

Acechando esferas en dimensión 248

César Luis García¹

Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
Río Hondo # 1, 01080 México, D.F.
clgarcia@itam.mx

1. Introducción

En un lugar de la mancha urbana de cuyo nombre no puedo acordarme, alegres comensales, al calor de los tequilas, discutían el arte de ver objetos en las más altas dimensiones. Sin empacho, el matemático juraba que ver objetos que habitan en cualquier dimensión, finita o infinita, era cosa harto natural, mientras que un escéptico colega, físico en su iniciación, cuestionaba con filosófica autoridad si no es que solamente concebimos la presencia de tales entes. ¿Ver o concebir? he ahí el dilema.

¿Qué puede uno ver o concebir de una esfera, por ejemplo, en dimensiones más allá de la tercera? Bueno, ver, quizá no mucho, pero concebir, bastante y he ahí el propósito de esta nota: describiremos una serie de fenómenos que resultan de considerar el volumen o la superficie de las esferas en dimensiones cada vez más grandes. Es curioso que, a pesar de que las ecuaciones cartesianas de las esferas tienen la misma forma en cualquier dimensión (sólo cambia el número de variables) y de que las técnicas para calcular su volumen son esencialmente las mismas que usamos en el plano o en el espacio tridimensional, una segunda mirada a las fórmulas de volumen obtenidas, nos hará descubrir propiedades a toda luz contraintuitivas y sorprendentes de las esferas.

Las primeras ideas de los fenómenos en dimensiones altas que discutiremos pueden trazarse hasta Carl Gauss(1777-1855), aunque el estudio sistemático de estos fenómenos se inicia a principios del siglo XX. Figuras como Paul Lévy(1886-1971) o Robert Deltheil(1890-1872), por citar algunos nombres, ya estudiaban en 1919 la distribución de distancias y volúmenes de las esferas en dimensiones grandes. En la actualidad el estudio de estos fenómenos es toda un área de investigación,

¹Trabajo apoyado por la Asociación Mexicana de Cultura, A.C.

conocida como *fenómenos de concentración de medida* o *fenómenos en dimensiones altas* y está inmersa en la teoría local de los espacios de Banach. Nuestra presentación de algunas ideas de los fenómenos de concentración del volumen en las esferas es relativamente elemental, creemos que será accesible para alumnos que hayan cursado al menos los primeros dos cursos de cálculo de alguna licenciatura. Si el amable lector quiere aventurarse a discusiones más amplias y un poco más técnicas en esta materia, recomendamos las que podrían considerarse las lecturas obligadas e introductorias al tema: [B] y [MS]. Por supuesto en la era de la red, hay muchísima información que uno puede “googlear” sobre fenómenos de concentración: Wikipedia ([W]) es un buen lugar para empezar o directamente en la página de los profesionales de la teoría de fenómenos en dimensiones altas (<http://phd-math.uni-mlv.fr>). Sin más preambulos comenzamos con,

2. Las definiciones

Nuestros espacios ambientes serán los espacios euclidianos n -dimensionales, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$, equipados con la norma euclidiana usual:

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 := \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}.$$

Mientras que los objetos centrales de estudio serán, la *bola unitaria* de \mathbb{R}^n ,

$$B^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 \leq 1\}$$

y, la *esfera unitaria* de \mathbb{R}^n ,

$$S^{n-1} := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 = 1\}.$$

El símbolo S^{n-1} , que denota a la esfera unitaria, tiene exponente $n - 1$ porque éste hace referencia a que, aún cuando la bola unitaria es un objeto en un espacio n -dimensional, la superficie de ésta es un objeto de “dimensión” $n - 1$. Pensemos por ejemplo en el círculo en \mathbb{R}^2 , B^2 , un objeto bidimensional, y su circunferencia, S^1 , un objeto unidimensional.

A lo largo de estas notas, apelaremos a la idea intuitiva que todos tenemos de las nociones de volumen y de superficie. Formalmente cuando calculamos volumen o superficie de un cuerpo n dimensional estamos calculando su medida de Lebesgue, en la dimensión correspondiente.

Asimismo usaremos como términos genéricos *volumen* y *superficie* para los volúmenes y superficies de los sólidos sin importar la dimensión (en \mathbb{R} será longitud, en \mathbb{R}^2 área, etcétera).

3. El volumen de las esferas

Denotaremos por ν_n al volumen de la bola unitaria de \mathbb{R}^n . Así, $\nu_1 = 2$ (longitud), $\nu_2 = \pi$ (área), $\nu_3 = \frac{4}{3}\pi$ (volumen). La primera observación importante es que una vez que sepamos el valor de ν_n , inmediatamente sabremos cuál es el volumen de cualquier bola en \mathbb{R}^n . En efecto, el volumen de una bola no cambia si la trasladamos para que su centro coincida con el origen (0) de \mathbb{R}^n . Por otro lado, cualquier bola de radio r centrada en el origen es el re-escalamiento de la bola unitaria: rB^n , cuyo volumen es,

$$\text{vol}(rB^n) = r^n \text{vol}(B^n) = r^n \nu_n. \quad (3.1)$$

También, del valor de ν_n , podemos obtener el valor de la superficie de la esfera S^{n-1} : pensemos que B^n está dividida en conos con “base” sobre la esfera y vértice en el origen. Si la base del cono es pequeña entonces la altura del cono es casi uno, como en la figura,

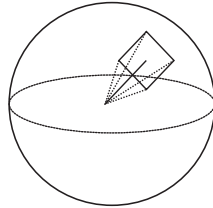


Figura 1: Cono de altura casi uno

El volumen de un cono n -dimensional es,

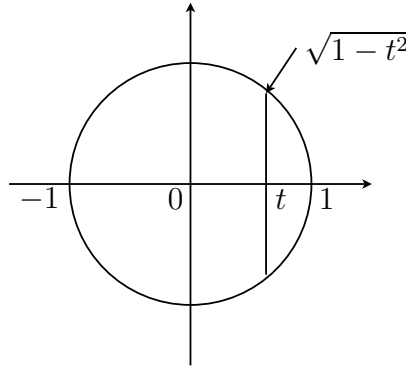
$$\text{vol}(\text{cono}) = \frac{1}{n} (\text{área de la base}) \times \text{altura}.$$

Y en nuestro caso, al sumar los volúmenes de todos los conos en que B^n queda dividida, obtenemos,

$$\text{área}(S^{n-1}) = n\nu_n. \quad (3.2)$$

4. ¿Cuánto vale ν_n ?

Para calcular el volumen de B^n , podemos apelar a nuestras técnicas de cálculo: integramos sobre el intervalo $[-1, 1]$, los volúmenes (áreas) de las secciones transversales de B^n perpendiculares a uno de los ejes: las secciones transversales son bolas $(n-1)$ -dimensionales de radio $\sqrt{1-t^2}$ (si la sección transversal está a t unidades del origen) como en la figura:



De (3.1) sabemos que una bola $(n-1)$ -dimensional de radio $\sqrt{1-t^2}$ tiene volumen $\nu_{n-1}(\sqrt{1-t^2})^{n-1}$, $-1 \leq t \leq 1$. Integramos entonces el volumen de estas secciones transversales de -1 a 1 para obtener ν_n . En símbolos (más sustitución trigonométrica e integración por partes) tenemos que,

$$\begin{aligned} \nu_n &= \int_{-1}^1 \nu_{n-1}(\sqrt{1-t^2})^{n-1} dt = \nu_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta = \\ &= \nu_{n-1} \left(\frac{n-1}{n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2} \theta d\theta \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Armados de paciencia, iteramos la fórmula recursiva (4.1) para obtener el valor de ν_n (notemos que al final solamente tendremos que integrar $\cos \theta$ o $\cos^2 \theta$ y usar los valores de $\nu_1 = 2$ o $\nu_2 = \pi$). Obtenemos así la fórmula,

$$\nu_n = \begin{cases} \frac{2^{(n+1)/2} \pi^{(n-1)/2}}{n(n-2) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1} & \text{si } n \text{ is impar,} \\ \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Con la fórmula para el volumen de B^n a la mano, podemos calcular el volumen de la bola unitaria en cualquier dimensión. La tentación es bárbara, así es que damos, en la siguiente tabla, los volúmenes de las bolas unitarias para las primeras diez dimensiones. El primer hecho inesperado que observamos es el comportamiento en el valor del volumen a partir de la sexta dimensión:

dimension (n)	ν_n (exacto)	ν_n (aprox.)
1	2	2,00000
2	π	3,14159
3	$4\pi/3$	4,11879
4	$\pi^2/2$	4,93480
5	$8\pi^2/15$	5,26379
6	$\pi^3/6$	5,16771
7	$16\pi^3/105$	4,72476
8	$\pi^4/24$	4,05871
9	$32\pi^4/945$	3,29850
10	$\pi^5/120$	2,55016

La conclusión inductiva de la tabla anterior es que el volumen de la bola unitaria **decrece** conforme la dimensión aumenta. Peor aún, para n par, por ejemplo, si escribimos $n = 2k$, entonces $\nu_n = \frac{\pi^k}{k!}$, que converge a 0 cuando k tiende a infinito (por el teorema del sandwich). El radio de la bola es siempre uno, así es que la bola no se aplasta, sin embargo conforme la dimensión crece el volumen desaparece.

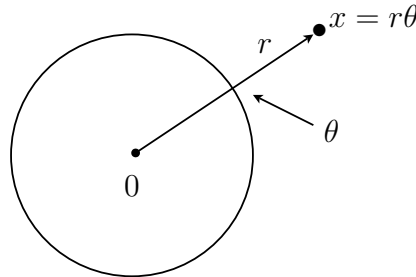
5. Otra manera de calcular ν_n

Aunque la fórmula que encontramos para el volumen de B^n nos permite conocer el valor de ν_n para cualquier n , no es una fórmula fácil de manipular: la presencia en el denominador de la fórmula del producto de los números impares antes de n^2 , en el caso impar, o el factorial en el caso par, son la principal razón: algebraicamente estos productos no son del todo amigables. En esta sección encontraremos otra fórmula para obtener ν_n , que, además de ser más elegante, se puede aproximar por expresiones fáciles de manipular (de hecho se puede hacer lo mismo con los factoriales, como adivinará el lector más adelante, pero bueno).

La idea, nuevamente, es hacer el cálculo del volumen por integración, pero ahora el cambio de variable será a coordenadas esféricas: cada vector x en \mathbb{R}^n está únivocamente determinado por su distancia al origen

²El producto $n(n-2)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$ es conocido como el *factorial doble* aunque le faltan la “mitad” de los factores para ser un factorial.

$r = \|x\|_2$ y una dirección θ , es decir, un punto en la esfera S^{n-1} : $x = r\theta$, como en la figura.



Pero, ¿Qué integramos ahora? Primero observemos que en general, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es “cualquier” función, el cambio de coordenadas cartesianas a esféricas nos da,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\theta) d\theta r^{n-1} dr \\ &= n\nu_n \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\theta) r^{n-1} d\sigma(\theta) dr \end{aligned} \quad (5.1)$$

Donde $d\theta = n\nu_n d\sigma(\theta)$ y $\sigma(\theta)$ es una medida de superficie normalizada en S^{n-1} (recordemos que la superficie de S^{n-1} es igual a $n\nu_n$ por (3.2)).

Tenemos así en (5.1) una expresión en dónde aparece ν_n , cuyo valor queremos determinar. Lo que necesitamos entonces es escoger una “buena” función f para la cual las integrales en (5.1) sean fáciles de calcular. Para evaluar la integral de una función real de varias variables lo deseable es poder calcular la integral con integrales iteradas, es decir, poder aplicar el teorema de Fubini. Una “buena” función es:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

porque, por un lado (el lado izquierdo de (5.1) para ser exactos), el valor de la integral de e^{-x^2} sobre la recta real existe y es fácil de calcular (tal integral vale $\sqrt{\pi}$ y se obtiene esencialmente usando (5.2a) al revés: cambiar del producto de integrales a la integral del producto, con sólo dos variables, más un cambio a coordenadas polares). Por otro lado (ahora el lado derecho de (5.1)), el exponente en la función exponencial f contiene la “ecuación de la esfera” con lo cual cambiamos un problema

de n variables a uno de una variable: el radio. Así, el lado izquierdo de (5.1) queda:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \exp(-x_i^2/2) \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \exp(-x_i^2/2) dx_i = (\sqrt{2\pi})^n. \end{aligned} \quad (5.2a)$$

Mientras que el lado derecho de (5.1) da:

$$\begin{aligned} n\nu_n \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\theta) r^{n-1} d\sigma(\theta) dr &= \nu_n \cdot n \int_0^\infty e^{-r^2/2} r^{n-1} dr \\ &= \nu_n \cdot 2^{n/2} \cdot \frac{n}{2} \int_0^\infty t^{n/2-1} e^{-t} dt \\ &= \nu_n \cdot 2^{n/2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.2b)$$

donde Γ es la función Gama:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Intermedio que ilustra sobre la función Gama: La función Gama vio la luz por primera vez en 1729 en una carta de Leonard Euler (1707-1783) a Christian Goldbach (1690-1764). La notación Γ , se presume, es debida a Adrian-Marie Legendre (1752-1833). Es sin duda una de las funciones que aparece notablemente en diversas áreas de las matemáticas y ha sido y sigue siendo profundamente estudiada³. Algunas propiedades de la función Gama que quizá sean familiares al lector y que se usan para calcular (5.2b) son:

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $\Gamma(1) = 1$ y $\Gamma(n) = (n-1)!$ si $n \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Para un panorama histórico de la función Gama sugerimos al lector consultar [D]. Para propiedades y resultados básicos sobre la función Gama el lector puede consultar en [Ru, Capítulo 8] y en [W].

³Philip Davis en [D] describe así el impacto de esta función en las matemáticas: “It is simple enough for juniors in college to meet but deep enough to have called forth contributions from the finest mathematicians”.

Regresemos a nuestro cálculo de ν_n . De (5.2a) y (5.2b) obtenemos una bella fórmula para ν_n :

$$\nu_n = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \quad (5.3)$$

A pesar de tener una fórmula compacta y atractiva para ν_n , no es a todas luces más amigable que la primera fórmula que obtuvimos en (4.2). Sin embargo gracias a una de las más famosas formulas de aproximación, podemos obtener una expresión para ν_n que sea buena, bonita y barata (barata en el sentido de que será fácil y rápido calcular con ella). La fórmula de aproximación es la conocidísima fórmula de James Stirling(1692-1770):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e}{x}\right)^x \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \Gamma(x) = 1$$

La fórmula de Stirling dice que para valores grandes de x el valor de $\Gamma(x)$ es casi $1/\left(\left(\frac{e}{x}\right)^x \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\right)$. Aunque la fórmula de Stirling es una fórmula asintótica, realmente no hay que ir muy lejos en x para tener una buena aproximación a uno. Para $x = 10$, por ejemplo, la fórmula de Stirling ya da 1,0084 y la aproximación no empeora para valores mayores de x . Para una demostración de la fórmula de Stirling sugerimos al lector consultar [F] (donde los argumentos muestran técnicas adicionales importantes y de hecho ponen la prueba de la fórmula en segundo plano) o bien, ver en [P], donde se ofrece una prueba sencilla y directa.

En nuestro caso queremos usar la aproximación de Stirling para estimar $\Gamma(n/2 + 1)$. Un breve cálculo muestra que:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \approx \sqrt{2\pi} e^{-n/2} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

y por lo tanto

$$\nu_n \approx \left(\sqrt{\frac{2\pi e}{n}}\right)^n \quad (5.4)$$

Así, para valores grandes de n , tenemos una fórmula simple y algebraicamente manejable, que nos da, lo que podemos considerar como el verdadero valor de ν_n .

6. Violando la intuición

Nuestra nueva fórmula (5.4) para el volumen de la bola unitaria redescubre el hecho que observamos con anterioridad: a medida que la dimen-

sión crece, el volumen de la bola unitaria decrece a cero. ¿Qué pasa por ejemplo si queremos tener, en dimensión n , bolas de volumen fijo, digamos uno? Necesitamos entonces un radio r tal que $r^n \nu_n = \text{vol}(rB_2^n) = 1$, lo cual, de acuerdo a (5.4), dice que debemos tener un radio tan grande como:

$$i \quad r \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi e}} \quad !$$

Es decir, en dimensiones grandes, para juntar solamente una mugre unidad de volumen, necesitamos un bolón con radio casi tan grande como \sqrt{n} . Inmediatamente surge la pregunta: si tenemos una bola inmensa con volumen uno ¿Cómo está repartido tan poco volumen en tamaño bolón? Para contestar esta pregunta tratemos de calcular el volumen de algunas secciones transversales de la bola de volumen uno. Después integraremos el volumen de estas secciones a lo largo de algún intervalo para darnos una idea de cómo es la distribución de volumen.

Comencemos por estimar el volumen de una sección transversal, perpendicular a uno de los ejes coordenados y por el origen, de la bola de volumen uno, rB_2^n . Notemos que esta sección transversal es una bola de dimensión $n - 1$ y de radio $r = \nu_n^{-1/n}$.

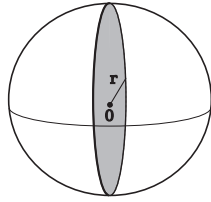


Figura 2: Sección transversal por el origen

El volumen de la sección transversal será entonces:

$$\nu_{n-1} r^{n-1} = \nu_{n-1} \left(\frac{1}{\nu_n} \right)^{(n-1)/n}.$$

Con ayuda de la fórmula maravillosa (5.4) tenemos:

$$\begin{aligned} \nu_{n-1} \left(\frac{1}{\nu_n} \right)^{(n-1)/n} &\approx \left(\sqrt{\frac{2\pi e}{n-1}} \right)^{n-1} \left(\sqrt{\frac{n}{2\pi e}} \right)^{n(n-1)/n} \\ &= \left(\frac{n}{n-1} \right)^{(n-1)/2} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1}} \approx \sqrt{e} \end{aligned}$$

si n es grande.

Calculemos ahora el volumen de una sección transversal de la bola de volumen uno, rB^n , paralela a la sección transversal por el origen y a distancia x de 0. Esta sección transversal es también una bola de dimensión $n - 1$, pero ahora el radio es $\sqrt{r^2 - x^2}$.

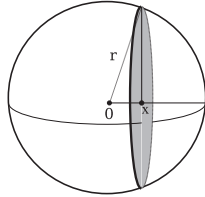


Figura 3: Sección transversal con radio $\sqrt{r^2 - x^2}$

El volumen es:

$$\sqrt{e} \left(\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \right)^{n-1} = \sqrt{e} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right)^{(n-1)/2}$$

pero como $r \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi e}}$, entonces,

$$\begin{aligned} \sqrt{e} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right)^{(n-1)/2} &\approx \sqrt{e} \left(1 - \frac{2\pi e x^2}{n} \right)^{(n-1)/2} \\ &\approx \sqrt{e} e^{-\pi e x^2}, \end{aligned}$$

si n es grande.

Aquí apreciamos ya dos hechos notables, por no decir sorprendentes: el primero es que el volumen de las secciones transversales de la bola de volumen uno *no depende de la dimensión* (la n desaparece por completo en el valor del volumen de las secciones). El segundo hecho notable, es que si consideramos el volumen de las secciones transversales anteriores como función de su distancia al origen, x , obtenemos una distribución Gaussiana (normal) con media cero y varianza $1/(2\pi e)$ (¡que tampoco depende de la dimensión!).

La distribución normal que obtenemos nos dice, en particular, que la mayor parte del volumen de la bola de volumen uno está concentrado en una rebanada (con algún grosor) alrededor de la sección transversal por el origen. Por ejemplo, como,

$$\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{e} e^{-\pi e x^2} dx = 0,96121,$$

tenemos que un poquito más del 96 % del volumen de la bola de volumen uno está en una “rebanada central” de ancho uno. Este es un hecho aún

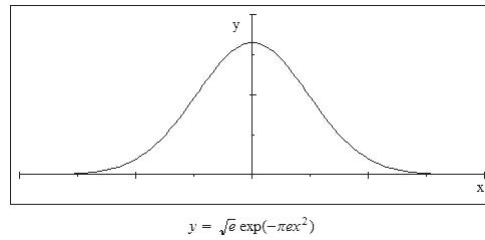


Figura 4: Distribucion del volumen de secciones transversales de una bola de volumen uno

más impresionante si recordamos que el radio de la bola de volumen uno es del orden \sqrt{n} .

En la siguiente figura reproducimos en tres dimensiones distintas y a escala, la rebanada

$$\left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{2} \leq x_2 \leq \frac{1}{2} \right\}$$

donde está concentrado el 96,12 % del volumen de la bola rB^n .

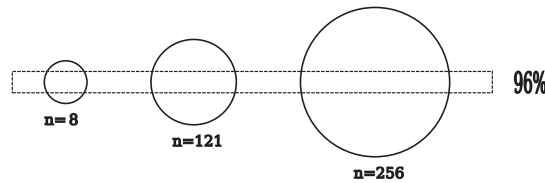


Figura 5: Franja con 96,12 % del volumen total

Basados en la distribución de volumen que observamos, podemos aventurar la siguiente conclusión: como el volumen de rB^n se concentra en rebanadas centrales de la bola, entonces la mayor parte del volumen de la bola deberá estar en la parte central de la bola, pues es ahí donde se cruzan las rebanadas centrales en diferentes direcciones (todo en el centro de la Tierra pues). Sin embargo, fácilmente podemos mostrar que la mayor parte del volumen de la esfera se concentra por otro lado. En efecto, sabemos que una bola n dimensional de radio r tiene volumen $r^n \nu_n$. Una bola de radio un poco más chico, digamos $r - \varepsilon$, tendrá volumen $(r - \varepsilon)^n \nu_n$. Pero entonces la proporción de volumen de la bola que está en el anillo,

$$r - \varepsilon \leq \|x\|_2 \leq r$$

es,

$$\frac{r^n \nu_n - (r - \varepsilon)^n \nu_n}{r^n \nu_n} = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^n$$

lo cual... ¡tiende a 1 cuando n aumenta! Es decir, el volumen se concentra hacia la frontera de la bola. La moraleja entonces es que si queremos comprar naranjas en dimensiones altas, esencialmente pagaremos por la cáscara de la naranjas, pues es ahí donde se concentra la mayor parte de su volumen.

7. Ideas semejantes para otros cuerpos en \mathbb{R}^n

Fenómenos de concentración de volumen como el que observamos en las bolas euclidianas, también aparecen en otros cuerpos convexos⁴ en \mathbb{R}^n . Para algunos cuerpos convexos el fenómeno es relativamente fácil de analizar, para otros cuerpos convexos el estudio de la concentración de volumen puede llevar rápidamente a problemas de investigación abiertos. Por ejemplo, consideremos el cubo n dimensional, con lado de longitud 2 y centrado en el origen: $C_n = [-1, 1] \times \cdots \times [-1, 1]$. El cubo tiene volumen 2^n y sus esquinas están a distancia \sqrt{n} del origen (diremos entonces que el radio de cada esquina del cubo es \sqrt{n}). Se sabe (ver [B]) que si $\theta \in S^{n-1}$ y $r(\theta)$ es el radio del cubo en la dirección θ entonces

$$\int_{S^{n-1}} r(\theta)^n d\theta = \frac{2^n}{\nu_n} \approx \left(\sqrt{\frac{2n}{\pi e}} \right)^n.$$

Esto es, el radio promedio del cubo es $\sqrt{\frac{2n}{\pi e}}$ (un valor muy cercano al radio de las esquinas del cubo). Luego, el volumen del cubo se concentra en las esquinas del mismo y no en el centro de las caras donde el radio es uno y donde uno esperaría encontrar mayor volumen. De hecho si el amable lector es versado en la teoría de probabilidad (la ley débil de los grandes números, en particular) puede demostrar que los cubos n dimensionales se aproximan muy bien por anillos. En efecto, consideremos el anillo

$$A_{n,\delta} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{\sqrt{3}} - \delta \leq \frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} + \delta \right\}.$$

Entonces, la proporción de volumen del anillo en el cubo satisface (ver [R, Capítulo 7], por ejemplo):

$$\frac{1}{2^n} \text{vol}(A_{n,\delta} \cap [-1, 1]^n) \rightarrow 1 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

⁴Un *cuerpo convexo* en \mathbb{R}^n es un conjunto convexo, compacto y con interior no vacío.

Otro cuerpo convexo para el que se conoce la distribución de volumen es el *politopo cruzado*. El politopo es la cápsula convexa de los vectores canónicos de \mathbb{R}^n y sus negativos $\{\pm e_i : i = 1, 2, \dots, n\}$, donde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, con el uno en la entrada i -ésima. Por ejemplo en \mathbb{R}^2 , el politopo es el rombo con vértices: $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$; mientras que en \mathbb{R}^3 , el politopo es el octaedro (la bola unitaria de \mathbb{R}^n con respecto a la *norma del taxista*: $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$).

El volumen del politopo cruzado en \mathbb{R}^n es fácil de calcular, pues en cada octante el politopo es un cono de altura uno y base, la parte del politopo en dimensión $n - 1$ en el correspondiente cuadrante, luego, de forma recursiva se obtiene que:

$$\text{vol}(\text{politopo}) = 2^n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2^n}{n!}.$$

Sin embargo, estudiar la concentración de volumen de este sólido no es para nada fácil. Se sabe que el volumen del politopo cruzado se concentra, a diferencia del cubo, no en sus esquinas sino en la cercanía del centro de sus caras [K] (ver la figura).

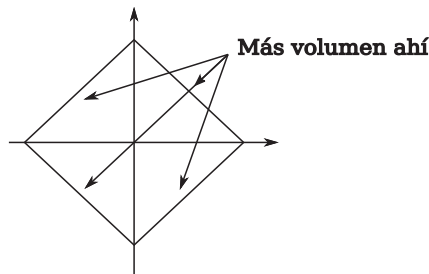


Figura 6: Concentración de volumen para el politopo

8. La estocada final

Consideremos un cuadrado de lado cuatro, centrado en el origen, como en la figura. En cada cuadrante, inscribimos una bola de radio uno, tangente a los lados del cuadrado (la bola de radio uno del primer cuadrante está centrada en $(1, 1)$, por ejemplo). Finalmente construyamos la bola con centro en el origen y que es tangente a cada una de las bolas de los cuadrantes ya construidas.

El radio de la pequeña bola interior es $r_2 = \sqrt{2} - 1$. Repitamos esta construcción en tres dimensiones: tenemos ahora un cubo de lado 4. En

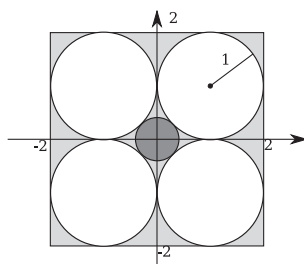


Figura 7: ¿Cómo y por dónde se escapa?

cada octante dibujamos una esfera de radio 1, tangente a las caras del cubo (las esfera en el primer octante tendrá centro $(1, 1, 1)$, por ejemplo) y, finalmente, consideremos la esfera interior centrada en el origen y que es tangente a las ocho bolas de cada uno de los octantes. El radio de esta bola es ahora $r_3 = \sqrt{3} - 1$. Armémonos de valor y hagamos una construcción similar en \mathbb{R}^n . No es difícil conjeturar y aún calcular que en dimensión n , el radio de la bolita interior es $r_n = \sqrt{n} - 1$. Pero he aquí que, cuando apenas $n = 10$, el radio de la bolita interior es $r_{10} = \sqrt{10} - 1$, que es ... ¡un número mayor a 2! La bolita interior, a pesar de ser tangente a las $2^{10} = 1024$ bolas dentro del cubo, encuentra la manera de escaparse del cubo de dimensión 10 por las paredes. El espectacular escape se repite también, por supuesto, en cualquier dimensión mayor a 10. La figura en dimensión dos, es engañosa porque nos hace pensar que la pequeña bola interior está completamente rodeada por las bolas tangentes de radio uno. Sin embargo, ya en dimensión tres es posible observar que va habiendo espacio abierto entre las bolas que rodean a la bola interior. Aún así, si pensamos que la bolita es un conjunto convexo ¿Cómo puede ser tangente a las 2^n bolas dentro del cubo y al mismo tiempo tocar fuera del cubo en la dirección del centro de las caras?

9. Epílogo y agradecimientos

La figura 8 fue propuesta por V. Milman (la figura ya aparece en [M]) como un modelo geométrico para representar bolas y, en general, elipsoides simétricos con respecto al origen, en dimensiones grandes. Aún cuando la figura no es un cuerpo convexo, intenta representar el extraño comportamiento de la concentración de volumen en los cuerpos convexos en dimensiones grandes.

Como adivinará el lector, la presente exposición es sólo la punta del iceberg de una serie de problemas fascinantes. Los fenómenos de con-

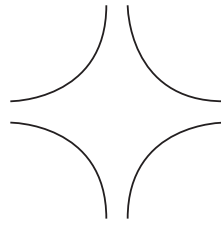


Figura 8: ¿Una bola en una dimensión grande?

centración de volumen han sido y son ampliamente estudiados y no sólo dentro de las matemáticas: una rápida ojeada a Wikipedia ([W]) muestra como estos fenómenos aparecen también en la física, la estadística e inclusive la computación, entre otros campos.

La mayor parte del material incluido en este artículo forma parte de una charla que el autor presentó, años atrás, en una invitación al Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Años después, el autor fue invitado a repetir la charla en la Universidad Estatal de Nuevo México donde realizaba su año sabático y donde se animó por fin a escribirla. El autor agradece ambas invitaciones a las Dras. Claudia Gómez y Josefina Alvarez respectivamente y agradece también al Departamento de Matemáticas de la Universidad Estatal de Nuevo México por la generosa hospitalidad brindada.

Referencias

- [B] K. Ball, *An elementary introduction to convex geometry*, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [B2] K. Ball, *Convex geometry and functional analysis*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. I, North-Holland, 2001.
- [D] P. J. Davis, *Leonhard Euler's integral: A historical profile of the Gamma function*, Amer. Math. Monthly **66** (1959), No. 10, 849–869.
- [F] W. Feller, *A direct proof of Stirling's formula*, Amer. Math. Monthly **74** (1967) 1223–1225.
- [K] B. S. Kasin, *The widths of certain finite-dimensional sets and classes of smooth functions*, Math. USSR-Izv. (traducción al inglés) **11** (1977), No. 2, 317–333.

- [M] V. Milman, *Surprising geometric phenomena in high-dimensional convexity theory*, Prog. Math. **169**, 1998, 73–91.
- [MS] V. Milman, G. Schechtman, *Asymptotic theory of finite-dimensional normed spaces*, Lecture Notes in Math. 1200, Springer-Verlag, 1986.
- [P] J. M. Patin, *A very short proof of Stirling's formula*, Amer. Math. Monthly **96** (1989) 41–42.
- [R] S. I. Resnick, *A probability path*, Birkhäuser, 1999.
- [Ru] W. Rudin, *Principios de Análisis Matemático*, 3ed., McGraw Hill, 1980.
- [W] Wikipedia, <http://www.wikipedia.org>.