

Constelaciones en el plano

Héctor Méndez Lango
Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias, UNAM
hml@ciencias.unam.mx

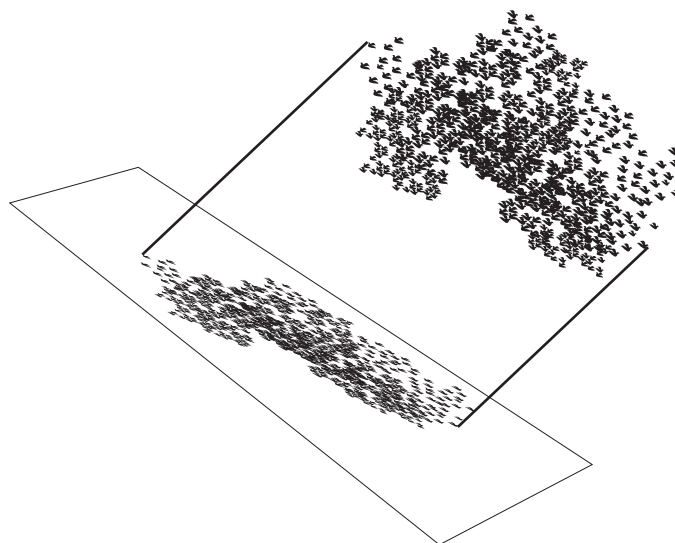
Rosa María Vargas Magaña
rosammaria@gmail.com

1. Introducción

Una constante en matemáticas es la presencia de hechos que ponen a prueba nuestra intuición y llevan nuestra imaginación a lugares diversos y fantásticos.

Iniciemos con una mirada hacia el cielo nocturno. Con un poco de suerte veremos cientos, tal vez miles, de estrellas formando grupos en distintas zonas. Una constelación es uno de esos conjuntos de estrellas. Tomemos una, digamos la constelación \mathcal{M} , e imaginemos por un momento la siguiente situación: \mathcal{M} está formada por una infinidad de estrellas; cada estrella de \mathcal{M} la identificamos con un punto en el espacio \mathbb{R}^3 ; \mathcal{M} no es conexa ni contiene subconjuntos conexos, salvo los formados por un solo punto. Las preguntas que nos interesan son éstas: ¿Será posible que al observar \mathcal{M} , digamos con un telescopio, la imagen que recibimos sea un conjunto conexo? Imaginemos ahora que \mathcal{M} es observada desde otro punto del universo, ¿es posible que la imagen de \mathcal{M} desde este nuevo punto vuelva a ser un conjunto conexo? ¿Pueden los puntos de una constelación estar acomodados de tal manera que para todo observador la imagen que de ella obtiene sea un conjunto conexo?

Las preguntas que hemos planteado están incluidas en el estudio de las proyecciones de conjuntos contenidos en \mathbb{R}^n sobre subespacios lineales de dimensión $n - 1$. Esta parte de las matemáticas ha interesado a



matemáticos como: K. Borsuk, H. Federer, K. J. Falconer y P. Mattila (entre otros) desde la década de 1940.

Dados un conjunto A en \mathbb{R}^n y una dirección, es decir, un vector unitario \bar{u} , y un subespacio lineal transversal a \bar{u} , digamos S , la proyección de A sobre S en la dirección de \bar{u} se puede pensar como la sombra que se produce en S cuando A se encuentra con un haz de rayos de luz todos paralelos a \bar{u} . Si S es ortogonal a \bar{u} , entonces la proyección que obtenemos con este procedimiento es conocida como la *proyección ortogonal*. Si n es igual a 3, entonces S es un subespacio de dimensión 2. En este caso la proyección ortogonal coincide con la imagen que tiene un observador que está a gran distancia de A en la dirección de \bar{u} .

El tema es muy amplio y se vuelve necesario restringir un poco nuestro estudio. En este artículo veremos sólo conjuntos contenidos en el plano y sus proyecciones sobre líneas rectas. Centrar nuestra atención en \mathbb{R}^2 nos permite ofrecer al lector ejemplos explícitos de constelaciones planas junto con sus respectivas proyecciones. Nos permite también hacer una introducción accesible al tema utilizando varias imágenes que, esperamos, den al lector una idea clara de algunas de las afirmaciones que haremos.

Una constelación plana es para nosotros un conjunto de Cantor. Cuando hablamos de un conjunto de Cantor en el plano lo primero que nos viene a la mente es su peculiaridad de ser un conjunto totalmente disconexo. En términos coloquiales podríamos imaginarlo como un *polvo flotante*. Siendo así, intuitivamente, uno esperaría que la sombra que pudiera proyectar tal *polvo cantoriano* fuese un conjunto disconexo

y de medida cero. Pero la realidad no es tan simple y más bien nos muestra un abánico muy grande de conjuntos en \mathbb{R}^2 cuyas proyecciones tienen un comportamiento sorprendente.

La parte central de nuestro artículo es la presentación de dos constelaciones. En el primer ejemplo, que es el conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ donde \mathcal{C} es el conjunto ternario de Cantor, la estructura de las sombras obtenidas depende fuertemente del ángulo con el que proyectamos. La sombra inicia siendo un intervalo, luego se compone de dos intervalos, luego de cuatro, y así sucesivamente hasta que la sombra termina por convertirse en un conjunto de Cantor.

Nuestro segundo ejemplo, que llamaremos \mathcal{M} , es un conjunto de Cantor cuya proyección ortogonal en cualquier dirección es siempre un intervalo. Resulta realmente sorprendente que en toda dirección la sombra que proyecta \mathcal{M} sea un intervalo ya que, en esencia, \mathcal{M} es simplemente *polvo*.

2. Dos clases de proyecciones

En esta sección presentamos dos tipos de proyecciones de conjuntos contenidos en \mathbb{R}^2 . La primera es la *proyección ortogonal* sobre una recta \mathcal{L} . La segunda es la proyección sobre el eje real, es decir, sobre la recta horizontal $\{(x, y) | y = 0\}$, utilizando una inclinación θ que podemos variar de 0 a π , $0 < \theta < \pi$. También en esta parte damos algunas definiciones y recordamos varios resultados útiles.

Sean A un conjunto en \mathbb{R}^2 , $\bar{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ un vector unitario, $\bar{a} = (a_1, a_2)$ un punto en A y \mathcal{L} una recta con dirección ortogonal a \bar{u} ,

$$\mathcal{L} = \{(x, y) | (x, y) = s(\sin\theta, -\cos\theta), s \in \mathbb{R}\}.$$

La *proyección ortogonal* de \bar{a} sobre \mathcal{L} la denotamos con $\pi_\theta(\bar{a})$. La función π_θ va de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R} .

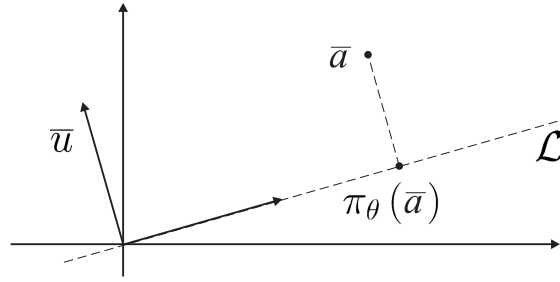
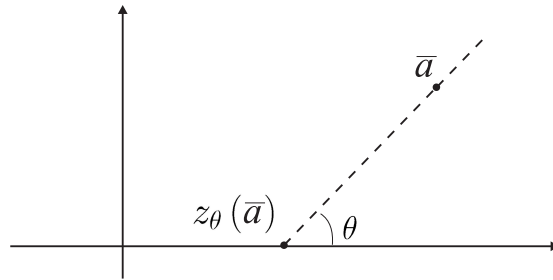
Sea $\bar{w} = (\sin\theta, -\cos\theta)$ y sea $t = \pi_\theta(\bar{a})$. Como $(\bar{a} - t\bar{w}) \cdot \bar{w} = 0$, entonces

$$\bar{a} \cdot \bar{w} - t|\bar{w}|^2 = 0, \quad \bar{a} \cdot \bar{w} - t = 0.$$

De donde,

$$\pi_\theta(a_1, a_2) = t = \bar{a} \cdot \bar{w} = a_1 \sin\theta - a_2 \cos\theta. \quad (1)$$

A continuación presentaremos la otra proyección que llamaremos *sombra*. Sean $A \subset \mathbb{R}^2$, $\bar{a} = (a_1, a_2)$ un punto en A y consideramos un

Figura 1: La *proyección ortogonal*.Figura 2: La *sombra* de \bar{a} .

ángulo θ , $0 < \theta < \pi$. La idea es proyectar \bar{a} sobre el eje real siguiendo la dirección dada por θ .

Denotamos la *sombra* de \bar{a} como $z_\theta(\bar{a})$. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces $z_\theta(\bar{a}) = a_1$. Si $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, entonces la regla de correspondencia de $z_\theta(\bar{a}) = t$ se sigue de lo siguiente:

$$\frac{a_2}{a_1 - t} = \tan \theta, \quad \frac{a_2}{a_1 - t} = \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta},$$

luego, $a_2 \text{cos}\theta = (a_1 - t) \text{sen}\theta = a_1 \text{sen}\theta - t \text{sen}\theta$. Así,

$$t \text{sen}\theta = a_1 \text{sen}\theta - a_2 \text{cos}\theta.$$

Por lo tanto,

$$z_\theta(a_1, a_2) = t = a_1 - a_2 \left(\frac{\text{cos}\theta}{\text{sen}\theta} \right). \quad (2)$$

Observemos que la fórmula (2) también dice que $z_\theta(a_1, a_2) = a_1$ cuando el ángulo es $\frac{\pi}{2}$. Además, en general, $z_\theta(\bar{a})$ no es una *proyección ortogonal* sobre el eje real.

Las proyecciones $\pi_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $z_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ poseen propiedades muy importantes. Para empezar ambas son transformaciones lineales

y, por lo tanto, continuas en todo \mathbb{R}^2 . La siguiente proposición muestra que las dos se comportan muy bien cuando se componen con una contracción afín, es decir, con una contracción que es el resultado de aplicar una homotecia y una traslación.

Definición 1. Decimos que $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una contracción, si existe un número c , $0 < c < 1$, constante, tal que $|\phi(\bar{x}) - \phi(\bar{y})| \leq c |\bar{x} - \bar{y}|$ para todo par de puntos \bar{x}, \bar{y} en \mathbb{R}^2 .

Proposición 2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Sean A, A_1, A_2, \dots, A_k , una colección finita de conjuntos en el plano tales que $A_i \subset A$, $1 \leq i \leq k$. Supongamos además que $T(A) = \bigcup_{i=1}^k T(A_i)$.

Sea $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(\bar{x}) = c\bar{x} + \bar{w}_0$, donde $c \in \mathbb{R}$, $0 < c < 1$, es un valor constante, y $\bar{w}_0 \in \mathbb{R}^2$ es un vector fijo. Entonces

$$T(L(A)) = \bigcup_{i=1}^k T(L(A_i)). \quad (3)$$

Demostración. Demostraremos ambas contenciones.

[\subset] Sea $\bar{y} \in T(L(A))$. Existe $\bar{a} \in A$ tal que

$$\bar{y} = T(L(\bar{a})) = T(c\bar{a} + \bar{w}_0) = cT(\bar{a}) + T(\bar{w}_0).$$

Como $T(A) = \bigcup_{i=1}^k T(A_i)$, existen $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y $\bar{a}_i \in A_i$ tales que $T(\bar{a}) = T(\bar{a}_i)$. Entonces,

$$\bar{y} = cT(\bar{a}_i) + T(\bar{w}_0),$$

es decir,

$$\bar{y} = T(c\bar{a}_i + \bar{w}_0) = T(L(\bar{a}_i)).$$

Por lo que $\bar{y} \in T(L(A_i))$. Así, $T(L(A)) \subset \bigcup_{i=1}^k T(L(A_i))$.

[\supset] Por hipótesis $A_i \subset A$, $1 \leq i \leq k$. Entonces, aplicando $T \circ L$,

$$T \circ L(A_i) \subset T \circ L(A), \quad 1 \leq i \leq k,$$

y con ello,

$$\bigcup_{i=1}^k T(L(A_i)) \subset T(L(A)). \quad \square$$

Mantengamos la notación de la proposición 2. Si T es una de las proyecciones π_θ o z_θ , entonces la igualdad (3) nos dice lo siguiente: Si

la sombra de un conjunto A coincide con la unión de las sombras de una colección de conjuntos, A_i , $1 \leq i \leq k$,

$$T(A) = \bigcup_{i=1}^k T(A_i),$$

entonces la sombra de $L(A)$ se obtiene al unir las sombras de todos los conjuntos $L(A_i)$, $1 \leq i \leq k$.

Va a ser muy útil considerar la intersección de una colección infinita numerable de conjuntos compactos encajados.

Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos compactos de \mathbb{R}^2 tal que $X_{i+1} \subset X_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Sea $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. No es difícil demostrar que X resulta ser un conjunto compacto también.

La demostración de la siguiente proposición se puede consultar en el primer capítulo del libro de Sam B. Nadler, *Continuum Theory*, [10].

Proposición 3. *Sea $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$, donde $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos compactos encajados, todos ellos contenidos en \mathbb{R}^2 . Si U es un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 tal que $X \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_i \subset U$ para todo $i \geq N$. Más aún, si cada $X_i \neq \emptyset$, entonces $X \neq \emptyset$.*

Proposición 4. *Sea $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$, donde $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos compactos encajados, no vacíos, de \mathbb{R}^2 . Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una transformación lineal. Entonces*

$$T(X) = \bigcap_{i=1}^{\infty} T(X_i).$$

Demostración. [⊂] Como $X \subset X_i$, entonces $T(X) \subset T(X_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$T(X) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} T(X_i).$$

[⊃] Sea $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} T(X_i)$. Si x no está en $T(X)$, entonces

$$T^{-1}(\{x\}) \cap X = \emptyset.$$

Luego $A = T^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{x\})$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 tal que $X \subset A$.

Por la proposición 3, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subset A$. Así obtenemos que $T(X_N) \cap \{x\} = \emptyset$. Esto contradice el hecho de que tomamos x en $\bigcap_{i=1}^{\infty} T(X_i)$. \square

En este artículo un intervalo es un conjunto de la forma

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\},$$

donde $a < b$. Dados un conjunto X y una función $f : X \rightarrow X$, con f^n denotamos la composición de f consigo misma n veces,

$$f^n = f \circ f \circ \dots \circ f, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si x y y son dos puntos en X , la distancia de x a y la denotamos así: $d(x, y)$.

3. Las dos constelaciones

Los conjuntos con los que trabajaremos poseen una geometría muy atractiva y, a pesar de que no los podemos visualizar como tales, es posible definirlos por medio de un proceso recursivo. La descripción de los primeros pasos de este proceso nos permitirá darnos una idea de su forma.

Nuestro primer ejemplo es el conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ donde \mathcal{C} es el *conjunto ternario de Cantor*. El conjunto \mathcal{C} está contenido en el intervalo $[0, 1]$ de la recta real. Una definición sucinta de \mathcal{C} es la siguiente,

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in [0, 1] \mid x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \quad a_i \in \{0, 2\} \text{ para toda } i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dibujar \mathcal{C} es imposible. Sin embargo resulta útil tener una imagen de él. Para construir tal imagen seguimos el siguiente camino. Sea \mathcal{C}_0 el intervalo $[0, 1]$. Dividimos \mathcal{C}_0 en tres intervalos de igual longitud, quitamos el de enmedio y obtenemos \mathcal{C}_1 . Así $\mathcal{C}_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ y $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_0$. Para definir \mathcal{C}_2 seguimos esta regla: Cada intervalo de \mathcal{C}_1 lo dividimos en tres intervalos de igual longitud y quitamos el de enmedio. La unión de los cuatro intervalos restantes es \mathcal{C}_2 . El conjunto \mathcal{C}_2 es subconjunto de \mathcal{C}_1 . Siguiendo este procedimiento podemos definir para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto \mathcal{C}_n . Este conjunto está formado por 2^n intervalos, todos de longitud $\frac{1}{3^n}$, y $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}_{n-1}$.

La colección $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos compactos encajados. Además $\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$.

Una forma ligeramente diferente de describir los conjuntos \mathcal{C}_n es la siguiente:

Definimos dos contracciones $\phi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\phi_1(x) = \frac{1}{3}x \quad \text{y} \quad \phi_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Entonces $\mathcal{C}_1 = \phi_1(\mathcal{C}_0) \cup \phi_2(\mathcal{C}_0)$, $\mathcal{C}_2 = \phi_1(\mathcal{C}_1) \cup \phi_2(\mathcal{C}_1)$, y así sucesivamente. De esta manera la regla que hay que seguir para obtener \mathcal{C}_{n+1} a partir de \mathcal{C}_n es muy sencilla, $\mathcal{C}_{n+1} = \phi_1(\mathcal{C}_n) \cup \phi_2(\mathcal{C}_n)$.

Observemos que con las dos contracciones, ϕ_1 y ϕ_2 , podemos definir una regla que nos permite a partir de un conjunto en \mathbb{R} obtener otro conjunto en \mathbb{R} . Dado $A \subset \mathbb{R}$, sea

$$\Phi_{\mathcal{C}}(A) = \phi_1(A) \cup \phi_2(A).$$

Con esta notación, $\mathcal{C}_1 = \Phi_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_0)$, $\mathcal{C}_2 = \Phi_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_1)$ y, más en general, para toda n , $\mathcal{C}_{n+1} = \Phi_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_n)$. Así, $\mathcal{C}_n = (\Phi_{\mathcal{C}})^n(\mathcal{C}_0)$.

Siguiendo esta idea construiremos el conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

La notación que utilizaremos para el resto del artículo será S_0 para el cuadrado unitario contenido en \mathbb{R}^2 , $S_0 = [0, 1] \times [0, 1]$.

El conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

Primero definimos cuatro contracciones en el plano:

$$\begin{aligned}\phi_1(x, y) &= \frac{1}{3}(x, y), \\ \phi_2(x, y) &= \frac{1}{3}(x, y) + \left(\frac{2}{3}, 0\right), \\ \phi_3(x, y) &= \frac{1}{3}(x, y) + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \text{ y} \\ \phi_4(x, y) &= \frac{1}{3}(x, y) + \left(0, \frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

Luego definimos la siguiente regla de correspondencia: Dado $A \subset \mathbb{R}^2$, sea

$$\bar{\Phi}_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}(A) = \phi_1(A) \cup \phi_2(A) \cup \phi_3(A) \cup \phi_4(A). \quad (4)$$

Ahora observemos que al aplicar $\bar{\Phi}_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}$ al cuadrado unitario S_0 obtenemos cuatro cuadritos,

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right] = \phi_1(S_0), \quad A_2 = \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right] = \phi_2(S_0),$$

$$A_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times \left[\frac{2}{3}, 1\right] = \phi_3(S_0), \text{ y } A_4 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[\frac{2}{3}, 1\right] = \phi_4(S_0).$$

Y definiendo S_1 como $\bar{\Phi}_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}(S_0)$ hemos dado el primer paso. Observamos que $S_1 = \bigcup_{i=1}^4 A_i$, y que $S_1 \subset S_0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos los conjuntos $S_n = (\bar{\Phi}_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}})^n(S_0)$. El conjunto S_n está formado por 4^n cuadritos, todos ellos de la misma área: $\left(\frac{1}{3^n}\right)^2$. Como $S_1 \subset S_0$, entonces para toda n , $S_{n+1} \subset S_n$.

La familia de conjuntos $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos compactos encajados de \mathbb{R}^2 , por tanto su intersección es un conjunto compacto no vacío. De hecho,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \mathcal{C} \times \mathcal{C}.$$

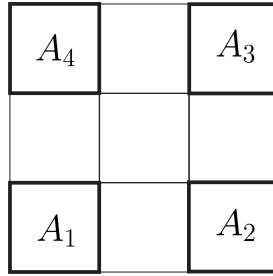


Figura 3: S_1 en la construcción de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

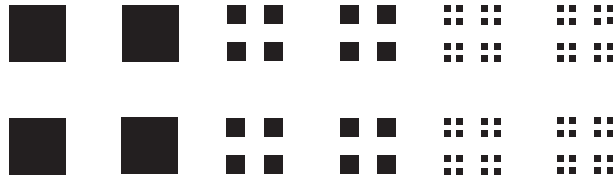


Figura 4: S_1, S_2 y S_3 en la construcción de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

El Conjunto \mathcal{M} .

Nuestro segundo ejemplo es el conjunto *Mosaico*, \mathcal{M} .

Definimos primero cinco funciones:

$$\phi_1(x, y) = \frac{1}{3}(x, y),$$

$$\phi_2(x, y) = \frac{1}{3}(x, y) + \left(\frac{2}{3}, 0\right),$$

$$\phi_3(x, y) = \frac{1}{3}(x, y) + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\phi_4(x, y) = \frac{1}{3}(x, y) + \left(0, \frac{2}{3}\right),$$

$$\phi_5(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Las cuatro primeras funciones son contracciones. La última también lo es. Veamos, $\phi_5 = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, donde f_1 es la traslación definida por el punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, f_2 es una contracción con coeficiente $\frac{1}{3}$, f_3 es la rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y, por último, f_4 es la traslación definida por el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Así para \bar{x} y \bar{y} en \mathbb{R}^2 ,

$$|\phi_5(\bar{x}) - \phi_5(\bar{y})| = |f_4(f_3(f_2(f_1(\bar{x})))) - f_4(f_3(f_2(f_1(\bar{y}))))| =$$

$$|f_3(f_2(f_1(\bar{x}))) - f_3(f_2(f_1(\bar{y}))))| = \dots = \frac{1}{3}|\bar{x} - \bar{y}|.$$

Ahora definimos la siguiente regla de correspondencia: Dado $A \subset$

\mathbb{R}^2 , sea

$$\Phi_{\mathcal{M}}(A) = \phi_1(A) \cup \phi_2(A) \cup \phi_3(A) \cup \phi_4(A) \cup \phi_5(A). \quad (5)$$

Sea $\mathcal{M}_1 = \Phi_{\mathcal{M}}(S_0)$. Este conjunto está formado por cinco cuadrillos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{M}_n = (\Phi_{\mathcal{M}})^n(S_0)$. En esta nueva construcción cada conjunto \mathcal{M}_n está formado por 5^n cuadrillos. Cada uno de ellos tiene área igual a $(\frac{1}{3^n})^2$.

Como $\mathcal{M}_1 \subset S_0$, entonces para toda n , $\mathcal{M}_{n+1} \subset \mathcal{M}_n$.

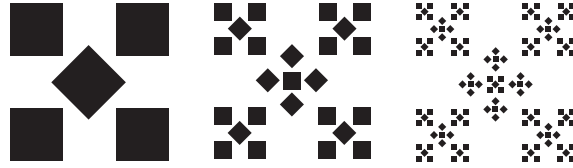


Figura 5: \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 y \mathcal{M}_3 en la construcción de \mathcal{M} .

La familia de conjuntos $\{\mathcal{M}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos compactos encajados de \mathbb{R}^2 . Definimos \mathcal{M} así:

$$\mathcal{M} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n.$$

Estos dos conjuntos, $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ y \mathcal{M} , poseen varias propiedades en común. Antes de mencionarlas recordemos lo siguiente: Dados $A \subset \mathbb{R}^p$ y $B \subset \mathbb{R}^q$, y $f : A \rightarrow B$, decimos que f es un *homeomorfismo* si f es biyectiva, f es continua en A y f^{-1} es continua en B . Si existe un homeomorfismo $f : A \rightarrow B$, decimos que los conjuntos A y B son *homeomorfos*. Si A es homeomorfo al conjunto ternario de Cantor, \mathcal{C} , decimos que A es un *conjunto de Cantor*.

La demostración de la siguiente proposición se puede consultar en el libro de Stephen Willard, *General Topology*, [12].

Proposición 5. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$. Si A es no vacío, compacto, totalmente desconexo (cada componente de A está formada por un solo punto), y perfecto (todo punto de A es punto de acumulación de A), entonces A es un conjunto de Cantor.*

Proposición 6. *Los conjuntos $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ y \mathcal{M} cumplen lo siguiente:*

- *Ambos son conjuntos de Cantor, y*

- *ambos son de medida de Lebesgue igual a cero.*

Demostración. Las pruebas son análogas para los dos conjuntos así que nos concentraremos en demostrar dichas propiedades para el conjunto \mathcal{M} .

Tenemos que $\mathcal{M} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$, donde $\mathcal{M}_n = (\Phi_{\mathcal{M}})^n(S_0)$. Como S_0 es un conjunto compacto, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{M}_n es compacto. Además para cada n , $\mathcal{M}_{n+1} \subset \mathcal{M}_n$. Así, es claro que \mathcal{M} es un conjunto compacto no vacío.

Demostraremos ahora que \mathcal{M} es totalmente desconexo.

Sea $\bar{x} \in \mathcal{M}$ y sea B la componente de \mathcal{M} que contiene a \bar{x} . Sea $\bar{y} \in B$. Dada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que \mathcal{M}_n está formado de 5^n cuadrillos ajenos entre sí tal que cada uno de ellos tiene diámetro menor que ε .

Como $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_n$ y B es conexo, B está contenida en uno solo de estos cuadrillos. Entonces $d(\bar{x}, \bar{y}) < \varepsilon$. Como esto es válido para toda $\varepsilon > 0$, entonces $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, es decir $\bar{x} = \bar{y}$. Así $B = \{\bar{x}\}$.

Para verificar que \mathcal{M} es perfecto observemos que los vértices de cada uno de los 5^n cuadrados que conforman a \mathcal{M}_n , para cada $n \geq 1$, son elementos de \mathcal{M} .

Sean $\bar{x} \in \mathcal{M}$ y $\varepsilon > 0$. Como antes, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que \mathcal{M}_n está formado de 5^n cuadrillos ajenos tales que su diámetro es menor que ε .

Sea $A_{\bar{x}}^n$ el cuadrillo de \mathcal{M}_n que contiene a \bar{x} . Como los cuatro vértices de $A_{\bar{x}}^n$ están en \mathcal{M} , se tiene que existe \bar{y} en $A_{\bar{x}}^n$, $\bar{y} \neq \bar{x}$, y $\bar{y} \in \mathcal{M}$, con $d(\bar{x}, \bar{y}) < \varepsilon$. Con lo cual \bar{x} resulta ser un punto de acumulación de \mathcal{M} . Esta última afirmación completa la prueba de que \mathcal{M} es un conjunto de Cantor.

Ahora demostraremos que la medida de Lebesgue de \mathcal{M} es cero.

Tenemos que \mathcal{M}_n consta de 5^n cuadrillos de área $(\frac{1}{3^n})^2$. Además para todo $n \geq 1$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_n$. Así para cada n , \mathcal{M} está cubierto por una cantidad finita de cuadrillos cuya suma de áreas es

$$5^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^n.$$

Como este número tiende a 0 cuando n tiende a infinito, es inmediato que la medida de Lebesgue de \mathcal{M} es cero. \square

4. Las sombras de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$

Debido a la simetría del conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ el estudio de las *sombras* de este conjunto sobre el eje real, $z_{\theta}(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$, se completa al estudiar únicamente

las *sombras* de ángulo θ donde $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Dividimos nuestra tarea en dos pasos.

El **Paso 1** consiste en mostrar que $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ es un intervalo cuando el ángulo de inclinación está entre $\frac{\pi}{4}$ y $\arctan(3)$.

Y el **Paso 2** consiste en mostrar que cuando $\arctan(3) < \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces la *sombra*, $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$, está formada por una cantidad finita de intervalos. De hecho esta cantidad va creciendo según la sucesión $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$, cuando θ va de $\arctan(3)$ hacia $\frac{\pi}{2}$.

Paso 1. Sea θ tal que $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \arctan(3)$.

En la construcción de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ nos ayudaron los conjuntos S_0, S_1, S_2, \dots . La idea es mostrar que todos ellos tienen la misma *sombra*. Iniciamos con la *sombra* de S_1 . Conviene tener a la mano la figura 6.

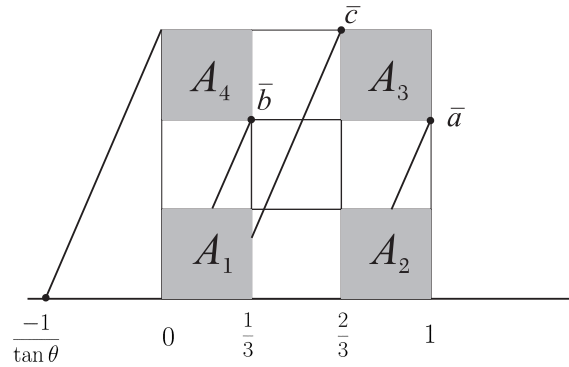


Figura 6: La *sombra* de S_1 .

Al aplicar $\Phi_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}$ al cuadrado S_0 obtenemos cuatro cuadritos, A_1, A_2, A_3 , y A_4 . Es decir, $S_1 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

Para cada i , $1 \leq i \leq 4$, $z_\theta(A_i)$ es un intervalo cerrado, pues z_θ es una función continua y A_i es un conjunto compacto y conexo.

Sea $\bar{a} = (1, \frac{2}{3}) \in A_3$. Como $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, la recta que pasa por \bar{a} con inclinación θ interseca a A_2 . Así las *sombras* de A_3 y A_2 se tocan,

$$z_\theta(A_3) \cap z_\theta(A_2) \neq \emptyset.$$

Análogamente, la recta con inclinación θ que pasa por el punto $\bar{b} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \in A_4$ interseca a A_1 , y con ello

$$z_\theta(A_4) \cap z_\theta(A_1) \neq \emptyset.$$

Así mismo, la recta con inclinación θ que pasa por $\bar{c} = (\frac{2}{3}, 1) \in A_3$ interseca a A_1 . De donde $z_\theta(A_3) \cap z_\theta(A_1) \neq \emptyset$.

Entonces la *sombra* de S_1 ,

$$z_\theta(S_1) = z_\theta \left(\bigcup_{i=1}^4 A_i \right) = \bigcup_{i=1}^4 z_\theta(A_i),$$

es un intervalo. De hecho es el intervalo $\left[\frac{-1}{\tan \theta}, 1 \right]$ ya que la *sombra* del punto $(0, 1)$ es $\frac{-1}{\tan \theta}$.

Por lo tanto $z_\theta(S_1) = z_\theta(S_0)$.

Veamos ahora la *sombra* de S_2 .

Como

$$S_2 = \Phi_{C \times C}(S_1) = \phi_1(S_1) \cup \phi_2(S_1) \cup \phi_3(S_1) \cup \phi_4(S_1),$$

entonces S_2 está formado por $4^2 = 16$ cuadritos,

$$A_{ji} = \phi_j \circ \phi_i(S_0), \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Consideremos la situación en A_4 . Como ϕ_4 es una contracción afín y $S_1 \subset S_0$, el conjunto $\phi_4(S_1)$ está colocado en $\phi_4(S_0) = A_4$ de la misma forma en que S_1 está colocado dentro de S_0 . Ver figura 7.

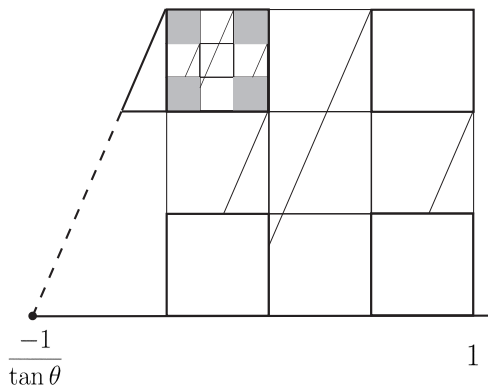


Figura 7: La *sombra* de A_4 coincide con la *sombra* de $\phi_4(S_1)$.

Por lo tanto la *sombra* que produce $\phi_4(S_1)$ es igual a la *sombra* de $\phi_4(S_0) = A_4$. Así,

$$z_\theta(A_4) = z_\theta(\phi_4(S_0)) = z_\theta(\phi_4(S_1)).$$

En los restantes cuadritos A_1 , A_2 y A_3 sucede algo completamente análogo.

En resumen, cada cuadrado de S_1 , digamos A_j , se reemplaza por cuatro cuadrillos cuando consideramos el conjunto S_2 . La *sombra* que producen estos cuadrillos es la misma sombra que produce A_j . Si nosotros sólo observamos la *sombra* en el eje horizontal el cambio de S_1 por S_2 nos pasa completamente inadvertido. Por eso

$$z_\theta(S_2) = z_\theta(S_1) \quad \text{y} \quad z_\theta(S_1) = z_\theta(S_0).$$

Para el análisis de la *sombra* de S_3 la situación es similar. Cada cuadrillo de S_2 se sustituye por cuatro cuadrillos más pequeños colocados como A_1, A_2, A_3 y A_4 están colocados en $S_0 = [0, 1] \times [0, 1]$. Por lo tanto al considerar las *sombras* de todos los cuadrillos de S_3 recuperamos la *sombra* de S_2 y, con ello, la *sombra* de S_0 .

Al seguir este procedimiento indefinidamente obtenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, la *sombra* de S_n es igual a la *sombra* de S_0 .

Proposición 7. *Sea θ tal que $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \arctan(3)$. Entonces $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ es el intervalo $[\frac{-1}{\tan\theta}, 1]$.*

Demostración. Para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $z_\theta(S_n) = z_\theta(S_0)$.

La igualdad $\mathcal{C} \times \mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ y la proposición 4 nos dicen que

$$z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} z_\theta(S_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} z_\theta(S_0) = z_\theta(S_0).$$

Por lo tanto $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = z_\theta(S_0) = [\frac{-1}{\tan\theta}, 1]$. □

Paso 2. Cuando el ángulo de incidencia θ del rayo de luz es igual a $\arctan(3)$ la *sombra* del punto \bar{c} toca el cuadrado A_1 en uno de sus vértices. Este es el último momento en el cual la *sombra* de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es un solo intervalo. Si θ es ligeramente mayor que $\arctan(3)$, entonces la *sombra* de \bar{c} cae en el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, lo que lleva a que $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ esté contenida en al menos dos intervalos ajenos. Ver la figura 8.

Este primer *rompimiento* del conjunto $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ sucede porque $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ no tiene puntos en la franja vertical $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times [0, 1]$. Como θ va de $\frac{\pi}{4}$ hacia $\frac{\pi}{2}$, los rayos de luz son cada vez más verticales y en algún momento $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ se tenía que romper irreparablemente en dos. Llamemos θ_1 al ángulo donde esto sucede, es decir, $\theta_1 = \arctan(3)$.

Este no es el único momento de crisis. Cuando el ángulo θ pasa el valor $\theta_2 = \arctan(3^2)$ la *sombra* de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ debe partirse en al menos cuatro intervalos, no hay remedio. Todo sucede porque hay dos nuevas franjas verticales de ancho $\frac{1}{3^2}$ que $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ no puede tocar. El siguiente rompimiento de $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ sucede en $\theta_3 = \arctan(3^3)$. Ver figura 9.

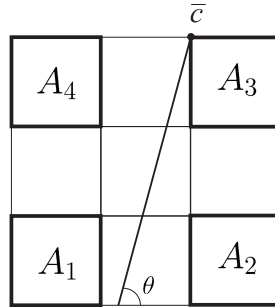


Figura 8: La *sombra* de \bar{c} cuando $\theta > \arctan(3)$.

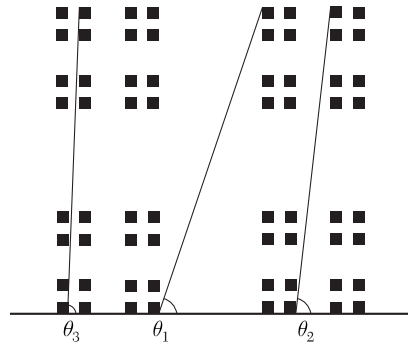


Figura 9: La *sombra* de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ se rompe en varios intervalos.

En la construcción del conjunto de Cantor \mathcal{C} se utilizaron los conjuntos \mathcal{C}_n , $n \in \mathbb{N}$. Recordemos que \mathcal{C}_n está formado por 2^n intervalos cerrados cada uno de ellos de longitud $\frac{1}{3^n}$. El conjunto $[0, 1] \setminus \mathcal{C}_n$ a su vez está formado por $2^n - 1$ intervalos abiertos. Las longitudes de estos intervalos son

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \dots, \frac{1}{3^n}.$$

Como $S_n = \mathcal{C}_n \times \mathcal{C}_n$, entonces $([0, 1] \times [0, 1]) \setminus S_n$ consta de $2^n - 1$ franjas verticales de la forma $(a, b) \times [0, 1]$. El ancho mínimo de una de estas franjas es $\frac{1}{3^n}$. Por eso cuando θ es mayor que $\arctan(3^n)$ la *sombra* $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ tiene al menos 2^n componentes.

Nuestra meta ahora es mostrar lo siguiente: Si el ángulo de inclinación de la *sombra* es tal que

$$\arctan(3^n) < \theta \leq \arctan(3^{n+1}),$$

entonces la *sombra* $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ está formada por exactamente 2^n intervalos ajenos.

Veamos el primer caso, $n = 1$, $\arctan(3) < \theta \leq \arctan(3^2)$.

Afirmamos que $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ está formado por dos intervalos, $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = I_1 \cup I_2$, tales que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

Sea $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\Psi_1(x, y) = (\frac{x}{3}, y)$. Esta función es lineal, es una contracción en la dirección horizontal por un factor de $\frac{1}{3}$ y mantiene intacta la altura de los puntos (x, y) . Al aplicarla al conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ obtenemos la siguiente igualdad:

$$\Psi_1(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \cap \left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \times [0, 1] \right).$$

La función Ψ_1 nos permite concluir que el conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es homeomorfo a una de sus partes: la que está sobre el intervalo $[0, \frac{1}{3}]$. La parte de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ que está sobre el intervalo $[\frac{2}{3}, 1]$ también es homeomorfa a $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, sólo es necesario considerar la función

$$\Psi_2(x, y) = \Psi_1(x, y) + \left(\frac{2}{3}, 0\right).$$

Ambas, Ψ_1 y Ψ_2 , son funciones afines, por lo tanto transforman rectas en rectas. Sea \mathcal{L} la recta cuya inclinación está dada por el ángulo γ ,

$$\mathcal{L} = \{(x, y) | (x, y) = (x_0, y_0) + t(\cos\gamma, \sen\gamma)\}.$$

La imagen de \mathcal{L} bajo Ψ_1 , $\Lambda = \Psi_1(\mathcal{L})$, es una recta con ángulo de inclinación η . Como Ψ_1 preserva alturas y contrae la base, ver figura 10, entonces $\tan(\eta) = 3 \tan(\gamma)$. Es decir,

$$\eta = \arctan(3 \tan(\gamma)). \quad (6)$$

Un fenómeno análogo sucede al aplicar Ψ_2 .

Sabemos que cada recta \mathcal{L} con inclinación γ ,

$$\arctan(3) \leq \gamma \leq \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \quad (7)$$

que cruza el cuadrado S_0 , $\mathcal{L} \cap S_0 \neq \emptyset$, corta al menos una vez al conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Aplicando Ψ_1 a la recta \mathcal{L} y a $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ obtenemos que la recta $\Lambda = \Psi_1(\mathcal{L})$ corta al conjunto $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \cap \left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \times [0, 1]\right)$. La inclinación de Λ , que llamaremos θ , está dada por: $\theta = \arctan(3 \tan(\gamma))$. Utilizando (6) y (7), obtenemos:

$$3 \leq \tan(\gamma) \leq 1, \quad 3^2 \leq 3 \tan(\gamma) \leq 3.$$

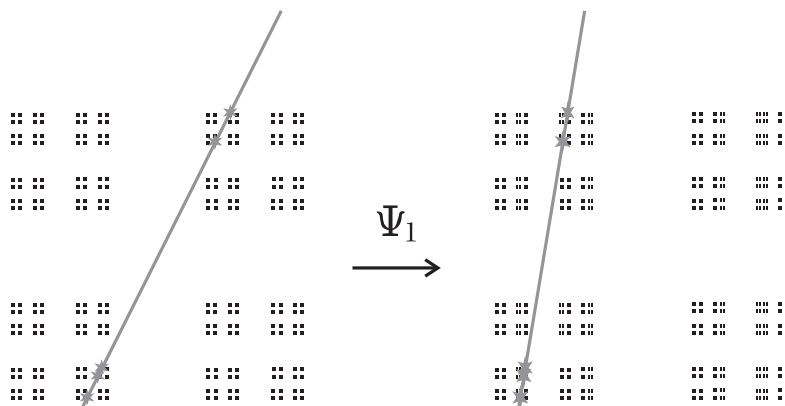


Figura 10: Aplicando Ψ_1 al conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ y a una recta que lo corta.

Por lo tanto, θ cumple la siguiente relación:

$$\arctan(3^2) \leq \theta \leq \arctan(3).$$

Así, un haz de rayos paralelos de luz con esta inclinación θ provoca que la *sombra* del conjunto $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \cap ([0, \frac{1}{3}] \times [0, 1])$ se convierta en un intervalo cerrado,

$$z_\theta \left((\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \cap \left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \times [0, 1] \right) \right) = I_1.$$

La situación es análoga al aplicar Ψ_2 .

En conclusión, $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ es la unión de dos intervalos, $I_1 \cup I_2$, ajenos.

El caso general se puede trabajar de manera similar. Dada n en \mathbb{N} , la función que debemos considerar ahora es $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\Psi(x, y) = \left(\frac{x}{3^n}, y \right).$$

Si denotamos como B_1, B_2, \dots, B_{2^n} a los 2^n intervalos cerrados que forman \mathcal{C}_n , obtenemos lo siguiente:

- Para toda j , $1 \leq j \leq 2^n$, $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es homeomorfo al conjunto

$$(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \cap (B_j \times [0, 1]).$$

- Si $\arctan(3^n) \leq \theta \leq \arctan(3^{n+1})$, entonces

$$z_\theta((\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \cap (B_j \times [0, 1]))$$

es un intervalo cerrado.

Todo lo anterior nos lleva a la siguiente conclusión.

Proposición 8. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea θ tal que*

$$\arctan(3^n) < \theta \leq \arctan(3^{n+1}).$$

Entonces la sombra $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ está formada por exactamente 2^n intervalos cerrados.

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{C}_n = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{2^n}$ como antes. Para cada j , $1 \leq j \leq 2^n$, sea

$$D_j = (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \cap (B_j \times [0, 1]).$$

Entonces,

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{2^n}.$$

Si $\arctan(3^n) < \theta \leq \arctan(3^{n+1})$, entonces para cada j , $1 \leq j \leq 2^n$, se tiene que $z_\theta(D_j)$ es un intervalo cerrado. Esto nos dice que la *sombra*

$$z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = z_\theta(D_1) \cup z_\theta(D_2) \cup \dots \cup z_\theta(D_{2^n})$$

no puede tener más de 2^n componentes.

Por otro lado, el número de componentes de esta *sombra* no puede ser menor que 2^n puesto que θ es mayor que $\arctan(3^n)$.

Por lo tanto, $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ está formada por exactamente 2^n intervalos cerrados. \square

En resumen, cuando la inclinación θ va de $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$, la *sombra* de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ va transformándose. Primero es sólo un intervalo, luego dos intervalos, luego cuatro, etcétera.

Estos cambios obedecen a la sucesión de ángulos:

$$\theta_1 = \arctan(3), \theta_2 = \arctan(3^2), \dots, \theta_n = \arctan(3^n), \dots$$

Finalmente cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, se tiene que la *sombra* $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ es el conjunto de Cantor \mathcal{C} . Obsérvese que sólo en $\theta = \frac{\pi}{2}$ la *sombra* es un conjunto de Cantor.

Dada la simetría del conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, cuando θ viaja de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{4}$ el proceso que sufre la *sombra* $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ es el inverso del descrito antes. Ahora su forma va de un conjunto de Cantor a un intervalo, pasando por periodos donde $z_\theta(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ está formada por exactamente 2^n intervalos cerrados.

Utilizando lo desarrollado hasta este momento es posible describir la *sombra* de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ en todos los ángulos $\theta \in (0, \pi)$.

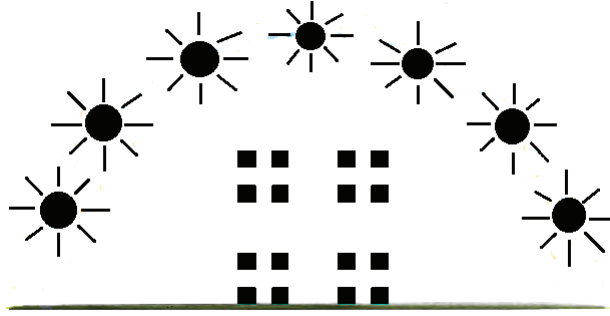


Figura 11: Un mundo plano.

Imaginemos a $A = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ contenido en un mundo plano. La sombra es producida gracias al movimiento del Sol. Cuando $\theta = 0$, amanece. El Sol está al *final* del eje horizontal. Cuando $\theta = \pi$, anochece. Inmediatamente después del amanecer, θ positiva pero muy pequeña, la *sombra* de A es muy larga y está formada por una cantidad finita (una potencia de 2) de intervalos cerrados. Esta cantidad tiende a infinito si θ tiende a cero, pero dado que θ es positiva la *sombra* nunca tiene una infinidad de componentes inmediatamente después del amanecer. Cuando θ va hacia $\frac{\pi}{4}$ la *sombra* siempre está formada por una cantidad finita de intervalos que va decreciendo de potencia de 2 en potencia de 2 hacia el $1 = 2^0$. Cuando θ está en el intervalo que va de $\arctan(\frac{1}{3})$ a $\arctan(3)$, la *sombra* de A es solamente un intervalo. Lo que sucede de $\arctan(3)$ hasta $\frac{\pi}{2}$ ya lo conocemos, la *sombra* va hacia al conjunto de Cantor \mathcal{C} . Sólo al mediodía la *sombra* es un conjunto de Cantor. Gracias a la simetría de A , mientras el Sol sigue su camino hacia el atardecer las mutaciones que vive la *sombra* siguen la ruta inversa que siguieron en la primera parte del día.

5. La proyección ortogonal de \mathcal{M} en toda dirección es un intervalo

Usaremos inducción para mostrar que en toda dirección la *proyección ortogonal* del conjunto \mathcal{M} , $\pi_\theta(\mathcal{M})$, es un intervalo. Para ello, mostraremos que cualquier recta que atraviesa el cuadrado unitario, $S_0 = [0, 1] \times [0, 1]$, intersecta a \mathcal{M} también.

Recordemos que en la construcción de \mathcal{M} ,

$$\mathcal{M}_1 = \Phi_{\mathcal{M}}(S_0) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5,$$

donde A_5 es el cuadrado rotado un ángulo $\frac{\pi}{4}$ que está en el centro de \mathcal{M}_1 . Además para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{M}_n = (\Phi_{\mathcal{M}})^n(S_0).$$

Proposición 9. *Sea \mathcal{L} una recta que atraviesa S_0 , $\mathcal{L} \cap S_0 \neq \emptyset$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_n \neq \emptyset$.*

Demostración. Dada una recta \mathcal{L} que interseca S_0 , se tiene que $\mathcal{L} \cap S_0$ es un intervalo cerrado. A los extremos de este intervalo los llamaremos *extremos de \mathcal{L}* .

Base de inducción. Sea \mathcal{L} una recta que atraviesa el cuadrado unitario. Demostraremos que \mathcal{L} interseca a \mathcal{M}_1 . Para ello consideremos el conjunto $\mathcal{M}_1^* = \mathcal{M}_1 \setminus A_5$ y los segmentos:

$$l_1 = \left\{ (x, y) \mid y = 0, \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \right\},$$

$$l_2 = \left\{ (x, y) \mid x = 1, \frac{1}{3} < y < \frac{2}{3} \right\},$$

$$l_3 = \left\{ (x, y) \mid y = 1, \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \right\},$$

y

$$l_4 = \left\{ (x, y) \mid x = 0, \frac{1}{3} < y < \frac{2}{3} \right\}.$$

Si un extremo de \mathcal{L} no pertenece a la unión $l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4$, entonces ese extremo está en alguno de los cuadrillos A_i , $1 \leq i \leq 4$. En este caso \mathcal{L} interseca a \mathcal{M}_1^* y, por tanto, interseca a \mathcal{M}_1 .

Así, las rectas \mathcal{L} que podrían no intersecar a \mathcal{M}_1^* son aquéllas cuyos extremos están en algún segmento l_i , con $1 \leq i \leq 4$.

Si los extremos de \mathcal{L} están en segmentos adyacentes, digamos en l_i y l_{i+1} , $1 \leq i \leq 3$, entonces esa recta interseca al cuadrado de \mathcal{M}_1^* que es adyacente a dichos segmentos, A_{i+1} . De manera análoga, si esa recta \mathcal{L} tiene extremos en l_4 y l_1 , entonces ella corta también al cuadrado A_1 . Por lo tanto, si $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_1^* = \emptyset$, entonces los extremos de \mathcal{L} están en segmentos opuestos: en l_1 y l_3 , o en l_2 y l_4 . Ver figura 12.

Luego, si consideramos $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1^* \cup A_5$ ocurre que cualquier recta \mathcal{L} que tiene sus extremos en segmentos opuestos interseca al cuadrado A_5 , puesto que toda recta de este tipo interseca a alguna de las diagonales principales de A_5 . Así $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_1 \neq \emptyset$.

Hipótesis de Inducción: Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que toda recta que atraviesa S_0 corta a \mathcal{M}_n también.

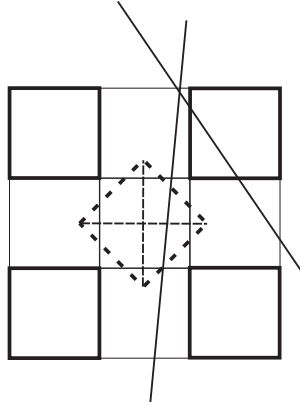


Figura 12: La recta \mathcal{L} corta al conjunto \mathcal{M}_1 .

Sea \mathcal{L} una recta que atraviesa S_0 . Demostraremos que $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_{n+1} \neq \emptyset$, donde $\mathcal{M}_{n+1} = \Phi_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}_n) = \bigcup_{i=1}^5 \phi_i(\mathcal{M}_n)$.

El argumento que presentamos en esta parte sigue una idea que F. Mendivil y T. D. Taylor utilizan en [9].

Observemos primero que $\phi_i(\mathcal{M}_n) \subset A_i$, y que si $i \neq j$, entonces $\phi_i(\mathcal{M}_n) \cap A_j = \emptyset$. Por tanto,

$$\phi_i(\mathcal{M}_n) = \mathcal{M}_{n+1} \cap A_i.$$

Como $\mathcal{L} \cap S_0 \neq \emptyset$, $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_1 \neq \emptyset$. Entonces existe A_i , para alguna i , $1 \leq i \leq 5$, tal que $\mathcal{L} \cap A_i \neq \emptyset$. Luego, dicha intersección es un segmento de recta en A_i . Así $\phi_i^{-1}(\mathcal{L} \cap A_i)$ es un segmento l^Λ de una recta \mathcal{L}^Λ que atraviesa S_0 , $l^\Lambda = S_0 \cap \mathcal{L}^\Lambda$. Y, por hipótesis de inducción, $l^\Lambda \cap \mathcal{M}_n \neq \emptyset$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \phi_i(l^\Lambda \cap \mathcal{M}_n) &\neq \emptyset, \\ \phi_i(l^\Lambda) \cap \phi_i(\mathcal{M}_n) &\neq \emptyset, \\ \mathcal{L} \cap A_i \cap \phi_i(\mathcal{M}_n) &\neq \emptyset, \\ \mathcal{L} \cap (\mathcal{M}_{n+1} \cap A_i) &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_{n+1} \neq \emptyset$. □

Teorema 10. *Sea \mathcal{L} una recta tal que $\mathcal{L} \cap S_0 \neq \emptyset$. Entonces*

$$\mathcal{L} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n \right) \neq \emptyset.$$

Es decir, $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$.

Demostración. Si $\mathcal{L} \cap S_0 \neq \emptyset$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_n \neq \emptyset$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathcal{M}_{n+1} \subset \mathcal{M}_n$, entonces $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_{n+1} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{M}_n$. Así $\{\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos compactos encajados, todos ellos distintos del vacío.

Entonces, por la proposición 3,

$$\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \mathcal{L} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_n) \neq \emptyset. \quad \square$$

En el siguiente corolario alcanzamos nuestra meta.

Corolario 11. *Para todo ángulo θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se tiene que*

$$\pi_{\theta}(\mathcal{M}) = \pi_{\theta}(S_0).$$

Demostración. La demostración se sigue de manera inmediata a partir del teorema 10. \square

En resumen, \mathcal{M} es un conjunto de Cantor en el plano tal que para todo ángulo θ , $\theta \in [0, 2\pi]$, su proyección ortogonal, $\pi_{\theta}(\mathcal{M})$, coincide con la proyección ortogonal del cuadrado unitario S_0 . Así esta proyección es siempre un intervalo. Como los cuatro vértices de S_0 forman parte de \mathcal{M} y ellos no están alineados, este intervalo tiene longitud mayor o igual a 1 y menor o igual a $\sqrt{2}$.

6. Comentarios finales

En relación al conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, es un hecho conocido que su *sombra* cuando el ángulo es $\frac{\pi}{4}$ es el intervalo $[-1, 1]$. Sin embargo desconocemos quien fue el primero en hacer esta observación. El estudio de las *sombras* de este conjunto para ángulos distintos a $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{4}$, hasta donde sabemos, no se había hecho.

Los autores F. Mendivil y T. D. Taylor muestran en [9] un conjunto de Cantor en el plano tal que todas sus *proyecciones ortogonales* son intervalos. Este ejemplo es distinto a nuestra constelación \mathcal{M} .

Los intervalos en \mathbb{R} tienen dos propiedades importantes: son conjuntos que a la vez son conexos y convexos. Así el conjunto \mathcal{M} tiene la propiedad de que en toda dirección su *proyección ortogonal* es un conjunto conexo y convexo. Si bien en \mathbb{R} estas dos propiedades son indistinguibles, $A \subset \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es convexo, en \mathbb{R}^n con $n \geq 2$ la situación cambia sensiblemente: Por un lado, existen conjuntos conexos que no son convexos; por el otro, todo conjunto convexo es conexo.

Así la meta de encontrar o construir en \mathbb{R}^3 un conjunto con propiedades semejantes a las que tiene la constelación \mathcal{M} se divide en dos tareas. Se trata ahora, en esencia, de buscar respuestas a estas dos preguntas:

- ¿Existe un conjunto de Cantor en \mathbb{R}^3 tal que todas sus *proyecciones ortogonales* sean conjuntos convexos?
- ¿Existe un conjunto de Cantor en \mathbb{R}^3 tal que todas sus *proyecciones ortogonales* sean conjuntos conexos?

La primera pregunta tiene una respuesta negativa. Un resultado de John Cobb, obtenido en 1994, nos niega la existencia de un conjunto de Cantor en \mathbb{R}^3 para el cual las *proyecciones ortogonales* en todos los planos sean conjuntos convexos.

Teorema 12. (*J. Cobb, [3]*) *No existe un conjunto de Cantor en \mathbb{R}^m , $m \geq 3$, cuyas proyecciones ortogonales sobre todos los $(m - 1)$ -planos sean conjuntos convexos.*

Hasta donde sabemos la segunda pregunta es una pregunta abierta. Dada la importancia que ella tiene la citamos tal como la planteó John Cobb.

Pregunta 13. (*J. Cobb, [3]*) *¿Existen conjuntos de Cantor en \mathbb{R}^m , con $m \geq 3$, cuyas proyecciones ortogonales sobre todos los $(m - 1)$ -planos son conjuntos conexos?*

Karol Borsuk nos proporciona en [2] un ejemplo de un conjunto de Cantor en el espacio \mathbb{R}^3 cuyas *proyecciones ortogonales* sobre todos los planos poseen puntos interiores.

En los trabajos de Mariana Csörnyei, [4], de Kemal Ilgar Eroglu, [6], y de Harold Parks, [11], se estudian más propiedades de las *proyecciones ortogonales*.

El libro de Kenneth Falconer [7] contiene una muy buena introducción al estudio de las *proyecciones ortogonales*. En particular, ahí se estudia la relación entre las proyecciones de un conjunto A y su *dimensión de Hausdorff*.

La manera en que presentamos las constelaciones \mathcal{M} y $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ nos permite concluir que ambas son fractales. Una introducción al estudio de este tipo de conjuntos se puede encontrar en [1], en [5] y en [7]. Un poco más avanzado, pero en la misma dirección, recomendamos leer el trabajo de John Hutchinson [8].

Agradecimientos. Muchísimas gracias a nuestra compañera Angélica Macías Oliva. Ella elaboró la mayoría de las imágenes que aquí aparecen.

Bibliografía

1. G. Arenas, R. Isaacs, S. Sabogal, y H. Méndez, *Sistemas Dinámicos Discretos y Fractales*, Vínculos Matemáticos, tomo 87, Facultad de Ciencias, UNAM, 2009.
2. K. Borsuk, An example of a simple arc in space whose projection in every plane has interior points, *Fundamenta Mathematicae* **34** (1947) 272–277.
3. J. Cobb, Raising dimension under all projections, *Fundamenta Mathematicae* **144** (1994) 119–127.
4. M. Csörnyei, On the visibility of invisible sets, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica* **25** (2000) 417–421.
5. G. A. Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1992.
6. K. I. Eroglu, On planar self-similar sets with a dense set of rotations, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica* **32** (2007) 409–424.
7. K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley, New York, 1990.
8. J. E. Hutchinson, Fractals and self-similarity, *Indiana University Mathematics Journal* **30** (1981) 713–747.
9. F. Mendivil y T. D. Taylor, Thin sets with fat shadows: projections of Cantor sets, *American Mathematical Monthly* **115** (2008) 451–456.
10. S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Marcel Dekker, New York, 1992.
11. H. R. Parks, Purely unrectifiable sets with large projections, *The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications* **6** (2009) 1–10.
12. S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, New York, 2004.