ideal es que la demostración sea la única condición de ingreso a la misma. No obstante, aun cuando esta condición se satisfaga plenamente, aquello que se demuestra debe conocerse –o, al menos, conjeturarse– de antemano. No debemos olvidar que la axiomática no es en sí un método

esta separación. Mostrar. Del Latín *Monstrare* “indicar, advertir”. Señalar una cosa para que se vea. El prefijo “de” deriva en este caso del latín “Dê”, “apartarse de”; Demostrar: “apartarse de lo que se muestra”.

⁸Esta es, de hecho, la demostración pitagórica de la irracionalidad de raíz de 2. Se trata de la primera demostración por reducción al absurdo conocida en la historia de las matemáticas.

de descubrimiento, sino una forma de presentar los hechos conocidos⁹. Así sucede en la práctica matemática, donde lo que se prueba en una teoría axiomática primero se descubre mediante la observación, la experimentación, la generalización y uno que otro chispazo divino. En esto, las figuras y los diagramas ocupan un lugar de privilegio¹⁰.

Recíprocamente, el uso de las figuras como vía de descubrimiento hace necesaria la demostración a fin de incorporar lo nuevo a la teoría. Una figura sólo muestra una verdad, y poco dice de los vínculos deductivos entre el hecho observado y los otros hechos conocidos. Esto último es tarea de la axiomática.

Saber y entender

Hasta aquí, nuestro análisis se ha restringido al papel de la evidencia intuitiva como fuente de conocimientos. Un segundo aspecto igualmente importante es el modo en que se relaciona con la demostración, donde según el canon de la lógica debería estar ausente.

En un sentido estricto, una demostración debería ser una simple sucesión de pasos lógicos que lleva a la conclusión deseada. No obstante, en la práctica matemática lo que encontramos es una mezcla de argumentos intuitivos y argumentos lógicos. Esto tiene al menos dos causas. Primero, que una demostración estrictamente lógica de una afirmación como, digamos, el teorema fundamental del cálculo, sería prohibitivamente larga; segundo, que desde siempre los matemáticos han querido entender lo que se demuestra, en vez de sólo aceptarlo forzados por la lógica. Saber y entender no son lo mismo. En este sentido, figuras y diagramas suelen ser de gran utilidad. Consideremos, por ejemplo, la tradicional prueba de convergencia de una serie geométrica cuya razón r es menor que 1.

Teorema 1. *Si $0 < r < 1$, entonces $1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r}$.*

⁹En realidad, cuando se trata de probar una proposición en una teoría axiomática, la teoría en sí no sugiere nada. El camino a seguir se elige por fuera. Al respecto, hay demostraciones visuales que sugieren claramente la forma en que el teorema se demuestra lógicamente. Como ejemplo, véase la prueba visual del teorema de Pitágoras que se halla en <http://www.shef.ac.uk/puremath/theorems/pythag.html>, en la cual la demostración dada por Euclides en I.47 se recrea a través de una animación que pone de manifiesto su origen visual.

¹⁰Paul R. Halmos habría dicho en alguna ocasión: “Resolver un problema matemático no es un acto deductivo”. Aquí también, hay un llamado a la intuición y a la imaginación como elementos centrales de la matemática, a la que incluso se le valora como un arte creativo.

Demostración: Sea $S_n = 1 + r + \dots + r^n$.

Tenemos $S_{n+1} = 1 + r + \dots + r^n + r^{n+1} = S_n + r^{n+1}$.

También tenemos $S_{n+1} = 1 + (r + \dots + r^n + r^{n+1}) = 1 + r(1 + \dots + r^n) = 1 + rS_n$.

Por tanto, $S_n + r^{n+1} = 1 + rS_n$.

Agrupando y factorizando resulta que $S_n(1 - r) = 1 - r^{n+1}$.

Despejando S_n :

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Nótese que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$, pues $0 < r < 1$. Por tanto, $S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-r}$, l.c.q.d. \square

Lo anterior es una demostración rigurosa desarrollada en el marco de la teoría de los números reales. La prueba nos obliga a aceptar una infinidad de hechos. Por ejemplo, nos fuerza a admitir que

$$1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \dots + \left(\frac{9}{10}\right)^n + \dots = 1 + \frac{9}{10} + \frac{81}{100} + \frac{729}{1000} + \dots = 10$$

Pese a la firmeza del argumento, hay un aspecto de la prueba que no nos deja satisfechos. Con base en ella sabemos que la serie converge, e incluso sabemos a qué número lo hace. No obstante, la demostración no nos deja una clara comprensión de porqué las cosas son así, pues se basa en una serie de manipulaciones algebraicas poco significativas. Aclara muy poco decir: “Si descomponemos la suma S_{n+1} de tal y tal otra manera, igualamos, agrupamos, factorizamos y despejamos, obtenemos un cociente a partir del cual llegaremos a la igualdad prometida tomando el límite cuando n tiende a infinito”. La posibilidad de expresar una suma de dos maneras distintas es un artificio que nada explica. Conduce al resultado propuesto y nadamás. Volvemos a lo mismo: saber no es lo mismo que entender.

Visualicemos el resultado anterior. A fin de cuentas, se trata de una cuestión de razones y proporciones. Coloquemos en una hilera una sucesión de cuadrados, el primero de lado 1, el segundo de lado r , el tercero de lado r^2 , el cuarto de lado r^3 y así sucesivamente, como en la Figura 7, y tracemos los triángulos en color de la Figura 8.

La verdad del resultado se torna evidente tras una atenta observación de la figura 8. Un hecho salta a la vista: todos los triángulos que aparecen son semejantes entre sí, incluyendo al triángulo ABC .

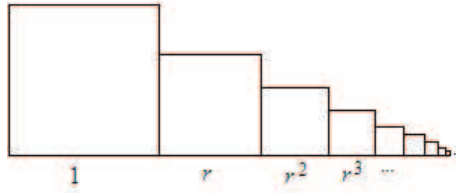


Figura 7

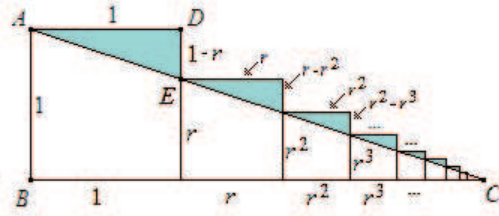


Figura 8

Esto se puede corroborar numéricamente mediante un simple cálculo de las proporciones entre los lados correspondientes. En particular, $\triangle ABC \cong \triangle ADE$. Por tanto, $BC/AD = AB/DE$. Nótese que la base BC del triángulo ABC corresponde a la suma cuyo valor queremos calcular. Nótese también que $BA = AD = 1$ y $DE = 1 - r$, de modo que la unidad es la media geométrica entre la suma y $1 - r$:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1 - r} \quad (\#)$$

La Figura 8 muestra la geometría detrás de la igualdad anterior. En ella, la verdad del teorema se ve casi de inmediato, acercándonos de este modo al ideal de toda prueba visual. Todo se resuelve en la semejanza de triángulos, uno de los cuales tiene como lado la suma buscada. Frente a la árida manipulación algebraica, se trata de un salto hacia la comprensión. El resultado se torna evidente y lo admitimos no sólo porque cuenta con una prueba formal, sino porque entendemos cómo se inserta en el dominio de los hechos matemáticos. Podemos explicarlo como sigue: toda sucesión geométrica de la forma $s(n) = r^n$, con $0 < r < 1$, tienen la propiedad de que la suma de sus términos es la base de un triángulo rectángulo cuya altura es la unidad y cuyos lados son proporcionales a los números $1r$ y 1 , respectivamente. Este hecho tiene como consecuencia la posibilidad de expresar la suma con la igualdad (#). Entender el resultado significa en este caso *enlazarlo con otros dominios y conceptos*¹¹.

¹¹Hay otro sentido no menos importante de lo que significa “entender” un resultado. Jaime Óscar Falcón solía narrar un caso notable. En cierta ocasión, algunos profesores de física del CCH Sur (a nivel de bachillerato, en la ciudad de México) decidieron entrevistar en el pasillo a los estudiantes que salían de un examen sobre la ley de la inercia. El propósito era descubrir qué tanto habían comprendido los contenidos del curso de física. La pregunta era: “Si lanzamos una piedra a lo largo de este corredor (el cual se hallaba perfectamente pulido), ¿ésta se detendrá?”. La mayoría respondió que el objeto se detendría. Al preguntarles por la causa de la de-

Al respecto, diremos que el valor de una demostración se juzga con base en dos criterios: por la luz que proyecta sobre el resultado (es decir, cuán claro lo hace al entendimiento), y por las perspectivas y posibilidades que abre (es decir, por los vínculos que establece con otros hechos o dominios). Esto explica la proliferación de demostraciones para un mismo resultado y el uso frecuente de figuras. En cuanto a la sencillez o brevedad del argumento, ésta sólo es importante en relación a la belleza o elegancia de la demostración y está supeditada a la comprensión del resultado. Una demostración breve pero poco inteligible no tiene mayor atractivo. Como dice Yuri I. Manin¹², es necesario distinguir entre el conocimiento de la verdad matemática y la comprensión de las matemáticas. En esto último, las figuras suelen ser de gran ayuda. El ejemplo que hemos dado es ilustrativo de esta situación.

Ver como los ángeles

Abramos un paréntesis para considerar un punto de vista que proyecta alguna luz sobre lo que intentamos decir. Consideremos la manera en que la filosofía escolástica describe el funcionamiento de la mente humana. Según la escolástica, la actividad mental de todo sujeto cognoscente comprende tres momentos. El primero de ellos es lo que constituye al intelecto (*intellectus*): “Inteligir (*intelligere*), dice Santo Tomás, es la simple captación (i. e., indivisible, no compuesta) de una verdad manifiesta.” El segundo acto es la posibilidad de juzgar o formar juicios (*iudicare*), esto es, de decidir en torno a cosas que pueden ser de una manera u otra¹³. Por último está el razonamiento (*rationari*), es decir, “el avance progresivo hacia una verdad inteligible, yendo de un punto

tención, la respuesta más común fue: “porque *se tiene* que detener”. Un argumento perfectamente aristotélico. Lo sorprendente es que muchos de ellos habían resuelto correctamente los problemas relativos a la ley de la inercia en el examen. Un ejercicio formal, sin ninguna comprensión real del significado de los conceptos involucrados. En la Facultad de Ciencias de la UNAM tuve la oportunidad de constatar algo semejante. Un estudiante, que conocía en detalle la demostración euclidiana del teorema de Pitágoras, no entendía cómo se relaciona este teorema con la fórmula de la distancia en el plano euclidiano, la cual le parecía una arbitrariedad, ni aceptaba la construcción empírica de un triángulo rectángulo con una cuerda en la que se han practicado 13 nudos a intervalos iguales (es decir, no entendía cómo aplicar el teorema).

¹²(Manin, 1990, p. 1670).

¹³En la filosofía moderna se considera al juicio como el acto u operación de la mente que se expresa en la proposición, remarcando con ello el carácter lógico del acto de juzgar.

ya comprendido (*intellecto*) a otro.”¹⁴ Todo ser racional, para conocer, debe emplear estos tres actos de la mente: *inteligir*, *juzgar* y *razonar*¹⁵.

Conforme a la escolástica, el raciocinio es la menor de las facultades que ejerce el alma racional¹⁶. La mayor y más importante es el *intelecto*. Los humanos ejercen esta facultad cuando simplemente “ven” una verdad; en cambio, el raciocinio procede paulatinamente para alcanzar la verdad cuando ésta no es evidente por sí misma. Sólo los ángeles (*intelligentia*) pueden ver, siempre y en todo lugar, todas las verdades. Dice C. S. Lewis:

Disfrutamos del *intelecto* cuando “sólo vemos” una verdad autoevidente [básica]; ejercitamos la *razón* cuando procedemos paso a paso para probar una verdad que no es autoevidente. Una vida cognitiva en la que toda verdad pudiera ser simplemente vista sería la vida de una *intelligentia*, de un ángel. Una vida de una razón absoluta, donde nada sería simplemente “visto” y todo tuviera que ser probado, sería presuntamente imposible; pues nada se puede probar si nada es autoevidente. La vida mental del hombre se consume laboriosamente conectando estos

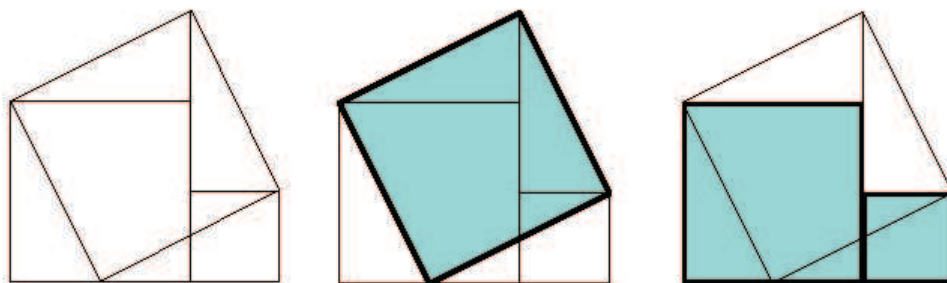
¹⁴Santo Tomás de Aquino. Citado en (Lewis, 1994, p.157). Este tercer acto lo podemos describir como la facultad de pensar ilada o lógicamente, es decir, como la capacidad de manipular en el pensamiento premisas y creencias con apego a los principios de la lógica para ver sus conexiones y alcanzar conclusiones.

¹⁵Veamos un ejemplo. Observo a Juan José Rivaud, que se halla en este recinto. Intelijo que tiene la barba blanca. Esa es una verdad autoevidente. Juzgo entonces que debe ser un hombre mayor, esto es, decido en torno a algo que puede ser de una u otra manera. Por último, infiero que debe ser testarudo, pues creo que todos los hombres mayores lo son. Este “conocimiento” lo he alcanzado sirviéndome de los tres actos de la mente, si bien en este caso podría haber constatado el hecho por otros caminos (de manera directa, por ejemplo). [Nota: este ejemplo lo utilicé en la presentación de este trabajo en las *VI Jornadas de Historia y Filosofía de las Matemáticas*, celebradas en la ciudad de Guanajuato en septiembre de 2003. Desde luego, en la sesión se hallaba Juan José Rivaud. Gracias a su amabilidad, y a la amistad que nos une, Juanjo, como afectuosamente le decimos, me ha autorizado a incluir el ejemplo en esta versión por escrito, el cual no encierra ninguna segunda intención más allá de la de gastar una broma].

¹⁶Esta actitud discriminatoria hacia el raciocinio sigue presente en nuestro tiempo. “El conocimiento, escribe Iltyd Trethowan, es básicamente una cuestión de ver las cosas ... los argumentos, los procesos de razonamiento, son de segunda importancia, y esto no sólo se debe a que sin conocimiento o comprensión directa ningún proceso de pensamiento se podría poner en marcha, sino también porque el punto de esos procesos es originar nuevas aprehensiones” (Citado por Roy Varghese en (Varghese, 2003, p. 5-6)). Esta idea se ve reforzada por el hecho de que las computadoras han podido imitar el *razonamiento* y el *cálculo* humanos, es decir, “el tercer acto de la mente”, mientras que los otros dos actos, *inteligir* y *juzgar*, están lejos de ser imitados de la misma manera a pesar de su importancia.

destellos frecuentes, aunque momentáneos, de *intelligentia* que constituyen el intelecto.¹⁷

Aprehenderlo todo de golpe, mirar como miran los ángeles. Ese sería el ideal de una vida de comprensión matemática. A nosotros, lo más cercano a este ideal, a la *intelligentia*, nos lo dan las figuras. Veamos de nuevo el teorema de Pitágoras:



Teorema de Pitágoras (H. Perigal, 1873)¹⁸

Este grado de comprensión es quizá lo más elevado a que podemos aspirar. Tal como lo advierte Lewis, en la matemática no podemos prescindir de tales actos de aprehensión, pues es mediante la evidencia que innumerables hechos se introducen al espacio de las razones¹⁹.

La evidencia sensible

Veamos la siguiente figura:

¹⁷(Lewis, 1994, p.157). Esta habilidad de la mente para “ver” las verdades que constituyen la realidad, para captar las cosas como son en sí mismas, es lo que Roy Abraham Varghese denomina sentido *sapiensal*. En su opinión, esta capacidad de “ver” las verdades trasciende la esfera de la ciencia (la cual se limita a los datos de los sentidos) y de la lógica (que se limita a “desempaquetar” las conclusiones ya contenidas en las premisas).

¹⁹Pudiera parecer que aquí se repite la antigua creencia de que los objetos matemáticos nos son dados con su estructura. A la matemática le costó más de dos mil años superar este punto de vista. No obstante, en casos como este, donde de figuras se trata, es claro que nuestro sentido de la evidencia asigna a los objetos propiedades específicas, sin importar que esto sea un hecho cultural. A fin de cuentas estamos hablando de la matemática heredada a nosotros por los griegos. A nivel individual, la creencia anterior sólo se supera tras un largo período de adiestramiento matemático y no sin pocos esfuerzos.

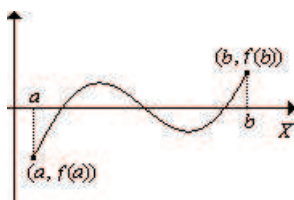


Figura 9. Piense usted en Bolzano

Es evidente que la curva considerada corta al eje X . A este hecho se le conoce como *teorema de Bolzano*. Todo buen profesor de matemáticas comienza la explicación del teorema con una figura como la anterior. La figura en sí no prueba nada, pero sirve como un indicativo de una situación general: Si una función continua cambia de signo en un intervalo, por fuerza pasa por un cero. El dibujo muestra lo que esperamos de las funciones continuas, e impone a cualquier presentación axiomática la tarea de reconstruir tales hechos. Históricamente, la necesidad de dar una prueba rigurosa de este resultado y similares llevó, entre otras cosas, a la definición de número real propuesta por Cantor y Dedekind (axioma de continuidad)²⁰. Tal construcción teórica era necesaria para dar cuenta del comportamiento de los objetos geométricos. En su forma analítica, el teorema se enuncia así:

Teorema de Bolzano. *Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, y si en los extremos del intervalo la función $f(x)$ toma valores de signo opuesto ($f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ para el que se cumple: $f(c) = 0$.*

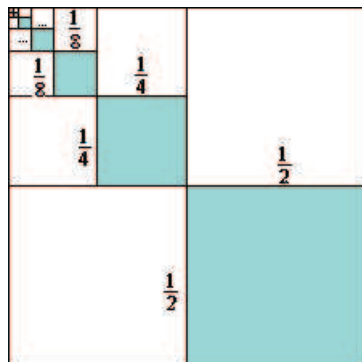
Este ejemplo nos recuerda que las figuras no sólo son una herramienta para la comprensión de las matemáticas, sino una fuente de nociones y conocimientos. ¿Por qué definimos los números reales de tal manera y no de tal otra? Respuesta: porque una definición correcta es aquella que nos permite probar cosas tales como el teorema de Bolzano. No es que la validez del teorema descansa en su prueba formal. Más bien, las cosas son a la inversa: la teoría es aceptable porque prueba teoremas como el de Bolzano.

Es indiscutible que gran parte del conocimiento matemático tiene sus raíces en la evidencia sensible. Aquí, por “evidencia” entendemos la autopresentación de un hecho u objeto para ser simplemente visto²¹. A través de ella es que introducimos tal hecho en el dominio de la

²⁰Véase (Dedekind, 1988, p. 12).

²¹Claro, cuando lo miramos de cierta manera.

razón. Posteriormente, es tarea de ésta última insertarlo en la jerarquía deductiva. Observemos la siguiente figura:



Una atenta mirada mostrará que se trata de una prueba visual de $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{3}$.

El valor de la visualización es innegable en este caso: contribuye directamente al cuerpo de nuestros conocimientos matemáticos. Un hecho tan simple como este reclama para las pruebas visuales un lugar al lado de las pruebas deductivas, y trae a colación el problema de cuáles deberían ser los criterios epistemológicos para considerar algo como una prueba aceptable. Según Peter Borwein Loki Jörgenson, tales criterios deberían incluir al menos los siguientes puntos²²:

1. Confiabilidad. Que los medios subyacentes para alcanzar la prueba sean confiables, y que el resultado no varíe con cada inspección.
2. Consistencia. Que los medios y el fin de la prueba sean consistentes con otros hechos, creencias o pruebas conocidas.
3. Repetibilidad. Que la prueba la puedan confirmar o repetir otros.

Al respecto, cualesquiera que sean los criterios para la aceptación de algo como una prueba, no podemos dejar fuera la noción clásica de demostración. No se trata de substituir una cosa con otra, sino de ampliar los horizontes. No somos ángeles, no podemos ver siempre y en todo lugar todas las verdades. Por el contrario, muchas de ellas las debemos inferir argumentando paso a paso. El raciocinio tiene como función precisamente subsanar tales carencias, sobre todo, como ya lo

²²Véase <http://www.cecm.sfu.ca/loki/Papers/Numbers/Numbers.html>.

hemos visto, en relación a lo que no se puede mostrar. Aún así, de vez en cuando nos es dado descubrir una nueva verdad mirando como miran los ángeles, ampliando con ello nuestros conocimientos.

Metafórica o no, esta observación sintetiza parte de la relación existente entre la matemática visual y la matemática demostrativa. De sus otros vínculos nos ocupamos en lo que sigue.

Lo visual y lo deductivo

En 1945 Jacques Hadamard realizó una investigación entre algunos matemáticos a fin de determinar sus métodos de trabajo. La conclusión a la que llegó fue sorprendente: casi todos ellos, salvo contadas excepciones, dijeron no atacar los problemas en términos verbales o algebraicos, sino con base en una vaga imaginación visual. El mismo Einstein escribió: “Las palabras del lenguaje tal como se escriben o se hablan no parecen desempeñar ningún papel en mi mecanismo de pensamiento. Las entidades físicas que al parecer sirven como elementos de pensamiento son ciertos signos y ciertas imágenes más o menos claras, que pueden reproducirse y combinarse ‘voluntariamente’. [...] Los elementos mencionados son, en mi caso, de tipo visual y algunos de tipo muscular.”²³

Tal parece que muchos matemáticos son o han sido buenos visualizadores (una excepción sería George Polya). El mismo Hadamard opina que el pensamiento matemático es visual, y que las palabras sólo interfieren²⁴. Esta postura parece negar la tesis según la cual la matemática es una ciencia deductiva. Lo podrá ser en su forma final, pero no en su elaboración. De ser así, la estricta deducción lógica sólo intervendría al traducir a palabras los resultados alcanzados, al organizar y ordenar las teorías, al escribir libros de texto. Sólo entonces vendrían las palabras convencionales y las reglas de la lógica tradicional. Esto en modo alguno niega la existencia de fuertes vínculos entre el ‘pensamiento’ visual y el pensamiento lógico. Significa simplemente que desde el punto de vista del descubrimiento, el factor visual o intuitivo es primordial en la matemática.

La oposición entre lo visual y lo deductivo en las matemáticas ya tiene tiempo. En uno de sus extremos tenemos, por ejemplo, a Gauss, quien lamenta no poder representar cierto tipo de ecuaciones median-

²³Albert Einstein, Carta a Jacques Hadamard, citada en http://www.sv.vt.edu/classes/ESM4714/Gen_Prin/vizthink.html.

²⁴Véase (Hadamard, 1996).

te curvas para profundizar en su estudio. Su principal obstáculo es el enorme volumen de cálculos requeridos; su aficción se debe a que no puede conjeturar nada sin el recurso a la visualización²⁵.

En el otro extremo tenemos, por ejemplo, a Lagrange y Laplace, quienes con sus trabajos sobre mecánica hicieron caer en descrédito el uso de figuras e imágenes²⁶. Simplemente, suprimieron las figuras para dar paso al pensamiento analítico. La sola realización de sus obras fue considerada una gloria del análisis. Esta postura se agudizó en el siglo diecinueve con la aparición, entre otras cosas, de curvas continuas como las de Weierstrass, von Koch y Peano que el ojo no puede ni siquiera percibir (o que al hacerlo percibe en realidad otras cosas), y con la renovación del método axiomático. Fue entonces que la manipulación simbólica y la expresión escrita buscaron substituir a las figuras e imágenes.

Esta actitud antivisual sigue vigente en nuestros días. Autores como Bourbaki²⁷ privilegian los aspectos estructurales de la matemática en

²⁵Hoy en día tomaría segundos generar con una computadora el tipo de dibujos que Gauss necesitaba. Las nuevas tecnologías han aumentado considerablemente nuestra capacidad de visualización en matemáticas. Las gráficas por computadora permiten no sólo mejorar el detalle en las representaciones visuales, sino crear animaciones y programas interactivos cuyo impacto en la investigación y la enseñanza ya se empieza a sentir. Estamos en una época en la que lo visual representa un desafío a la primacía de la palabra. Quizá en la matemática esta tendencia no podrá ir más allá de donde se encuentra, pero en lo social podríamos vernos avasallados por ella.

²⁶Lagrange publicó su *Mecánica analítica* en 1788. El tratado resume el trabajo realizado en el terreno de la mecánica desde la época de Newton, transformándolo en una rama del análisis matemático. En el prefacio advierte: “No encontraremos figuras en este trabajo. el método que expongo no requiere construcciones, ni argumentos geométricos o mecánicos, sino únicamente operaciones algebraicas sometidas a un tratamiento regular y uniforme.” En cuanto a Laplace, en su *Mecánica celeste* (publicada en cinco volúmenes entre 1799 y 1825) lleva a cabo una discusión analítica del sistema solar. A decir de los especialistas, el texto no es de fácil lectura. Biot, quien lo asistió en la revisión del trabajo, dice que Laplace mismo era a menudo incapaz de recuperar los detalles en la cadena de razonamientos.

²⁷*Nicolas Bourbaki* es el seudónimo bajo el cual un grupo de matemáticos, principalmente franceses, han escrito una serie de libros exponiendo el avance de las matemáticas en el siglo veinte. La serie comenzó en 1935. Su propósito es fundamentar la matemática en la teoría de conjuntos con base en un rigor extremo, para lo cual incluso han inventado nuevos términos y conceptos. El grupo ha producido más de 30 volúmenes, muchos de ellos bajo el título general de *Éléments de Mathématique*.

Para una lista de sus obras véase:

<http://www.its.caltech.edu/ljpk/bourbaki.html>.

detrimento de la comprensión intuitiva. Uno de los problemas derivados de este punto de vista es la identificación de la matemática con una de sus facetas. Se le caracteriza, por ejemplo, como una ciencia deductiva en la que el estándar de rigor es la demostración lógica y se le identifica con el método axiomático. De la historia de las matemáticas se resaltan sólo los aspectos que refuerzan el punto de vista adoptado. Se habla de los *Elementos* de Euclides sólo en relación al rigor y al método, de la aritmetización del análisis, de la lógica simbólica del siglo diecinueve y de *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead, se alaba el desarrollo de la teoría de conjuntos y su axiomatización, se enaltece la axiomática de Zermelo-Fraenkel como un fundamento para la matemática. De la *Geometría* de Descartes se da una visión parcial: su mérito radica en que permite tratar numéricamente los problemas geométricos, es decir, en que nos da la clave para reducir la geometría al número²⁸. ¿No sería igualmente cierto decir que en su momento el método de las coordenadas significó un gran avance en el otro sentido? ¿Es acaso un desatino decir que su introducción renovó la manera en que los matemáticos piensan las matemáticas, precisamente porque permite *ver* mejor las cosas? ¿No es acaso que el método de las coordenadas permite ver las funciones geoméricamente, tal como Gauss lo procura? ¿Podríamos hablar de los números complejos, de los sistemas dinámicos o de las curvas fractales como lo hacemos sin el recurso a la visualización? En realidad, lo que Descartes hizo fue mostrar que el método de las coordenadas trabaja en ambos sentidos, relacionando la geometría con el álgebra. No es que la primera se reduzca a la segunda; más bien, se trata de un mutuo enriquecimiento.

En vez de identificar la matemática con el método axiomático, resulta más ventajoso precisar su lugar. ¿Es por simple deducción lógica como construimos la verdad matemática? ¿Todo el pensamiento matemático es deductivo? Es fácil responder a estas preguntas con una negativa observando la práctica matemática, donde figuras, diagramas e imágenes mentales de todo tipo intervienen en la conformación de la verdad, aunque en la exposición axiomática de cada teoría se hallen ausentes o relegadas a un segundo plano.

Ciertamente, como apunta Gian-Carlo Rota, la matemática tiene una doble vida. En la primera de ellas trabaja con hechos. Es un hecho que sólo hay cinco sólidos regulares en el espacio euclidiano, es un hecho que los ángulos interiores de un triángulo suman dos rectos, es un hecho que sólo hay 17 tipos de simetrías en el plano. Eso lo sabemos

²⁸Véase si no (Bourbaki, 1972).

con anterioridad a la presentación axiomática. En su segunda vida, la matemática trabaja con pruebas. Una teoría matemática comienza con definiciones y axiomas, y los hechos matemáticos se incorporan a ella mediante pruebas formales. La exposición axiomática es indispensable precisamente porque la verificación visual o experimental no da unidad al conocimiento ni es un criterio de aprobación universal.

Podemos decir entonces que, como en otros dominios, el avance en matemáticas se da en medio de una mezcla tumultuosa de pruebas e intuiciones. Hay un consenso muy amplio en el sentido de que el descubrimiento (o la invención) de nuevos resultados y su demostración formal son procesos distintos. Es más, la posición central del rigor en las pruebas no ha sido una constante en las matemáticas²⁹.

En la actualidad podemos observar cómo estas dos tendencias siguen presentes al interior de la matemática. Por una parte tenemos un claro regreso a la matemática intuitiva; por la otra, tenemos la emergencia de las pruebas por computadora y la demostración automática de teoremas³⁰. No se trata de determinar cuál de ellas será la vencedora. Más bien, debemos esperar que ninguna de ellas lo sea, pues de lo contrario todos seríamos los perdedores³¹.

Conclusión

A comienzos del siglo veinte Henri Poincaré y Bertrand Russell se enfrascaron en una discusión en torno a la naturaleza del pensamiento matemático. Poincaré argumenta que éste tiene un carácter intuitivo, no lógico. Russell por su parte arguye que los avances de la lógica permiten demostrar lo contrario; para ello, bastaría con mostrar que todo teorema conocido de la matemática se puede demostrar a partir de un reducido conjunto de axiomas lógicos. Dejando de lado esta última exigencia – que los axiomas sean lógicos–, nos atrevemos a decir que ambos tienen algo de razón. Simplemente, cada quien contempla un aspecto distinto de las matemáticas (digamos, sólo una de las dos vidas en el sentido de Rota), en vez de entenderlas como una totalidad.

²⁹Al respecto, véase (Grabiner, 1974), un trabajo donde la autora analiza la transformación del estándar de rigor matemático entre los siglos dieciocho y diecinueve.

³⁰Véase (Torres, 2002) y (Kleiner y Movshovitz-Hadar, 1997).

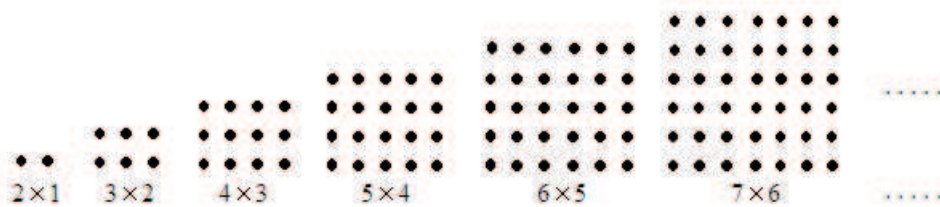
³¹En efecto, somos de la opinión de que ninguna de estas tendencias debería imponerse a la otra. Parafraseando a Kant diremos que una matemática sin figuras e intuiciones es ciega, mientras que una matemática sin pruebas formales no tiene estructura.

Justamente, nuestro propósito en este ensayo ha sido reflexionar en torno al lugar de la visualización en matemáticas e indicar la manera en que ésta se vincula con las pruebas deductivas. Para entender este punto creímos necesario dejar atrás la discusión sobre si la matemática es intuitiva o formal. En ella coexisten ambos aspectos. Más bien, consideramos que una de las tareas de la filosofía de la matemática es describir cómo se articulan en nuestra ciencia lo intuitivo y lo formal. Aclarar tales vínculos ayudará a esclarecer la dialéctica entre lógica e intuición, lenguaje y pensamiento, forma y contenido, verdad y demostrabilidad, factores siempre presentes en su desarrollo. Si con este pequeño ensayo hemos contribuido, aunque sea minúsculamente, en esta dirección, estaremos satisfechos.

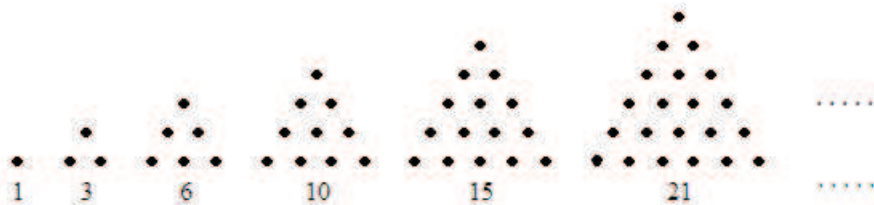
Coda

Para finalizar, obsequiamos al lector cuatro pruebas visuales con un mismo tema: sumas de números. Para empezar, los números oblongos:

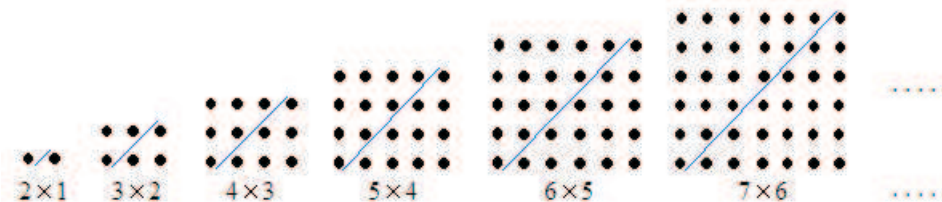
Números oblongos



Recordemos los números triangulares:

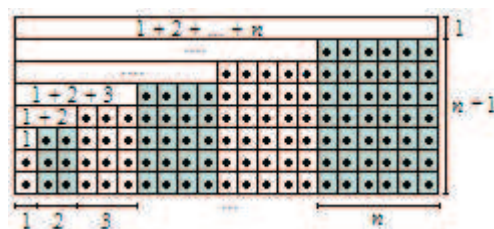


Si T_n denota al n ésimo número triangular, tenemos: $T_n = 1 + 2 + \dots + n$. Por otra parte, es claro que todo número oblongo es el doble de un triangular:



Tenemos: $n(n + 1) = 2T_n$, de donde se sigue que $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, la fórmula de Gauss³².

Observemos la siguiente figura:



Tenemos: Como $1 \cdot 2 = 2T_1$, $2 \cdot 3 = 2T_2$, ..., $n(n + 1) = 2T_n$, resulta que $3(T_1 + T_2 + \dots + T_n) = T_n \cdot (n + 2)$, y

$$T_1 + T_2 + \dots + T_n = \frac{n + 2}{3} \cdot T_n = \frac{n + 2}{3} \cdot \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{6}.$$

Observemos la siguiente figura:



Tenemos: $(T_1 + T_2 + \dots + T_n) + (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = T_n \cdot (n + 1)$. Combinando con el resultado anterior resulta que:

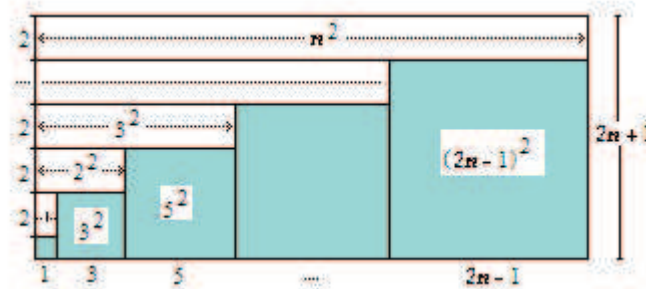
$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)}{2}(n + 1) - \frac{n(n + 1)(n + 2)}{6}$$

³²Esta fórmula merecía haber sido descubierta por los griegos, pero, hasta donde sabemos, estos notables matemáticos ¡no la vieron!, debiendo aguardar cerca de 2500 años para ser descubierta por Gauss, quién en su momento se apoyó en un argumento semi-visual.

y

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Observemos la siguiente figura:



Tenemos:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 + 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = n^2 \cdot (2n+1)$$

Combinando con el resultado anterior concluimos que:

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 &= n^2 \cdot (2n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \\ &= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}. \end{aligned}$$

Estos ejemplos muestran cómo se combinan en la práctica lo visual y los deductivo, es decir, cómo en la matemática ninguno de estos elementos aparece aislado y en toda su pureza.

Referencias bibliográficas

BOURBAKI, NICOLAS,
1972 Elementos de historia de las matemáticas, Alianza Universidad, Madrid.

DEDEKIND, RICHARD,
1888 Essays on the Theory of Numbers, Dover Publications, Nueva York, 1963.

FALCÓN VEGA, JAIME ÓSCAR Y TORRES ALCARAZ, CARLOS,
1995 "To Show and to Prove", Studies in the Mexican Philosophy of Science, Boston Studies in the Philosophy of Science Volume 172, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, pp. 249–264.

- GRABINER, JUDITH,
1974 "Is Mathematical Truth Time-Dependent?", *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Thomas Tymoczko (Editor), Birkhäuser, Boston, 1986.
- HADAMARD, JACQUES,
1996 *The Mathematician's Mind: The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton University Press, Princeton.
- KLEINER, ISRAEL Y MOVSOVICH-HADAR, MITSA,
1997 "Proof: a Many-Splendored Thing", *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 19, No. 3.
- LEWIS, C. S.,
1994 *The Discarded Image: An Introduction to Medieval and Renaissance*, Cambridge University Press, Cambridge.
- MANIN, YURI,
1990 "Mathematics as Metaphor?", *Proceedings of the International Congress of Mathematics, 1990*, pp.1666-1671.
- TORRES, CARLOS,
2004 "Axiomática formal y pruebas de existencia", *Scientiarum*, Año 1, vol. 1, no. 1 pp. 1-23.
- VARGHESE, ROY ABRAHAM, (editor),
2003 *Great Thinkers On Great Questions*, Element Books Ltd, Nueva York.