

Estabilidad local de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo y aplicaciones

Angel Gabriel Estrella González

aestrel@uady.mx

Gerardo Emilio García Almeida

galmeida@uady.mx

Eric José Ávila Vales

avila@uady.mx

Facultad de Matemáticas de
la Universidad Autónoma de Yucatán

1. Introducción

Muchos fenómenos que se presentan en la naturaleza (físicos, químicos, biológicos, económicos, etc.) requieren de ecuaciones diferenciales para su descripción y estudio. Desafortunadamente, sólo en contados casos se puede encontrar una solución analítica de estas ecuaciones y en muchas ocasiones los modelos matemáticos de los objetos de estudio involucran ecuaciones diferenciales para las que no se cuenta con soluciones analíticas de las mismas.

En consecuencia, se tiene que recurrir a otros métodos para tratar dichas ecuaciones, estando entre ellos diferentes métodos numéricos para aproximarnos a las soluciones exactas del problema. Pero aplicar estos métodos numéricos requiere de un análisis cuidadoso para garantizar que realmente se aproximan a la solución buscada, ya que en su implementación se incurre en varios tipos de errores, como lo son errores de medición de los datos y los errores de redondeo en los cálculos al correr estos algoritmos en computadoras digitales.

Una alternativa es el estudio cualitativo o geométrico de estas ecuaciones. En este contexto, en vez de tratar de encontrar las soluciones analíticas o aproximaciones de las mismas, nos interesamos en su comportamiento, como por ejemplo, qué hacen estas soluciones cuando la variable independiente (usualmente el tiempo) tiende a infinito. Un elemento clave en este estudio es encontrar los puntos de equilibrio o puntos en los que los valores de las variables dependientes no cambian al modificarse el valor de la variable independiente. Una vez encontrados los puntos de equilibrio, nos interesará saber cómo se comportan las soluciones en una vecindad de estos puntos: ¿Se acercan, se alejan u oscilan alrededor de este punto al crecer la variable independiente? En el primer caso diremos que el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

Este estudio de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales nos permite hacer predicciones importantes sobre el comportamiento de los modelos matemáticos que las emplean, así como también proporcionarnos un marco de referencia para validar los diversos métodos numéricos empleados para aproximarnos a las soluciones exactas del modelo.

En muchos casos la respuesta de los modelos a los cambios en las variables dependientes no es instantánea, sino que ocurre después de un determinado lapso de tiempo (retardo). Por ejemplo, en modelos biológicos la respuesta de las poblaciones de las especies que se están modelando suele presentarse después de que las mismas obtienen un grado de maduración, lo cual impone retardos a estas respuestas. En otros casos el cambio en las poblaciones depende de los valores de las mismas a lo largo de un intervalo de tiempo pasado (retardo distribuido). Por este motivo se hace necesario el estudio de ecuaciones diferenciales con retardo, ya sea éste discreto (cuando el retardo toma un valor fijo) o distribuido. En algunos modelos puede haber más de un retardo discreto o distribuido, o bien haber combinaciones de ambos tipos de retardo.

El estudio de los puntos de equilibrio de las ecuaciones diferenciales y el comportamiento de las soluciones de las mismas en una vecindad de dichos puntos es conocido como el análisis de la estabilidad local de las ecuaciones diferenciales.

Con este artículo se inicia una serie en la que se presentan los métodos principales para el análisis de la estabilidad local de ecuaciones diferenciales incluyendo ecuaciones con retardo discreto y distribuido así como ecuaciones ordinarias y de reacción y difusión.

Para ilustrar estos métodos se presentan ejemplos tomados de artícu-

los de investigación recientes.

2. Notación

A lo largo de este artículo emplearemos la notación siguiente:

$$\text{Retardo discreto : } u_T = u_T(t) = u(t - T), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Retardo continuo o distribuido : } D[u] &= D[u](t) = D[u; K](t) \\ &= \int K(s)u(t - s)ds = \int K(s)u_s(t)ds, \end{aligned} \quad (2)$$

La derivada de f con respecto

$$\text{a la } i\text{-ésima variable : } D_i f. \quad (3)$$

En esta primera parte se consideran ecuaciones diferenciales ordinarias. En la sección 3 estudiaremos el caso sin retardo, en la 4 el caso con uno o más retardos discretos y en la 5 se estudiará el caso con uno o más retardos distribuidos. La estructura general de cada sección consistirá en presentar primero el tipo de ecuación diferencial que se estudiará, después se mostrará como se obtienen la linealización, la ecuación característica y finalmente se presentarán ejemplos tomados de diversas áreas de aplicación, incluyendo algunas gráficas generadas con *dde23* [8]. El objetivo principal de esta serie es el de enlistar los métodos y las referencias en los que se justifican éstos.

3. Ecuaciones ordinarias sin retardo

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = f(x). \quad (4)$$

Una solución constante o punto de equilibrio x_0 cumple $f(x_0) = 0$.

3.1. Linealización

Tomemos una perturbación de este punto de equilibrio x_0 , esto es, una solución cercana de la forma $x(t) = x_0 + \varepsilon u(t)$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon \dot{u} = f(x) \\ &= f(x_0 + \varepsilon u), \end{aligned}$$

donde podemos usar una aproximación de Taylor obteniendo

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot{u} &= f(x_0 + \varepsilon u) \approx f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon u \\ &= \varepsilon f'(x_0)u.\end{aligned}$$

Definiendo $J = f'(x_0)$ obtenemos la ecuación

$$\dot{u} = Ju \tag{5}$$

que recibe el nombre de *linealización de (4)* cerca del punto de equilibrio x_0 .

3.2. Relación entre una ecuación y su linealización

Diremos que un punto de equilibrio de una ecuación diferencial es *hiperbólico* si la matriz Jacobiana de f no tiene valores propios con parte real nula. En este caso unidimensional esta condición se traduce al hecho de que $f'(x)$ no se anule en dicho punto de equilibrio.

El Teorema de Hartman-Grobman [1], [2], [3] establece que para cada punto de equilibrio x_0 hiperbólico de la ecuación diferencial existe una vecindad V de x_0 y un homeomorfismo h definido en V que manda las soluciones de la ecuación diferencial original sobre las de su linealización. En otras palabras, en dicha vecindad V las soluciones de la linealización y las de la ecuación diferencial original tienen el mismo comportamiento cualitativo.

A continuación daremos unas definiciones sobre el comportamiento cualitativo de las soluciones de una ecuación diferencial en una vecindad de un punto de equilibrio.

Definición 1 *Se dice que un punto de equilibrio P es estable si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $r > 0$ tal que si $x(t_0)$ está en $B_r(P)$, la bola de radio r centrada en P , entonces $x(t)$ está definida para toda $t \geq t_0$ y $x(t)$ está en $B_\varepsilon(P)$ para toda $t \geq t_0$.*

Definición 2 *Se dice que un punto de equilibrio P es asintóticamente (exponencialmente) estable si existe una $r > 0$ tal que si $x(t_0)$ está en $B_r(P)$, la bola de radio r centrada en P , entonces $x(t)$ está definida para toda $t \geq t_0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = P$.*

Definición 3 *Se dice que un punto de equilibrio P es asintóticamente (exponencialmente) inestable si existe una $r > 0$ tal que si $x(t_0)$ está en $B_r(P)$, la bola de radio r centrada en P , entonces $x(t)$ está definida para toda $t \leq t_0$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = P$.*

3.3. Ecuación característica

Supongamos que la solución u de la linealización (5) es de la forma

$$u(t) = Ce^{\lambda t}$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces al sustituir en (5) obtenemos

$$\lambda u = Ju$$

por lo tanto $\lambda = J$, lo cual nos lleva al siguiente resultado.

Proposición 1 *Si x_0 es una solución de equilibrio de la ecuación (4), se cumplen los siguientes casos.*

- a) *Si $J = f'(x_0) < 0$ entonces x_0 es asintóticamente (exponencialmente) estable.*
- b) *Si $J = f'(x_0) > 0$ entonces x_0 es asintóticamente (exponencialmente) inestable.*
- c) *Si $J = f'(x_0) = 0$ no podemos concluir algo acerca de x_0*

En este caso de una ecuación ordinaria, podemos decir que $\lambda = J$ es la ecuación característica, la cual trivialmente nos da su solución.

3.4. Ejemplo

En 1836 Verhulst consideró el modelo de una población simple $x(t)$, cuya tasa de crecimiento per cápita en el tiempo t es

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right),$$

donde $r > 0$ es la razón de crecimiento intrínseco de la especie considerada y $K > 0$ es la capacidad de persistencia o capacidad de carga para dicha especie. Ambos parámetros son constantes, propias de la población (o especie) considerada. Esta ecuación es conocida como la *ecuación logística*. Observemos que el modelo poblacional anterior cumple la hipótesis de que si la población es muy pequeña comparada con capacidad de carga, su comportamiento es muy similar al descrito por el modelo de Malthus, en el cual la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población, pero si la población rebasa la capacidad de carga, entonces la población decrece. Entonces se tiene el comportamiento natural de una población sujeta a recursos limitados.

Reconocemos a esta ecuación diferencial como una ecuación de variables separables por lo que podemos dar la solución explícita.

En este caso, la ecuación tiene dos puntos de equilibrio: $x = 0$ y $x = K$. Para el punto de equilibrio $x = K$, la linealización es

$$\dot{u} = -ru,$$

y su polinomio característico es

$$\lambda = -r.$$

En virtud de la proposición 1, este punto de equilibrio es asintóticamente estable. Es decir, la solución se aproxima a K cuando el tiempo tiende a infinito.

A continuación se muestran las gráficas de algunas soluciones de la ecuación logística con $K = 100$, $r = 0.1$ para valores del tiempo t de 0 a 400. Se graficaron las soluciones correspondientes a los valores iniciales $x(0) = 3, 50, 100, 103$ y 150 , respectivamente. Se puede observar el comportamiento previamente descrito de estas soluciones.

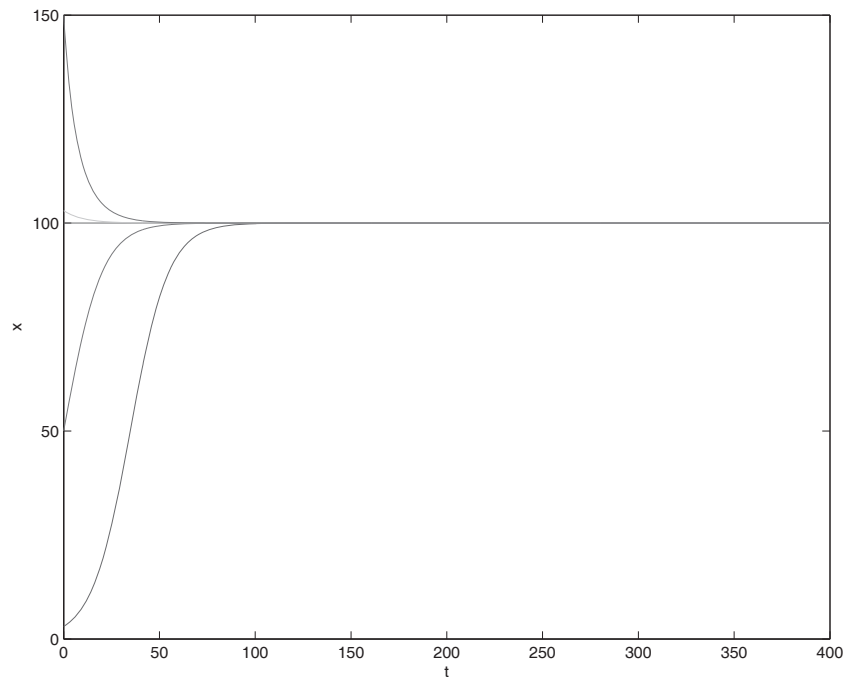


Figura 1: Soluciones de la ecuación logística.

4. Ecuaciones ordinarias con retardo discreto

Supongamos que se tiene la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = f(x, x_T), \quad (6)$$

donde $x_T(t) = x(t - T)$ es un retardo discreto. Si x_0 es una solución constante o punto de equilibrio, entonces al sustituir en (6) obtenemos $0 = f(x_0, x_0)$ y esta igualdad nos da una forma para calcular los puntos de equilibrio.

4.1. Linealización

Si $x(t) = x_0 + \varepsilon u(t)$ es una solución cercana al punto de equilibrio x_0 entonces

$$\dot{x} = \varepsilon \dot{u} = f(x, x_T) = f(x_0 + \varepsilon u, x_0 + \varepsilon u_T),$$

y usando aproximaciones de Taylor obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u} &= f(x_0 + \varepsilon u, x_0 + \varepsilon u_T) \\ &= f(x_0, x_0) + D_1 f(x_0, x_0) \cdot \varepsilon u + D_2 f(x_0, x_0) \cdot \varepsilon u_T \\ &= D_1 f(x_0, x_0) \cdot \varepsilon u + D_2 f(x_0, x_0) \cdot \varepsilon u_T \\ &= \varepsilon [D_1 f(x_0, x_0) \cdot u + D_2 f(x_0, x_0) \cdot u_T] \end{aligned}$$

por lo tanto, si tomamos

$$J = D_1 f(x_0, x_0), \quad (7)$$

$$J_D = D_2 f(x_0, x_0) \quad (8)$$

entonces

$$\dot{u} = Ju + J_D u_T \quad (9)$$

y esta ecuación se conoce como *la linealización de (6) cerca del punto de equilibrio x_0* .

4.2. Ecuación característica

Supongamos que

$$u(t) = C e^{\lambda t},$$

es una solución de (9), entonces

$$\begin{aligned} \dot{u} &= C \lambda e^{\lambda t} = \lambda u ; \\ u_T(t) &= C e^{\lambda(t-T)} \\ &= u e^{-\lambda T} \end{aligned}$$

y al sustituir en (9) obtenemos

$$\lambda u = Ju + J_D u e^{-\lambda T},$$

dividiendo entre u obtenemos la ecuación característica de (6)

$$\lambda = J + J_D e^{-\lambda T} \quad (10)$$

Para las ecuaciones diferenciales con retardo podemos considerar a manera de ejemplo la ecuación $\dot{x}(t) = -x(t - \tau)$. Cuando $\tau = 0$, la ecuación se reduce a $\dot{x}(t) = -x(t)$, la cual resolvemos con $x(t) = x(0)e^{-t}$ usando la condición inicial en $t = 0$. Si $\tau > 0$, ¿Qué condición inicial necesitaremos para resolver la ecuación? Podemos notar que para resolver la ecuación en $t = 0$ necesitamos saber el valor de $x(-\tau)$ y para resolverla en $t = \tau$ se requiere conocer el valor de $x(0)$. De manera similar notamos que para resolver la ecuación para todos los valores de t que se encuentren entre 0 y τ se requiere conocer todos los valores de la x entre $-\tau$ y 0. En consecuencia, se requiere una función definida en $[-\tau, 0]$ como condición inicial en vez de un punto del plano como ocurre con las ecuaciones diferenciales ordinarias sin retardo. Esta función es conocida como la *historia* de la ecuación diferencial con retardo.

Definición 4 Sea $x(\theta) = \phi(\theta) > 0$ con $\theta \in [-\tau, 0]$ la función historia (condición inicial) de la ecuación (6). Diremos que el equilibrio x_0 es estable si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|\phi(t) - x_0| \leq \delta$ en $[-\tau, 0]$ implica que todas las soluciones $x(t)$ de (6) con historia ϕ en $[-\tau, 0]$ satisfacen que $|x(t) - x_0| < \varepsilon$ para toda $t \geq 0$. Si además existe una $\delta_0 > 0$ tal que $|\phi(t) - x_0| \leq \delta_0$ en $[-\tau, 0]$ implica que $x(t)$ tiende a x_0 cuando t tiende a infinito, diremos que x_0 es asintóticamente estable.

Teorema 1 (principio de estabilidad linealizada para ecuaciones con retardo) Si la parte real de todas las soluciones de la ecuación característica (10) es negativa entonces el equilibrio x_0 es asintóticamente estable.

El teorema anterior y el teorema enunciado al final de la sección 5.3 son casos particulares de un teorema cuya discusión el lector podrá encontrar en la sección 2.4 del libro de Kuang [6].

4.3. Ejemplo

La ecuación logística que consideramos en la sección 3.4 asume que las tasas de reproducción y muerte responden de manera instantánea a los

cambios de tamaño de la población, sin embargo hay organismos que se reproducen por etapas, es decir tiene que pasar un tiempo (un retardo) para que se vuelvan a reproducir. También pudiera ocurrir un retardo cuando el organismo tarda en absorber sus nutrientes. En virtud de lo anterior ahora consideraremos la *ecuación de Hutchinson o ecuación logística con retardo (o retardada)*, la cual modela de una población simple $x(t)$, cuya tasa de crecimiento per cápita en el tiempo t es

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t - \tau)}{K} \right),$$

donde r y K tienen el mismo significado como en el ejemplo de la sección anterior. Comparando este modelo con el de la sección anterior, notamos que en el segundo factor hay el retardo τ , el cual puede representar, por ejemplo, el hecho de que la formación de huevos de la especie ocurre antes de su liberación para ser incubados.

En este caso, la ecuación tiene los mismos dos puntos de equilibrio que la ecuación logística: $x = 0$ y $x = K$. Para el punto de equilibrio $x = K$, la linealización es

$$\dot{u} = -ru_\tau,$$

y su ecuación característica es

$$\lambda = -re^{-\lambda\tau}.$$

Aquí podemos notar la presencia del término $-re^{-\lambda\tau}$, razón por la cual la ecuación característica ya no es un polinomio en λ como en el caso anterior, sino una ecuación trascendente (llamada en ocasiones *cuasipolinomio*), la cual tiene una infinidad de soluciones. En este caso (ver [5]) el punto de equilibrio $x = K$ es asintóticamente estable si todas estas infinitas soluciones tienen parte real negativa.

A continuación se muestran las gráficas de algunas soluciones de esta ecuación con $K = 100$, $r = 0.1$ para valores del tiempo t de 0 a 400. Se graficaron las soluciones correspondientes a las funciones historia constantes $x(t) = 3, 50, 100, 103$ y 150 , respectivamente para $t \in [-\tau, 0]$. Empleamos el mismo intervalo de graficación y los mismos valores de los parámetros K y r del ejemplo de la sección anterior con el fin de comparar el comportamiento de las soluciones de la ecuación de Hutchinson con el de la ecuación logística. Se muestran tres figuras correspondientes a valores del retardo $\tau = 10, 15$ y 20 .

En las dos primeras figuras podemos observar que la introducción del retardo causa oscilaciones en las soluciones, las cuales son más pronunciadas conforme crece el retardo, propiedad que no tenían las

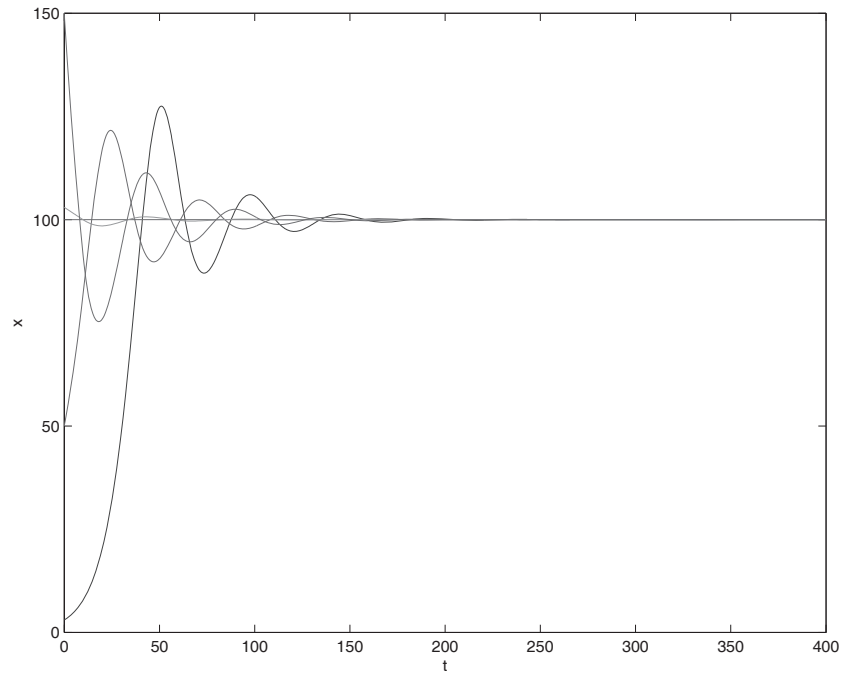


Figura 2: Soluciones de la ecuación de Hutchinson con $\tau = 10$.

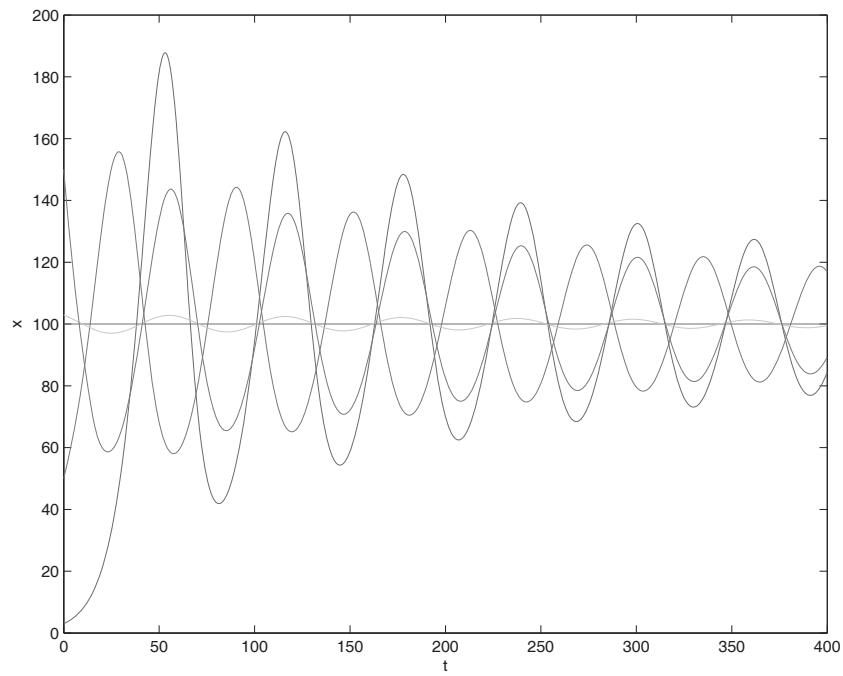


Figura 3: Soluciones de la ecuación de Hutchinson con $\tau = 15$.

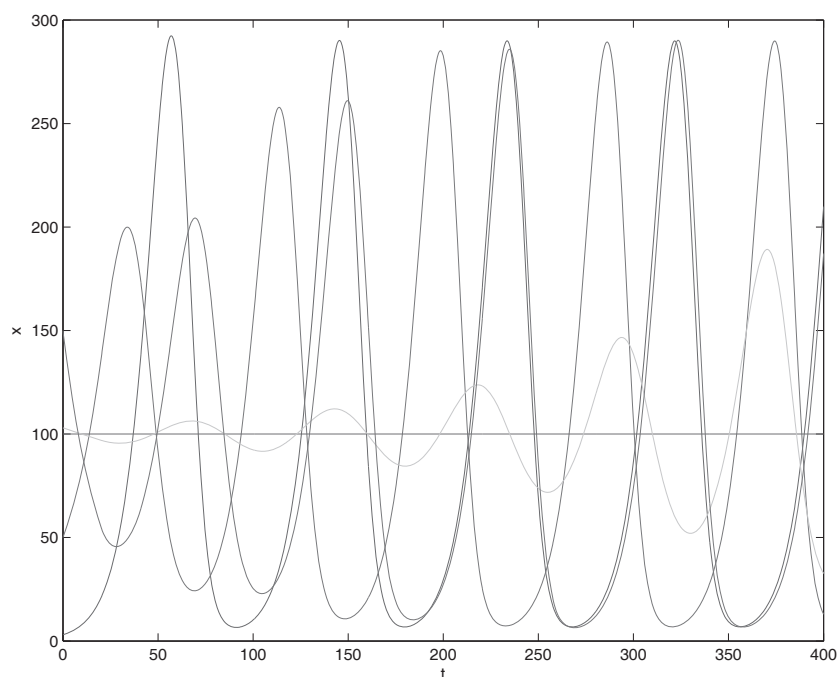


Figura 4: Soluciones de la ecuación de Hutchinson con $\tau = 20$.

soluciones de la ecuación logística. Sin embargo, el punto de equilibrio $x = K$ sigue siendo localmente asintóticamente estable. Pero cuando el retardo es lo suficientemente grande y sobrepasa un valor crítico, el punto de equilibrio anterior pierde su estabilidad, como se hace evidente en la última figura que se muestra a continuación

4.4. Ejercicio

Encuentre la ecuación característica para las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x} = f(x, x_{T_1}, x_{T_2}), \quad (11)$$

$$\dot{x} = g(x, x_{T_1}, \dots, x_{T_n}), \quad (12)$$

donde cada $T_i > 0$ es un retardo discreto.

5. Ecuaciones ordinarias con retardo distribuido

Supongamos que se tiene la ecuación

$$\dot{x} = f(x, D[x]) = f(x, \int K(s)x(t-s)ds), \quad (13)$$

donde $D[x] = \int K(s)x(t-s)ds = \int K(s)u_s(t)ds$ es un retardo distribuido con la notación introducida en (2). Sea x_0 la solución de equilibrio, por lo tanto $f(x_0, D[x_0]) = 0$, pero $D[x_0] = \int K(s)x_0ds = x_0 \int K(s)ds = x_0I$ donde $I = \int K(s)ds$, es decir $f(x_0, x_0I) = 0$.

5.1. Linealización

Tomemos ahora una solución x cercana al punto de equilibrio de la forma $x = x_0 + \varepsilon u$, entonces

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon \dot{u} = f(x, D[x]) = f(x_0 + \varepsilon u, D[x_0 + \varepsilon u]) \\ &= f(x_0 + \varepsilon u, x_0I + \varepsilon D[u]),\end{aligned}$$

este último término lo podemos aproximar por medio de un polinomio de Taylor obteniendo

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u} &= D_1(x_0, x_0I) \cdot \varepsilon u + D_2(x_0, x_0I) \cdot \varepsilon D[u] \\ &\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_0I) \cdot \varepsilon u + \frac{\partial f}{\partial D[u]}(x_0, x_0I) \cdot \varepsilon D[u] \\ &= D_1(x_0, x_0I) \cdot \varepsilon u + D_2(x_0, x_0I) \cdot \varepsilon \int K(s)u(t-s)ds,\end{aligned}$$

por lo tanto, si tomamos

$$J = D_1(x_0, x_0I), \quad (14)$$

$$J_D = D_2(x_0, x_0I) \quad (15)$$

entonces

$$\dot{u} = Ju + J_D \int K(s)u(t-s)ds \quad (16)$$

y esta ecuación se conoce como *la linealización de (13) cerca del punto de equilibrio x_0* (compárese con (9)).

5.2. Ecuación característica

Como antes, para obtener la ecuación característica, supongamos que la solución de (16) es de la forma

$$u(t) = Ce^{\lambda t},$$

entonces

$$\begin{aligned}\dot{u} &= C\lambda e^{\lambda t} = \lambda u ; \\ \int K(s)u(t-s)ds &= \int K(s)Ce^{\lambda(t-s)}ds \\ &= Ce^{\lambda t} \int K(s)e^{-\lambda s}ds = u \int K(s)e^{-\lambda s}ds\end{aligned}$$

y al sustituir en (16) obtenemos

$$\lambda u = Ju + J_D u \int K(s)e^{-\lambda s}ds,$$

dividiendo entre u obtenemos la ecuación característica de (13)

$$\lambda = J + J_D \int K(s)e^{-\lambda s}ds \quad (17)$$

(compárese con (10)).

5.3. Otro caso más general

En algunas ocasiones tenemos ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f\left(x, \int K(s)G(x(t-s))ds\right) \\ &= f\left(x, \int K(s)G(x_s(t))ds\right) = f(x, z[x]).\end{aligned} \quad (18)$$

con $z[x] = \int K(s)G(x_s(t))ds$. Note que tomando $G(x) = x$ obtenemos (13). En este caso un punto de equilibrio x_0 satisface

$$\begin{aligned}0 &= f\left(x_0, \int K(s)G(x_0)ds\right) = f\left(x_0, G(x_0) \int K(s)ds\right) \\ &= f(x_0, G(x_0)I).\end{aligned}$$

Tomemos una solución de la forma $x = x_0 + \varepsilon u$ y notemos que podemos usar la aproximación

$$\begin{aligned}\int K(s)G(x_0 + \varepsilon u_s(t))ds &\approx \int K(s) [G(x_0) + G'(x_0) \cdot \varepsilon u_s(t)] ds \\ &= G(x_0) \int K(s)ds + \varepsilon G'(x_0) \int K(s)u_s(t)ds \\ &= G(x_0)I + \varepsilon G'(x_0) \int K(s)u_s(t)ds\end{aligned}$$

al sustituir en la ecuación (18), obteniendo

$$\begin{aligned}
\dot{x} = \varepsilon \dot{u} &= f \left(x_0 + \varepsilon u, \int K(s)G(x_0 + \varepsilon u_s(t))ds \right) \\
&\approx f \left(x_0 + \varepsilon u, G(x_0)I + \varepsilon G'(x_0) \int K(s)u_s(t)ds \right) \\
&\approx f(x_0, G(x_0)I) + D_1(x_0, G(x_0)I) \cdot \varepsilon u \\
&\quad + D_2(x_0, G(x_0)I) \cdot \varepsilon G'(x_0) \int K(s)u_s(t)ds \\
&\approx f(x_0, G(x_0)I) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, G(x_0)I) \cdot \varepsilon u \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial z[x]}(x_0, G(x_0)I) \cdot \varepsilon G'(x_0) \int K(s)u_s(t)ds \\
&= D_1(x_0, G(x_0)I) \cdot \varepsilon u + D_2(x_0, G(x_0)I) \cdot \varepsilon G'(x_0) \int K(s)u_s(t)ds.
\end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{aligned}
J &= D_1(x_0, G(x_0)I), \\
J_D &= D_2(x_0, G(x_0)I) \cdot G'(x_0)
\end{aligned}$$

obtenemos la linealización de (18)

$$\dot{u} = Ju + J_D \int K(s)u(t-s)ds \quad (19)$$

(compárese con (9) y (16)), cuya ecuación característica se obtiene exactamente como en el caso anterior obteniendo

$$\lambda = J + J_D \int K(s)e^{-\lambda s}ds \quad (20)$$

(compárese con (10) y (17)).

Definición 5 Sea $x(\theta) = \phi(\theta) > 0$ con $\theta \in [-\infty, 0]$ la función historia (condición inicial) de la ecuación (18). Diremos que el equilibrio x_0 es estable si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|\phi(t) - x_0| \leq \delta$ en $[-\infty, 0]$ implica que cualquier solución $x(t)$ de (18) con historia ϕ en $[-\infty, 0]$ satisface que $|x(t) - x_0| < \varepsilon$ para toda $t \geq 0$. Si además existe una $\delta_0 > 0$ tal que $|\phi(t) - x_0| \leq \delta_0$ en $[-\infty, 0]$ implica que $x(t)$ tiende a x_0 cuando t tiende a infinito, diremos que x_0 es asintóticamente estable.

Teorema 2 (principio de estabilidad linealizada para ecuaciones con retardo distribuido) *Si la parte real de todas las soluciones de la ecuación característica (20) es negativa entonces el equilibrio x_0 es asintóticamente estable.*

Es posible tener diversos tipos de combinaciones de los retardos, podemos tener dos o más retardos distribuidos o combinaciones de retardos distribuidos y discretos; en cada caso en la linealización y en la ecuación característica aparecerán los términos correspondientes a cada tipo de retardo.

5.4. Ejemplos

5.4.1. Ejemplo 1

La ecuación de Hutchinson considera que los efectos en la población dependen de un tiempo anterior en lugar del tiempo presente t . Con el objeto de tener un modelo más realista debemos considerar que el retardo dependa de un promedio de todos los tiempos anteriores, y la ecuación que resulta entonces se le conoce como una ecuación con retardo distribuido o con retardo infinito

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left(1 - \frac{1}{K} \int_{-\infty}^t G(t-s)x(s) ds \right),$$

donde $G(t)$ es conocida como el núcleo (Kernel) del retardo, $G(t)$ es una distribución que nos indica la importancia que tiene en el proceso cada uno de los tiempos anteriores. En el caso que la función $G(t)$ sea la función delta de Dirac regresaríamos al caso de la ecuación logística con retardo. En la literatura generalmente se estudian dos casos, cuando $G(t) = \alpha e^{-\alpha t}$ y cuando $G(t) = \alpha^2 t e^{-\alpha t}$, que se conocen como kernel débil (weak kernel) y kernel fuerte (strong kernel).

A continuación se muestran las gráficas de algunas soluciones de esta ecuación con $K = 100$, $r = 0.1$ para valores del tiempo t de 0 a 400. Se graficaron las soluciones correspondientes a las funciones historia constantes $x(t) = 3, 50, 100, 103$ y 150 , respectivamente para $t \in [-\infty, 0]$. Empleamos el mismo intervalo de graficación y los mismos valores de los parámetros K y r de las gráficas presentadas en secciones anteriores con el fin de comparar el comportamiento de las soluciones de la ecuación logística con retardo distribuido con el de las ecuaciones logística y de Hutchinson. Primero se muestran dos figuras con el kernel débil y parámetro $\alpha = 0.125$ y 1.125 . Posteriormente se muestran dos figuras con el kernel fuerte y parámetro $\alpha = 0.04$ y 0.6 .

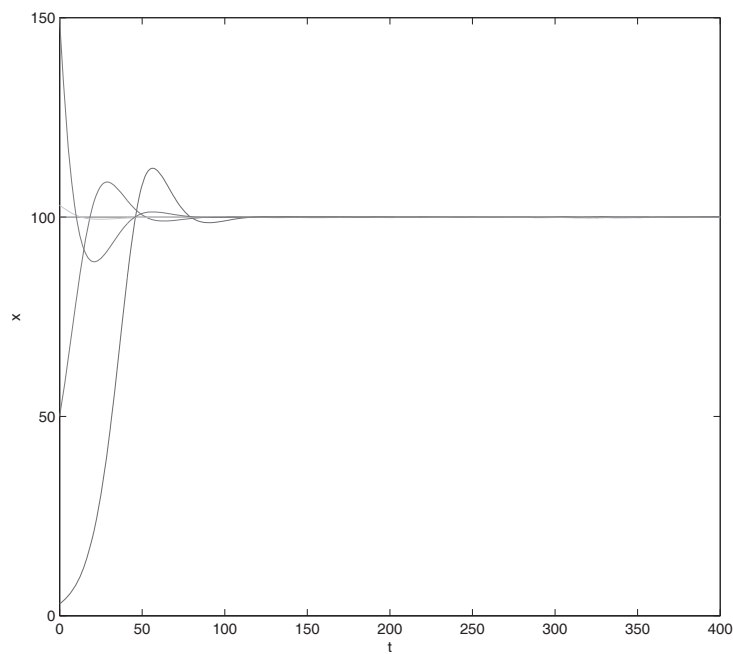


Figura 5: Soluciones de la ecuación logística con retardo distribuido y kernel débil con $\alpha = 0.125$.

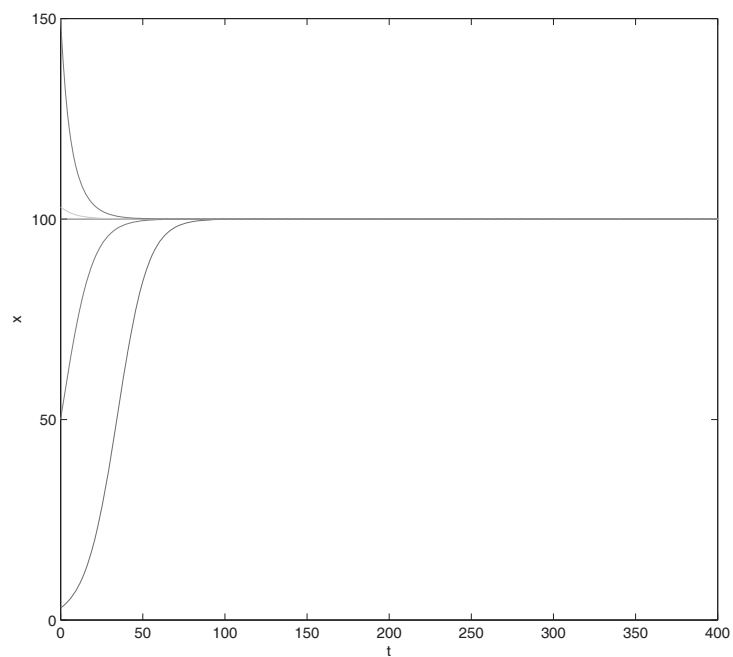


Figura 6: Soluciones de la ecuación logística con retardo distribuido y kernel débil con $\alpha = 1.125$.

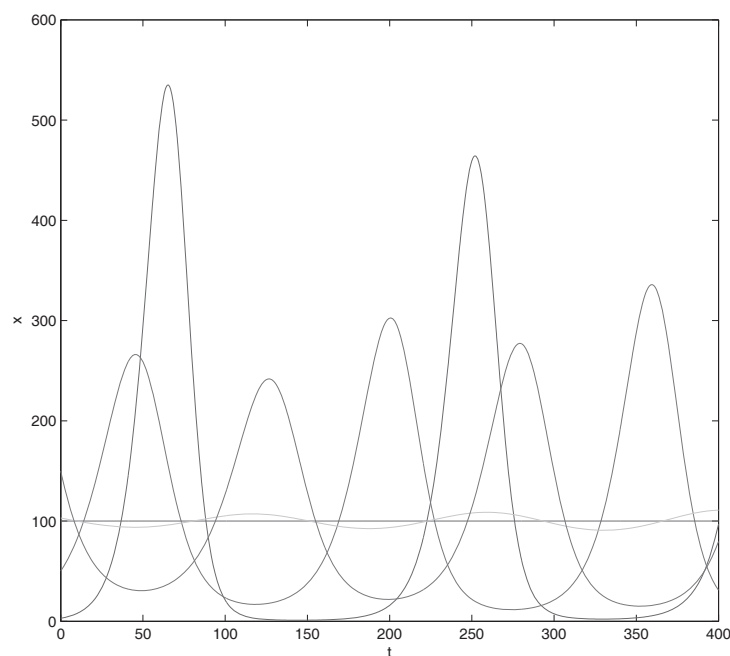


Figura 7: Soluciones de la ecuación logística con retardo distribuido y kernel fuerte con $\alpha = 0.04$.

En las dos gráficas anteriores notamos que con valores α muy pequeños se presentan oscilaciones, las cuales se van amortiguando hasta desaparecer conforme α crece y obtener un comportamiento muy similar al de la ecuación logística. Con el kernel débil el punto de equilibrio $x = K$ es localmente asintóticamente estable para cualquier $\alpha > 0$. En contraste, con el kernel fuerte se tiene un valor crítico del parámetro α para el cual el punto de equilibrio $x = K$ es inestable por debajo de este valor y localmente asintóticamente estable por encima del mismo. También se puede observar que las oscilaciones desaparecen al crecer α por encima del valor crítico mencionado, obteniendo un comportamiento similar al de la ecuación con kernel débil.

Nótese que en estos ejemplos con retardo distribuido el valor del retardo ya no es el parámetro que puede determinar la estabilidad debido a que hay una infinidad de retardos que son promediados. El tipo de promedio, determinado por el kernel, es el que determina la estabilidad. En los ejemplos anteriores el parámetro α incluido en el kernel es el parámetro determinante de la estabilidad para el caso del kernel fuerte.

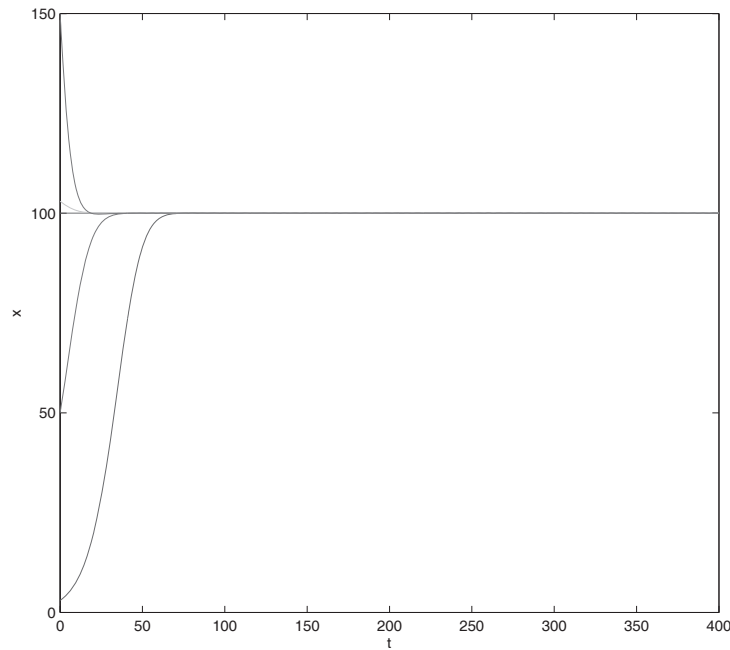


Figura 8: Soluciones de la ecuación logística con retardo distribuido y kernel fuerte con $\alpha = 0.6$.

5.4.2. Ejemplo 2

Huang - Vandewalle [4] estudian una ecuación ordinaria (lineal) con retardo distribuido y retardo discreto (fixed delay) de la forma

$$\dot{y}(t) = ay(t) + by(t - \tau) + c \int_{-\tau}^0 y(t+s)ds,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, y $\tau > 0$. Haciendo un cambio de variable en la integral la ecuación anterior se transforma en

$$y'(t) = ay(t) + by(t - \tau) + c \int_0^{\tau} y(t-s)ds,$$

quedando en la forma (13).

Los puntos de equilibrio de esta ecuación son: 0, si $a + b + c\tau \neq 0$ y cualquier punto de \mathbb{R} si $a + b + c\tau = 0$. Para el caso en que 0 es el único punto de equilibrio, la linealización es

$$\dot{u} = au + bue^{-\lambda\tau} + c \int_0^{\tau} u(t-s)ds,$$

y la ecuación característica es

$$\lambda = a + be^{-\lambda\tau} + c \int_0^{\tau} e^{-\lambda s} ds.$$

Como ocurrió en el caso anterior, esta es también una ecuación trascendente y el punto de equilibrio será asintóticamente estable si todas las infinitas soluciones de la ecuación característica tienen parte real negativa. El análisis completo de estabilidad está desarrollado en [4].

5.5. Ejercicio

Encontrar la ecuación característica de la siguiente ecuación:

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left(1 - a_1 x(t - \tau) - a_2 \int_{-\infty}^t f(t-s)x(s) ds \right),$$

donde $r, \tau, a_1, a_2 > 0$; $f(t) \geq 0$ para toda $t \geq 0$ y $\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente apoyado por el SNI, números de registro 202539, 33365 y 15284.

Referencias

- [1] Grobman, D.M., *Homeomorphisms of systems of differential equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR Vol. 128, (1959), pp. 880-881.
- [2] Hartman, Philip, *A lemma in the theory of structural stability of differential equations*, Proc. A.M.S. Vol. 11 No. 4, (August 1960), pp. 610-620.
- [3] Hartman, Philip, *On local homeomorphisms of Euclidean spaces*, Bol. Soc. Math. Mexicana Vol. 5, (1960), pp. 220-241.
- [4] Huang, C., Vandewalle, S., *An analysis of delay-dependent stability for ordinary and partial differential equations with fixed and distributed delays* SIAM J. Sci. Comput. Vol. 25, No. 5, (2004), pp. 1608-1632.
- [5] Ruan, S., *Delay Differential Equations in Single Species Dynamics*, in "Delay Differential Equations with Applications", ed. by O. Arino, M. Hbid and E. Ait Dads, NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, Vol. 205, (2006), Springer, Berlin, pp. 477-517.

- [6] Kuang, Y., *Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics*, Academic Press, San Diego, 1993.
- [7] Smith, H., *MAT598 Applied Delay Differential Equations, Spring 2004*, <http://math.la.asu.edu/halsmith/FDE.pdf>
- [8] Shampine, L. F., Gladwell, I., Thompson, S., *Solving ODEs with MATLAB*, Cambridge University Press, UK, Chapter 4,(2003), pp. 213-250.