

# Algunos aspectos de la teoría topológica de gráficas

Lorena Armas-Sanabria

loenaarmas089@gmail.com

Mika Olsen

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas

Artificios 40, Col. Miguel Hidalgo

Del. Alvaro Obregón, C.P. 01120 México D.F., MEXICO

olsen@matem.unam.mx

Pilar Valencia-Saravia

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México

Circuito Exterior, Ciudad Universitaria

Del. Coyoacán, C.P. 04510 México D.F., MEXICO

pilar.valencia@gmail.com

## Resumen

Es interesante ver cómo dos ramas de las matemáticas, la Teoría de Gráficas y la Topología, aparentemente ajenas, se combinan de tal manera que surge una nueva teoría, la llamada *Teoría Topológica de Gráficas*, en la cual se consideran problemas muy interesantes. Aquí abordamos parte de los resultados conocidos en esta teoría respecto al problema de encajamiento de gráficas en superficies cerradas, orientables o no, y cómo esto da cabida al problema de encontrar un conjunto completo, finito y minimal de menores prohibidos para tales encajes. En particular, consideramos las gráficas Snarks y enlistamos algunos

---

Palabras clave: Problema de los cuatro colores, gráficas Snarks, Superficies cerradas, Menores prohibidos.

resultados conocidos sobre su género orientable y no orientable. También consideramos el concepto de encaje de una gráfica en un libro.

## 1. Introducción

El objetivo del presente artículo es ilustrar como dos teorías aparentemente ajenas se conjugan para formar una nueva: la Teoría Topológica de Gráficas.

Un problema muy antiguo, el Teorema de los Cuatro Colores, surge al considerar un mapa sobre la esfera, donde cada país tiene una curva cerrada como frontera y demostrar que este mapa se puede colorear con a lo más 4 colores, de tal forma que cualesquiera dos países que comparten una frontera tengan distinto color.

Este problema lo podemos traducir a un problema de gráficas. Construimos una gráfica del mapa dado tomando un vértice por cada país y una arista entre dos vértices si los países correspondientes comparten una frontera. La gráfica obtenida es plana. Entonces la pregunta es: ¿Dada cualquier gráfica plana, será posible dar una coloración de los vértices, utilizando 4 colores únicamente, de manera que no haya dos vértices adyacentes con el mismo color? Pasaron muchos años para que este problema se resolviera y fueron los matemáticos Haken y Appel, quienes en 1976, dieron una prueba afirmativa y correcta [1, 2].

En el problema de los cuatro colores se consideran gráficas que se pueden dibujar sobre la esfera. Un problema en la Teoría Topológica de Gráficas surge al considerar una superficie cerrada, conexa y orientable (o no orientable) y una gráfica  $G$ , y preguntarnos si la gráfica  $G$  se puede dibujar en la superficie dada sin que sus aristas se intersequen excepto en los vértices. El problema anterior aunque es fácil de enunciar resulta ser difícil de solucionar.

En el presente trabajo revisamos algunos resultados conocidos referentes a estos problemas, es decir, el problema de encajamiento de gráficas en superficies orientables o no orientables. En la Sección 2, damos algunas de las definiciones y resultados conocidos sobre este tema. En la Sección 3, describimos cómo estos problemas se relacionan con los menores prohibidos minimales. En la Sección 4, describimos a las gráficas Snarks y damos algunos resultados sobre el problema de encaje para ellas. En la Sección 5, enunciamos el problema de encaje de una gráfica en un libro así como los resultados que hay para ciertas clases de gráficas y finalmente terminamos con un breve comentario.

## 2. Definiciones y resultados conocidos

Una *gráfica*  $G$  consiste de un conjunto de vértices  $V(G)$  o simplemente  $V$  y un conjunto (tal vez vacío) de aristas  $E(G)$  o simplemente  $E$ , donde cada arista es un subconjunto de dos elementos del conjunto de vértices. Denotaremos la gráfica por  $G = (V, E)$  (ver Fig. 1). Dos vértices  $u, v \in V(G)$  son *adyacentes*, vecinos o están unidos si  $uv \in E(G)$ . El *grado* del vértice  $u$  es el número de vértices en  $G$  que son adyacentes a  $u$ . Un *lazo* es una arista que une un vértice consigo mismo. Las gráficas que consideramos no tienen lazos por la manera en que definimos las aristas.

Dos gráficas  $G_1, G_2$  son *isomorfas*,  $G_1 \cong G_2$ , si existe una función biyectiva que manda los vértices de una en los vértices de la otra de tal forma que dos vértices son adyacentes si y sólo si las imágenes de esos vértices bajo la función también son adyacentes.

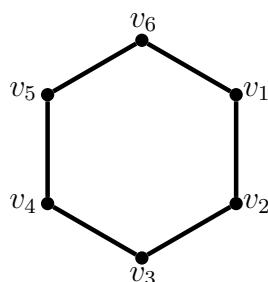


Figura 1: Una gráfica con 6 vértices y 6 aristas.

Dos gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son *homeomorfas* si  $G_1$  puede ser transformada en una gráfica isomorfa a  $G_2$  aplicando un número finito de veces (ver Fig. 2) las siguientes operaciones:

- i) Subdivisión de arista.  
Sea  $uv \in E(G)$ . Se elimina la arista  $uv$ , se añade el vértice  $w$  así como las aristas  $uw, wv$ .
- ii) Sustituir una arista por una trayectoria.  
Sea  $(u, w, v)$  una trayectoria en  $G$ , tal que el número de aristas incidentes en  $w$  es 2 y  $d(w) = 2$ . Se elimina el vértice  $w$  así como las aristas  $uw, wv$  y se añade la arista  $uv$ .

Por otro lado, una *superficie*  $S$  cerrada (compacta y sin frontera), conexa, orientable o no, es una 2-variedad topológica de Hausdorff, es decir, un espacio topológico conexo en el que cada punto tiene una



Figura 2: Subdivisión y composición de aristas.

vecindad homeomorfa a un disco abierto y además dados dos puntos cualesquiera éstos tienen vecindades disjuntas.

Decimos que  $S$  es la *suma conexa* de dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  si  $S$  se puede obtener de las superficies  $S_1$  y  $S_2$  quitándoles un disco pequeño abierto a cada una e identificando las fronteras de estos discos (que son dos circunferencias) en las superficies. Como ejemplos de superficies cerradas, conexas y orientables tenemos a la esfera, el toro, el doble toro, y en general la suma conexa de  $g$  toros. También podemos representar a la superficie cerrada, conexa y orientable como la identificación de un disco con otro disco con  $2g$  bandas (identificando las fronteras de los discos) como se muestra en la Fig. 4.

Otro concepto referente a las superficies es su *género*. El género de la esfera es cero, del toro es uno y en general, el género de la suma conexa de  $g$  toros es  $g$ . Podemos representar a la superficie cerrada y orientable de género  $g$  como una esfera con  $g$  asas (ver Fig. 3).

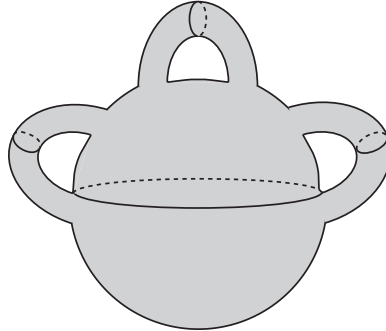


Figura 3: Superficie orientable cerrada de género 3.

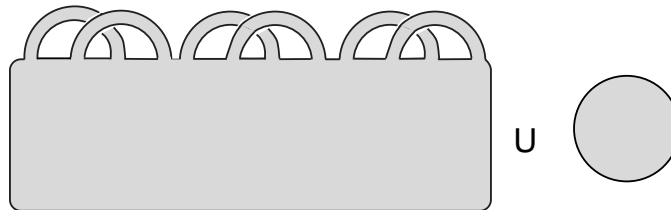


Figura 4: Superficie orientable de género 3 vista como un disco unión otro disco con 6 bandas.

Ejemplos de superficies cerradas, conexas no orientables son el plano proyectivo (ver Fig. 5) que es de género no orientable uno, la botella de Klein (ver Fig. 6) de género no orientable dos y la suma conexas de  $r$  planos proyectivos que es de género no orientable  $r$ , el cual representa el número de bandas de Möbius que tiene la superficie no orientable. Similarmente, podemos representar a la superficie cerrada, conexas y no orientable como la superficie no orientable obtenida al considerar un disco con otro disco  $r$  bandas torcidas e identificar las fronteras de ambos discos, las cuales son circunferencias (ver Fig. 7).

Dada una superficie podemos considerar su *característica de Euler*, para calcularla consideramos una triangulación de la superficie  $S$  que consta de  $V$  vértices,  $E$  aristas y  $C$  caras, entonces la característica de Euler de  $S$  se define como  $\chi(S) = V - E + C$ .

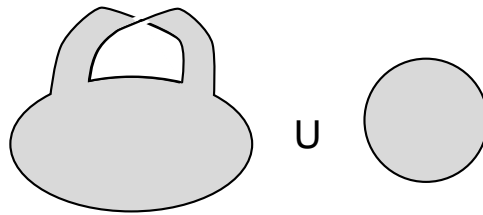


Figura 5: Plano proyectivo.

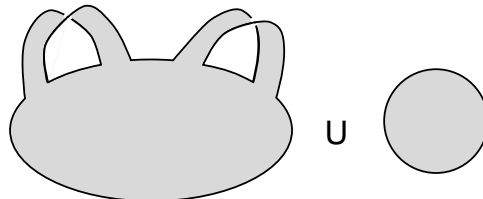


Figura 6: Botella de Klein

Por el teorema de clasificación de superficies cerradas [29] tenemos que éstas son todas las posibilidades, ya que si sumamos un plano proyectivo con un toro lo que resulta es la suma de un plano proyectivo y una botella de Klein.

Dada una gráfica  $G$  y una superficie  $S$ , decimos que  $G$  puede encajarse en  $S$  si la gráfica  $G$  se puede dibujar sobre la superficie de tal forma que las aristas no se intersequen excepto en los vértices. En la Fig. 8 vemos la gráfica de Petersen encajada en un plano proyectivo menos un disco.

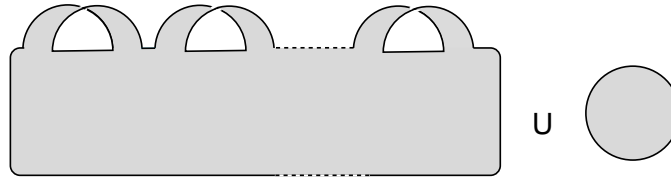


Figura 7: Superficie no orientable de género  $r$  vista como la unión de un disco con otro disco con  $r$  bandas torcidas, obtenida identificando las fronteras.

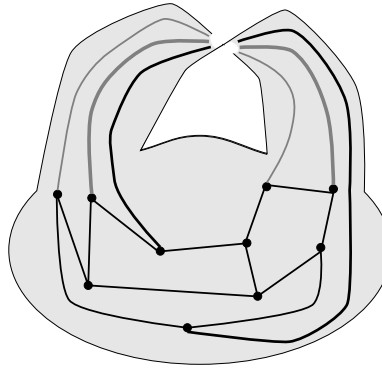


Figura 8: La gráfica de Petersen encajada en un plano proyectivo menos un disco.

Sea  $G$  una gráfica encajada en una superficie  $S$ . A las componentes conexas de  $S - G$  las llamamos caras; nótese que cada cara es una región abierta de  $S$ . Decimos que un encaje de una gráfica en una superficie es 2-celular, si todas las caras son discos. En la Fig. 9 tenemos un encaje que es 2-celular.

Dada una gráfica  $G(V, E)$ , construimos su gráfica dual  $G^*(V', E')$  tomando un vértice  $v'$  por cada región de la gráfica  $G$  y una arista  $e'$  entre dos vértices  $v'_i, v'_j$  si las regiones tienen una arista en común. Los encajes poliedrales son encajes tales que al considerar la gráfica dual  $G^*$  ésta no tiene lazos ni aristas múltiples. En las Figuras 9 y 10 podemos ver estos dos tipos de encajes. La Fig. 9 ilustra un encaje 2-celular que no es poliedral, donde la parte de arriba muestra el encaje en un toro estándar en  $\mathbb{R}^3$  y la parte de abajo muestra un encaje en un toro formado a partir de un cuadrado al identificar lados opuestos. De la misma manera, la Fig. 10 muestra dos ilustraciones de un encaje poliedral.

Dada una gráfica  $G$  nos preguntamos por el *género* de la superficie cerrada, conexa y orientable más pequeña en la cual podemos encajarla.

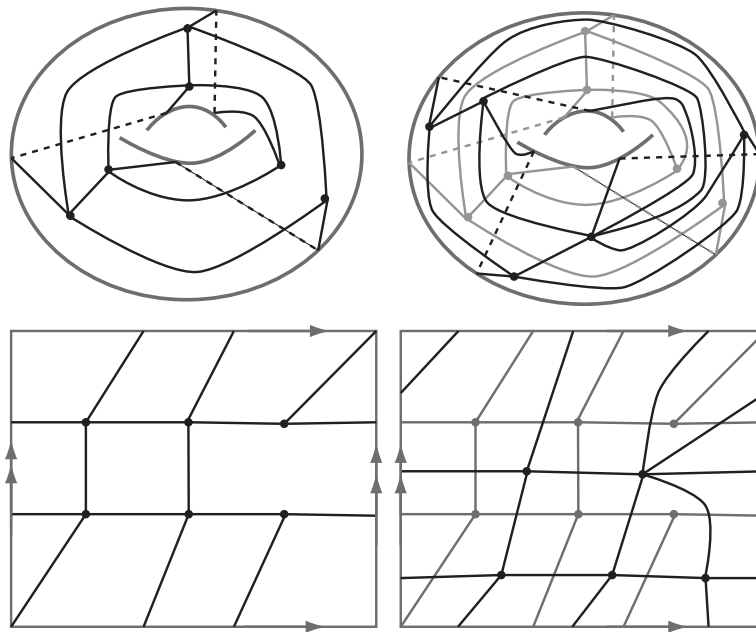


Figura 9: Encaje 2-celular y su dual.

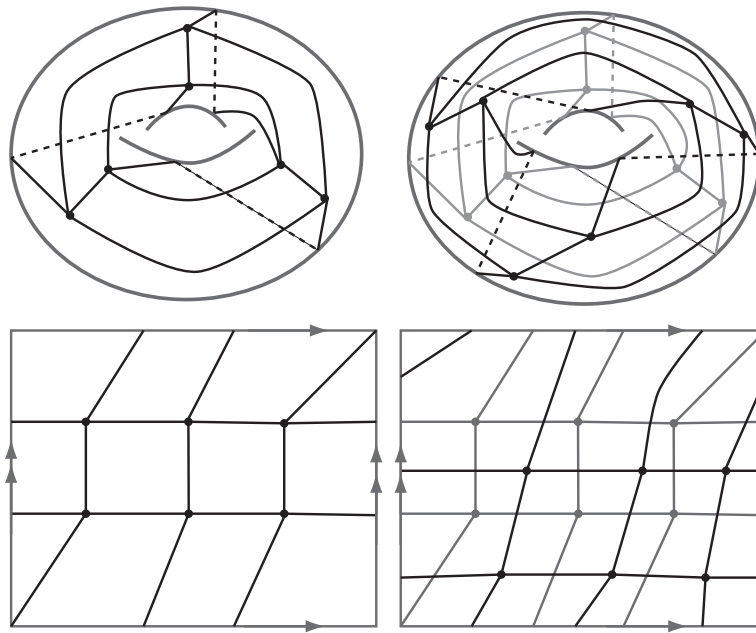


Figura 10: Encaje poliedral y su dual.

Esto se define como el género orientable  $\gamma(G)$  de la gráfica. De igual forma se puede considerar el problema anterior pero ahora tomando una superficie cerrada, conexa y no orientable y en este caso tendremos

el género no orientable  $\gamma_{no}(G)$ .

Ahora damos un método para encontrar una superficie donde se encaja una gráfica dada  $G$ . Por cada vértice de grado  $n$ , tomamos un  $n$ -ágono, y por cada arista tomamos un rectángulo. Si una arista es incidente a un vértice, entonces pegamos uno de los lados cortos del rectángulo correspondiente con uno de los lados del polígono. El resultado al hacer todas las identificaciones es una superficie con frontera, la cual consiste de varias curvas simples cerradas. Para obtener una superficie cerrada, pegamos discos a lo largo de las componentes de la frontera. Si queremos que el resultado sea una superficie orientable, consideramos que cada uno de los rectángulos y polígonos tiene dos lados, digamos uno positivo y otro negativo, y hacemos las identificaciones de modo que los lados positivos coincidan. Si queremos una superficie no orientable, pegamos todas las aristas como antes, excepto una, que sea parte de un ciclo, la cual pegamos de manera torcida. Esto prueba que cualquier gráfica se puede encajar en una superficie orientable y una no orientable de modo que las regiones complementarias son discos (excepto si la gráfica es un árbol). Damos un ejemplo de esta construcción en la Fig. 11 para la gráfica  $K_5$ . Al pegar los polígonos con los rectángulos nos queda una superficie con cinco componentes en la frontera, en la figura ya se taparon cuatro de estos con discos y falta pegar un disco más. El resultado es un encaje 2-celular de  $K_5$  en el toro.

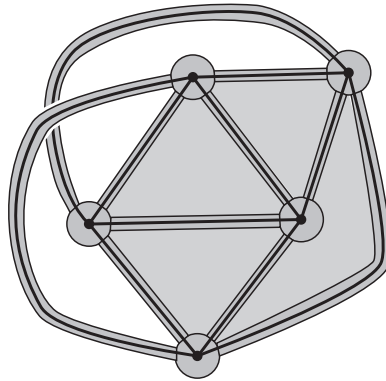


Figura 11: Construyendo la superficie de encajamiento a partir de la gráfica. La figura muestra un disco con 2 asas, para obtener un toro sólo falta pegar otro disco identificando las fronteras.

O sea, dada  $G$ , obtenemos una superficie con frontera  $N(G)$ , digamos que tiene  $N$  componentes en la frontera, y al tapar estos círculos con discos obtenemos una superficie cerrada  $S$ . Si  $G$  tiene  $V$  vértices y  $E$  aristas, recordemos que la *característica de Euler* está definida como



$\chi(S) = V - E + N$ , y ya que en el caso orientable  $\chi(S) = 2 - 2g$  de aquí podemos calcular el género orientable de  $S$ .

Nótese que la superficie obtenida por el método descrito, no necesariamente realiza el género orientable o no orientable de la gráfica, pues la superficie obtenida depende de la representación geométrica de  $G$ . Una superficie así obtenida depende de un sistema de rotación en cada vértice, es decir, de una numeración dada a las aristas incidentes a cada vértice, y hay muchas formas de asignar esta numeración [32]. Esto ilustra la dificultad de calcular  $\gamma(G)$  y  $\gamma_{no}(G)$  para una gráfica dada.

Los problemas anteriores aunque son fáciles de enunciar resultan ser difíciles de solucionar y sólo se han encontrado soluciones para ciertas familias de gráficas, como por ejemplo las gráficas completas [38].

Si una gráfica  $G$  se encaja en una superficie  $S$  que realiza  $\gamma(G)$  o  $\gamma_{no}(G)$ , entonces las regiones complementarias del encaje son discos abiertos, ya que si una de esas regiones no es un disco, al cortarla por esa región y tapar cada frontera con un disco obtenemos un encaje en una superficie de género menor. Si una gráfica  $G$  se puede encajar en una superficie  $S$ , entonces también se puede encajar en una superficie de género mayor, pero pudiera ser que las regiones complementarias del encaje, o sea las caras, no sean discos abiertos. Al máximo género de una superficie donde la gráfica  $G$  se puede encajar de modo que las caras son discos se le llama el *género máximo* de  $G$ , y se denota por  $\gamma_M(G)$ . Se tiene que  $\gamma(G) \leq \gamma_M(G)$ . De igual manera se puede definir el género máximo no orientable, denotado por  $\gamma_{noM}$ . Entonces tenemos las siguientes desigualdades [38].

**Teorema 2.1.** *Sea  $G$  una gráfica con  $V$  vértices y  $E$  aristas. Entonces*

$$E/6 - V/2 + 1 \leq \gamma(G) \leq \gamma_M(G) \leq (E - V + 1)/2,$$

$$E/3 - V + 2 \leq \gamma_{no}(G) \leq \gamma_{noM}(G) \leq E - V + 1,$$

$$\gamma_{no}(G) \leq 2\gamma(G) + 1.$$

*Demostración.* Supongamos que la gráfica  $G$  está encajada en una superficie orientable  $S$  de modo que las regiones complementarias son discos (el encaje no es necesariamente poliedral). Sea  $C$  el número de caras del encaje (discos complementarios) de  $G$ . Como estamos suponiendo que  $G$  es una gráfica simple, no hay caras de uno o dos lados. Para cada  $i \geq 3$ , supongamos que el número de caras de  $i$  lados es  $C_i$ . Entonces  $C = \sum C_i$ . Al tomar la suma  $\sum iC_i$ , contamos dos veces cada arista, pues cada arista está en la frontera de dos caras (si el encaje no es poliedral podría haber una arista  $e$  tal que la gráfica dual  $G^*$

tenga un lazo  $\alpha$  que la interseque en un solo punto. En este caso al contar el número de lados de la cara que contiene a la arista  $e$ , contamos dos veces a dicha arista). Esto implica que  $\sum iC_i = 2E$ . Esta última igualdad la podemos escribir como  $\sum 3C_i + \sum(i-3)C_i = 2E$ , luego  $3C + \sum(i-3)C_i = 2E$ . Como  $\sum(i-3)C_i \geq 0$  tenemos que  $3C \leq 2E$ , o sea  $C \leq 2E/3$ .

Por otro lado, hay al menos una cara, o sea  $C \geq 1$ . Como la característica de Euler de  $S$  es  $\chi(S) = V - E + C$ , tenemos

$$V - E + 1 \leq \chi(S) \leq V - E + \frac{2E}{3}.$$

Sabemos que  $\chi(S) = 2 - 2g$  [38], donde  $g = g(S)$  es el género de  $S$  o sea

$$V - E + 1 \leq 2 - 2g \leq V - E + \frac{2E}{3}.$$

De  $V - E + 1 \leq 2 - 2g$ , obtenemos

$$g \leq \frac{1 - V + E}{2},$$

y de  $2 - 2g \leq V - \frac{E}{3}$ , obtenemos

$$\frac{6 - 3V + E}{6} \leq g.$$

Como esto es válido para cualquier encaje de  $G$  donde las caras son discos, obtenemos que

$$E/6 - V/2 + 1 \leq \gamma(G) \leq \gamma_M(G) \leq (E - V + 1)/2.$$

Análogamente, para  $S$  no orientable tenemos

$$V - E + 1 \leq 2 - g_{no} \leq V - E + \frac{2E}{3},$$

de donde deducimos

$$E/3 - V + 2 \leq \gamma_{no} \leq \gamma_{no_M} \leq E - V + 1.$$

Finalmente, argumentaremos que si  $G$  se encaja en una superficie orientable de género  $g$ , entonces se encaja en una superficie no orientable de género no orientable  $2g + 1$ . Para ver esto removemos el interior de un disco de la superficie que interseca a una sola arista en un arco, produciendo una superficie con una sola frontera. Ahora identificamos puntos opuestos del círculo frontera. Lo que resulta es una superficie no orientable de género no orientable  $2g + 1$  en la que se encaja  $G$ . De aquí se sigue que  $\gamma_{no}(G) \leq 2\gamma(G) + 1$ .  $\square$

Cuando en la última relación del Teorema 2.1 se tiene la igualdad, es decir,  $\gamma_{no}(G) = 2\gamma(G) + 1$  se dice que la gráfica es *orientablemente simple*. Esta clase de gráficas también es interesante de estudiar. En [3] se menciona que se conoce poco acerca de las gráficas orientablemente simples.

El teorema anterior se puede generalizar. Definimos el cuello de una gráfica  $G$  como la longitud del ciclo más corto en  $G$ . Entonces tenemos las siguientes desigualdades [3]. La prueba se hace de manera análoga.

**Teorema 2.2.** *Sea  $G$  una gráfica con  $V$  vértices,  $E$  aristas y cuello  $c$ . Entonces*

$$(c - 2)E/(2c) - V/2 + 1 \leq \gamma(G) \leq \gamma_M(G) \leq (E - V + 1)/2,$$

$$(c - 2)E/c - V + 2 \leq \gamma_{no} \leq \gamma_{no_M} = E - V + 1.$$

□

Los resultados anteriores nos dan criterios para determinar si una gráfica  $G$  se puede encajar en una superficie dada  $S$  y cotas para el género de gráficas. Sin embargo, cuando queremos calcular el género para casos particulares resulta que estas cotas son grandes y no nos determinan el género de manera precisa.

Podemos pensar la gráfica  $G$  compuesta en partes, digamos como la “suma” de gráficas más pequeñas y preguntarnos qué relación hay entre el género de las partes y el género de  $G$ . Es decir, si  $G$  es una “suma” de dos gráficas  $G_1$  y  $G_2$  y si conocemos el género orientable (no orientable) de  $G_1$  y  $G_2$  entonces ¿será cierto que

$$\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)?$$

Para responder lo anterior definamos lo que entendemos por “suma”.

Una gráfica  $G$  es un  $k$ -*amalgamamiento* de dos gráficas  $G_1$  y  $G_2$  si  $G = G_1 \cup G_2$  y  $G_1 \cap G_2$  es un conjunto de  $k$  vértices. Denotamos por  $G_1 \cup_1 G_2$  al 1-amalgamamiento de  $G_1$  y  $G_2$ , donde  $G_1 \cap G_2$  consta de un solo vértice. En [6] se prueba que

$$\gamma(G_1 \cup_1 G_2) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$$

En [40] se prueba que

$$\gamma_{no}(G_1 \cup_1 G_2) = \gamma_{no}(G_1) + \gamma_{no}(G_2),$$

salvo cuando  $G_1 \cup_1 G_2$  es no plana y orientablemente simple, en cuyo caso se tiene

$$\gamma_{no}(G_1 \cup_1 G_2) = \gamma_{no}(G_1) + \gamma_{no}(G_2) - 1.$$

En general, en [4] se construyen 3-amalgamamientos  $G_n = H_n \cup H_n$  tales que  $\gamma(G_n) = 5n$  y  $\gamma(H_n) = 3n$ . Por lo tanto  $\gamma(G_1 \cup G_2)$  puede ser diferente de  $\gamma(G_1) + \gamma(G_2)$  por un número arbitrariamente grande, para amalgamamientos sobre 3 o más vértices. En el caso no orientable en [5] se prueba que

$$2 - 2k \leq \gamma_{no}(G_1) + \gamma_{no}(G_2) - \gamma_{no}(G_1 \cup_k G_2) \leq k^2 - 2.$$

### 3. Relación con los menores de gráficas

La *contracción de aristas* es una operación en la que, en una gráfica, una arista y sus dos vértices son eliminados y sustituidos por un nuevo vértice que se hace adyacente a todos los vecinos de los vértices de la arista original; dicho de manera topológica, se elimina una arista y sus vértices extremos se identifican.

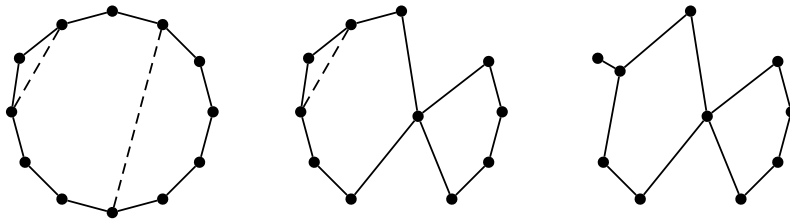


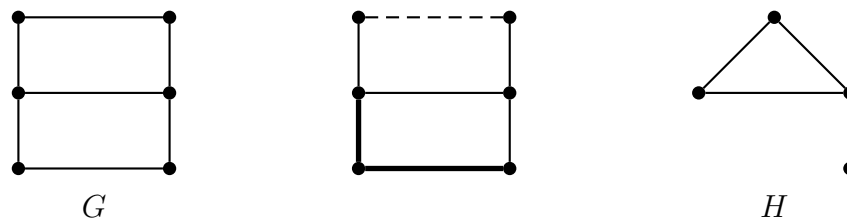
Figura 12: Contracción de aristas.

Decimos que una gráfica  $H$  es *menor* de una gráfica  $G$ , si se obtiene a partir de  $G$  aplicando una sucesión de las operaciones siguientes:

- i) contracción de aristas,
- ii) eliminación de aristas,
- iii) eliminación de vértices aislados (de grado cero).

El orden de aplicación es irrelevante. En la Fig. 13, se muestra una gráfica  $G$  que tiene como menor a la gráfica  $H$  obtenida de contraer la arista discontinua, eliminar las aristas gruesas y el vértice común a ellas, que queda aislado.

La gráfica  $G$  es menor de sí misma. Un menor de  $G$  distinto de  $G$ , se llama *menor propio* de la gráfica. Una familia de gráficas,  $\mathcal{F}$ , es *cerrada por menores* si para cada gráfica  $G$  en  $\mathcal{F}$  todos sus menores también pertenecen a  $\mathcal{F}$ . Una gráfica  $H$  es un *menor prohibido minimal* de  $\mathcal{F}$  si  $H$  no está en  $\mathcal{F}$  pero todo menor propio de  $H$  sí pertenece a  $\mathcal{F}$ .

Figura 13:  $H$  es menor de  $G$ .

Robertson y Seymour [35] probaron que cualquier familia de gráficas cerrada por menores tiene un conjunto finito,  $\mathcal{M}$ , de menores prohibidos minimales que es *completo*, esto es, para cada gráfica  $G$  que no está en  $\mathcal{F}$ , existe una gráfica  $H$  en  $\mathcal{M}$  que es menor propio de  $G$ .

Entonces, en una familia de gráficas cerrada por menores, identificar al conjunto de sus menores prohibidos minimales resulta muy atractivo pues así se obtiene la caracterización de sus elementos.

Figura 14:  $K_{3,3}$  y  $K_5$ .

Las gráficas planas son ejemplo de una familia de gráficas cerrada por menores. El Teorema de Kuratowski proporciona el conjunto completo de sus menores prohibidos minimales.

**Teorema 3.1** (Kuratowski). *Una gráfica  $G$  es plana si y sólo si  $G$  no tiene a  $K_{3,3}$  ni a  $K_5$  como menores.*

Como las gráficas planas son aquellas que pueden encajarse en la esfera, un problema interesante es el de describir el conjunto de menores prohibidos minimales para alguna superficie  $S$  conexa, cerrada y orientable. Esto es, dar un conjunto de gráficas que no se puedan encajar en  $S$ , pero que sus menores propios sí se encajan. La misma pregunta se puede hacer para el caso de superficies no orientables. La clase de gráficas que tienen un encaje en una superficie dada es cerrada bajo menores.

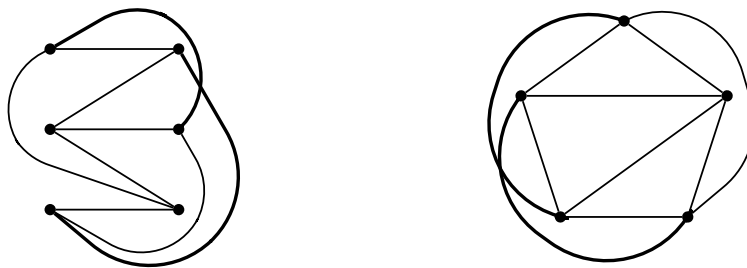


Figura 15:  $K_{3,3}$  y  $K_5$  no son planas.

## 4. Snarks

El *índice cromático* de una gráfica  $G$ ,  $\chi'(G)$ , es el mínimo número de colores necesarios para colorear las aristas de  $G$  de modo que dos aristas que inciden en un mismo vértice tienen color diferente. El Teorema de Vizing acota los valores posibles de  $\chi'(G)$  en términos de su grado máximo,  $\Delta(G)$ :

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Una gráfica es *cúbica* (o 3-regular) si todos sus vértices tienen grado 3. Entonces si  $G$  es cúbica, por el Teorema de Vizing,  $\chi'(G)$  sólo puede ser 3 o 4. Sin embargo, determinar el valor exacto de  $\chi'$  para una gráfica cúbica arbitraria es un problema NP-completo [24].

Un *snark* es una gráfica cúbica, de índice cromático cuatro y sin puentes (aristas que al eliminarse desconectan a la gráfica). Fue Peter G. Tait quien, buscando una prueba para el Teorema de los Cuatro Colores, (TCC), inició el estudio de los snarks en 1880. Este teorema, como mencionamos anteriormente, en términos de la Teoría de Gráficas establece: *Si  $G$  es una gráfica plana, entonces sus vértices se pueden colorear con a lo más cuatro colores de manera que vértices adyacentes no son del mismo color.*

Otra manera de decirlo es que toda gráfica plana es 4-coloreable por caras, pues una gráfica plana bien dibujada en el plano o la esfera (es decir, sin cruces de aristas) delimita caras con sus ciclos (una cara no acotada en caso de no haberlos). De la misma forma en que construimos una gráfica partiendo de un mapa, se puede construir *la gráfica dual* de  $G$  plana: un vértice por cada cara y una arista entre dos vértices que representen en  $G$  caras que comparten una arista.

Usando la gráfica dual Tait, transformó el problema de coloración de mapas en uno de coloración de aristas de gráficas cúbicas y demostró,

en [42], el siguiente teorema:

**Teorema de Tait** [10] *Una gráfica  $G$ , plana, es 4-coloreable por caras si y sólo si toda gráfica cúbica y sin puentes es 3-coloreable por aristas.*

Con este resultado demostraremos la equivalencia entre el TCC y el hecho de que ningún snark es plano,

**Teorema 4.1.** *El Teorema de los Cuatro Colores es equivalente a que ningún snark es plano.*

*Demostración.* Sea  $G$  un snark y supongamos que es plano. Entonces, por el TCC se tiene que  $G$  es 4-coloreable por caras y del Teorema de Tait  $G$  es 3-coloreable por aristas, contradiciendo que su índice cromático es 4.

Supongamos ahora que ningún snark es plano y sea  $H$  una gráfica plana. Agregamos aristas entre vértices no adyacentes en  $H$  sin generar cruces hasta que no sea posible agregar ninguna arista más. Cada cara de  $H$  será un triángulo y su número cromático no es menor que el de la gráfica inicial. Sea  $G$  la gráfica dual de  $H$ , notemos que es cúbica, sin puentes y plana por lo que, de la hipótesis, no puede ser un snark. Entonces su índice cromático es 3 y, nuevamente del Teorema de Tait, tendremos que es 4-coloreable por caras, cumpliendo así el Teorema de los Cuatro Colores.  $\square$

En 1891 Julius Petersen, [37], encontró un contraejemplo a la prueba de Tait: la gráfica de Petersen,  $P$  (Fig. 16), una gráfica cúbica, sin puentes y que no es plana (tiene como menor a  $K_5$ ). Esta gráfica es el primer ejemplo conocido de snark.

La Fig. 16 muestra una 4-coloración de las aristas de  $P$  sin que haya dos incidentes del mismo color de donde  $\chi'(P) \leq 4$ . En [15, 44] se demuestra en cualquier coloración de las aristas de  $P$  con menos de cuatro colores hay aristas incidentes del mismo color, es decir  $\chi'(P) \geq 4$ , y por tanto  $\chi'(P) = 4$ .

Este es el snark más pequeño que existe, con su aparición la demostración del TCC quedó frustrada y entonces la meta fue demostrar que ningún snark es plano.

Después de la gráfica de Petersen, el siguiente snark fue localizado 55 años después por Blanuša, [9], en 1946. La dificultad para encontrar un snark llevó a pensar que eran gráficas muy raras y escasas, y por eso Martin Gardner en 1976 los llamó de esta manera, [20], haciendo referencia al poema de Lewis Carrol *The hunting of the snark*, que considera a los snarks como seres míticos y muy difíciles de hallar.

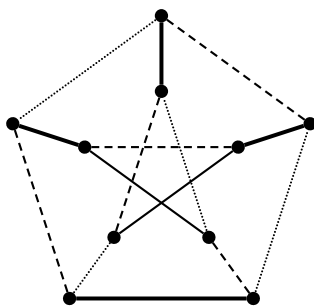


Figura 16: La gráfica de Petersen y una 4-coloración de sus aristas.

No obstante, en 1975, R. Isaacs, [25], construyó dos familias infinitas de snarks: *los snarks de flor* y *la familia BDS* (Blanuša, Descartes, Szekeres). Hasta ese momento se conocían sólo cuatro de estas gráficas.

En su artículo, Isaacs resume:

“La más antigua gráfica 3-regular no 3-coloreable por aristas es la gráfica de Petersen, que data de 1891 y es la más pequeña que existe. Desde entonces y hasta el presente artículo, según sé, sólo otras tres de estas gráficas han sido encontradas. He aquí sus datos:

Descubridor	Fecha	Orden	Ref.
Danilo Blanuša	1946	18	[9]
Blanche Descartes	1948	210	[16]
George Szekeres	1973	50	[41]

“...las gráficas cúbicas que no son 3-coloreables por aristas son extremadamente raras. En su búsqueda encuentro un fascinante pasatiempo para varios meses. Yo lo recomiendo como placentera diversión para cualquier matemático, quedará impresionado con la inmensa dificultad de encontrar una de estas gráficas”.

William T. Tutte conjeturó que todo snark tiene a la gráfica de Petersen como menor (reportado en [15]). En 2001 Robertson, Sanders, Seymour y Thomas dieron la demostración, [36].

**Teorema del Snark** *Todo snark tiene a la gráfica de Petersen como menor.*

Los snarks han motivado gran cantidad de investigaciones desde diversas perspectivas. Aún no se conocen todas sus propiedades ni se ha caracterizado la familia completa. Hay trabajos encaminados a dar una construcción canónica de estas gráficas, como los de Cameron,



Chetwynd y Watkins [13] que introducen el concepto de *snark primo*; Nedela y Skoviera [34] que estudian la descomposición y reducción de snarks en otros más pequeños o el de Brinkmann y Steffen, [11], que contaron los snarks de orden menor que treinta, obteniendo las siguientes cifras:

Orden	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
# Snarks	1	0	0	0	2	7	22	40	290	2976

La Conjetura de la Doble Cobertura Cíclica, establece que cualquier gráfica sin puentes tiene un conjunto de ciclos que pasa por cada arista exactamente dos veces. Propuesta por Szekerez [41] e independientemente por Seymour [39] en los años 70, se considera uno de los problemas abiertos más importantes de la Teoría de Gráficas. Jaeger demostró que cualquier contraejemplo mínimo a esta conjetura debe ser un snark [26].

En un sentido más topológico, sabiendo que los snarks no son planos, se ha buscado obtener su género –orientable y no orientable– Tinsley y Watkins, [18], demostraron que hay snarks de género orientable arbitrariamente grande dando el encaje de los snarks de flor en la superficie correspondiente. Para otra familia infinita, *los snarks de Goldberg*, (definidos en [21]), se conoce una cota inferior de su género orientable. En el trabajo realizado por Belcastro y Kaminski [7], se construyen familias infinitas de snarks de género orientable uno y dos y se afirma que Kaminski calculó el género orientable de los snarks, aunque no se han publicado estos resultados.

No siempre los encajes de snarks resultaron ser poliedrales, de hecho, en 1969 Grunbaum, estableció su famosa Conjetura que dice que los snarks no tienen encajes poliedrales, [22]. Durante años el debate a favor o en contra de su veracidad generó gran proliferación de resultados. Fue hasta 2009 que Kochol [27] dio respuesta negativa a la conjetura construyendo para cada superficie orientable de género mayor que cinco, una familia infinita de snarks que pueden encajarse poliedralmente en esa superficie. Con esta misma visión, Szekeres [41] demostró que ningún snark de flor tiene un encaje poliedral sobre ninguna superficie orientable o no orientable. Mohar y Vodopivec [33] probaron que ningún snark de Goldberg tiene un encaje poliedral sobre ninguna superficie orientable, pero sí tiene un encaje poliedral sobre cierta superficie no orientable y proporcionaron su género. Adicionalmente, en [30], estudiaron las relaciones entre coloraciones y encajes de snarks.

Recientemente se han estudiado los encajes de snarks en espacios topológicos que no son superficies: los libros, que en la siguiente sección presentamos.

Una reseña mucho más detallada de la historia y evolución del estudio de los snarks puede encontrarse en [15] y [44].

## 5. Encaje en libro de una gráfica

Supongamos que una aerolínea desea organizar sus rutas entre los aeropuertos de ciertas ciudades del país. Hay una forma natural de modelar la situación con una gráfica: representando cada aeropuerto con un punto y colocando una arista entre dos puntos si existe una ruta directa entre los dos aeropuertos que representan.

Este es un modelo muy simplificado de un problema que en realidad es mucho más complejo. La aerolínea debe tomar en cuenta una gran diversidad de aspectos para organizar sus salidas: la distancia a recorrer, la altura a la que es posible hacerlo, el consumo de combustible, las condiciones climáticas, el equipo aéreo con que cuenta, las rutas de vuelo permitidas, etc. Una consideración obvia es la de evitar cruces entre pares de rutas que puedan usarse en el mismo momento. Asimismo, aviones que vuelen simultáneamente deben estar suficientemente separados para que las turbulencias generadas por uno no estorben el trayecto del otro. Suponemos entonces que el espacio aéreo está dividido en niveles de altura conveniente: la diferencia de alturas garantiza que se evite la posibilidad de una colisión en rutas que se crucen y un avión volando no afectaría a los aviones que estén en niveles distintos al suyo.

Lo que se pretende es asignar a cada ruta un nivel. Una forma de hacerlo es poniendo cada ruta en un nivel distinto pero manejar demasiados niveles puede resultar innecesariamente costoso, por ejemplo las rutas cortas deberían acomodarse en niveles bajos para gastar menos combustible y además la altura máxima en la que puede viajar un avión está acotada. Una solución óptima debe minimizar el número de niveles a usar.

Se puede dibujar la gráfica de las rutas colocando sobre un círculo los vértices que representen a los aeropuertos y entonces una arista entre dos de ellos será una cuerda del círculo. La restricción de que no haya aviones que tengan la posibilidad de interferirse requiere que no haya dos rutas que se crucen en el mismo nivel. Si asociamos colores a las aristas de modo que todas las aristas de rutas en un nivel dado tengan el mismo color lo que queremos es que no haya aristas del mismo

color que se crucen, es decir, no debe haber cruces monocromáticos. La necesidad de usar el mínimo número de niveles se interpreta como un problema de minimización de colores: buscamos el mínimo número  $k$  de colores a usar en las aristas de esta gráfica para lograr que no haya cruces monocromáticos.

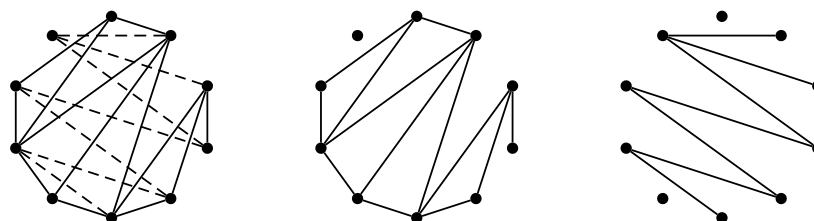


Figura 17: Representación de dos niveles de rutas aéreas.

En la Fig. 17 podemos ver un ejemplo de una asignación de rutas en dos niveles distintos, notemos que en cada nivel las aristas no se cruzan.

Este planteamiento es equivalente al problema de *encaje en libro* de una gráfica.

Un  $k$ -libro, o libro de  $k$  páginas, consiste en una línea  $L$  llamada *lomo* y  $k$  semiplanos distintos, llamados *hojas* o *páginas*, que tienen a  $L$  como su frontera común.

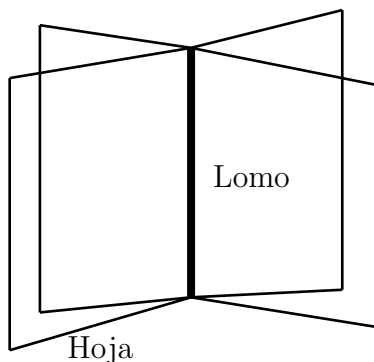


Figura 18: Un libro.

El *encaje en un  $k$ -libro* de una gráfica es un mapeo de cada vértice al lomo y cada arista al interior de a lo más una página de manera que aristas en la misma hoja no se crucen. Una gráfica dibujada de modo que todos sus vértices están sobre un círculo puede fácilmente encajarse en un libro: “abriendo” el círculo por en medio de dos vértices hasta

formar una línea tendremos el lomo del libro. Si además las aristas han sido coloreadas sin que haya cruces monocromáticos, colocando en una hoja las aristas del mismo color no habrá cruces en la hoja. Entonces estas dos formas de representar una gráfica son equivalentes.

En la Fig. 19 vemos la transformación del dibujo circular al de encaje en libro cuando abrimos entre los vértices 5 y 6.

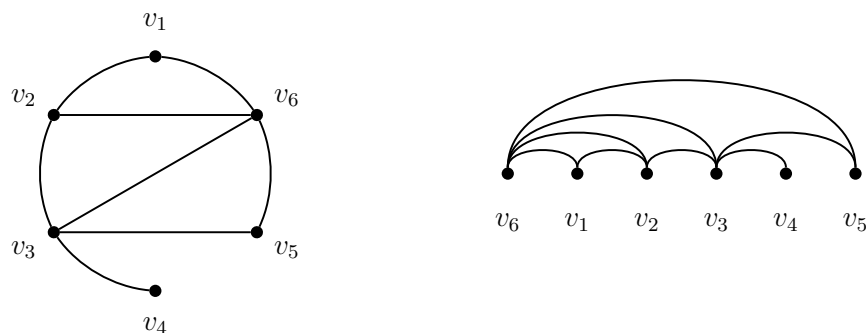


Figura 19: Equivalencia entre el dibujo en círculo y en libro.

El encaje en libro de una gráfica surge en distintos contextos, lo que nos puede dar una idea de la importancia e interés que este problema ha tenido en el área de la Teoría de Gráficas. El problema de las rutas aéreas puede modelarse como el encaje en un  $k$ -libro en el que deseamos minimizar el número  $k$ . Al mínimo número de hojas de un libro donde se puede encajar  $G$  se le llama el *grosor de libro de  $G$* , y se denota por  $nh(G)$  (en inglés, *book thickness*).

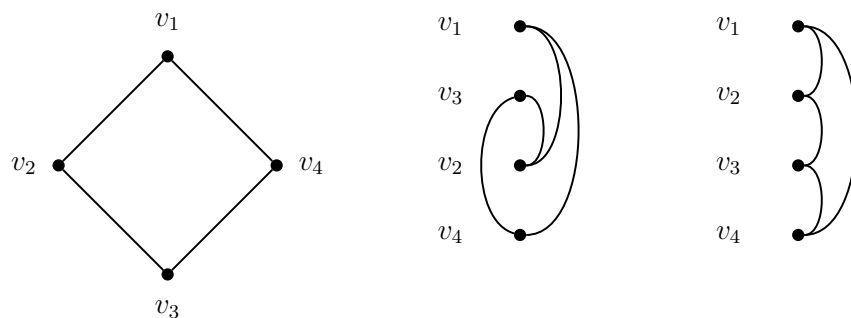


Figura 20:  $C_4$  y sus dos encajes en libro.

En la Fig. 20 podemos ver a  $C_4$ , el ciclo de cuatro vértices, y sus únicos dos encajes en libro. El primero usa dos páginas mientras que el segundo es el óptimo, realiza el grosor de libro de  $C_4$  que es uno.

Fueron Frank Bernhart y Paul Kainen quienes en 1979 [8], introdujeron el concepto de grosor de libro y caracterizaron las gráficas cuyo grosor de libro es a lo más dos. Una gráfica tiene grosor 1 si y sólo si  $G$  es una gráfica exteriormente plana, es decir,  $G$  tiene un encaje en el plano sin cruces y de forma que todos sus vértices aparecen en la frontera de la cara exterior. Una gráfica tiene grosor 2 si y sólo si  $G$  es subgráfica de una gráfica plana hamiltoniana (que tiene un ciclo que pasa por todos los vértices). En el mismo trabajo ellos demostraron que toda gráfica se puede encajar en algún libro y conjeturaron que el grosor crece arbitrariamente en las gráficas planas. Poco después esta afirmación fue refutada por Buss y Shor [12], quienes demostraron que toda gráfica plana cabe en a lo más nueve páginas; poco después, Heath [23] describió un algoritmo para dibujar cualquier gráfica plana en siete páginas y finalmente Yannakakis en [45], demostró que el grosor de libro de cualquier gráfica plana es a lo más cuatro.

En su artículo Bernhart y Kainen también relacionaron el grosor de libro con otros invariantes conocidos como el género, el número cromático y el grosor clásico (definido en términos de una factorización en subgráficas planas de la gráfica). Ellos calcularon el grosor de libro de las gráficas completas y dieron este valor para algunos casos particulares de gráficas bipartitas completas. Se sabe también que si una gráfica  $G$  tiene grosor 3, entonces su género puede ser arbitrariamente grande, pero si una gráfica  $G$  tiene género  $\gamma$ , entonces el grosor de  $G$  está acotado por una función de  $\gamma$  [28].

## 6. Comentario.

Esperamos que este breve panorama acerca de la Teoría Topológica de Gráficas sirva como motivación para que haya más interesados en trabajar en esta área de las matemáticas que ha sido poco explorada en el país. Como se puede ver, es un área joven en la cual hay muchos problemas abiertos, tanto en la parte de encajes de gráficas en superficies, cálculo de menores, gráficas orientablemente simples y presentación de gráficas en libro. Hemos incluido una amplia cantidad de referencias (aunque la lista no es exhaustiva), para que los lectores interesados la retomen y puedan adentrarse en las técnicas usadas en la solución de problemas en esta área.

## Bibliografía

1. K. Appel y W. Haken, Every planar map is four colorable. part i. discharging, *Illinois J. Math.* **21** (1977) 429–490.
2. K. Appel, W. Haken, y J. Koch, Every planar map is four colorable. part ii. reducibility, *Illinois J. Math.* **21** (1977) 491–567.
3. D. Archdeacon, Topological graph theory, a survey, disponible en <http://www.emba.uvm.edu/~archdeac/>.
4. \_\_\_\_\_, The nonorientable genus is additive, *J. Graph Theory* **10** (1986) 363–383.
5. \_\_\_\_\_, The orientable genus is nonadditive, *J. Graph Theory* **10** (1986) 385–401.
6. J. Battle, F. Harary, Y. Kodama, y J. Youngs, Additivity of the genus of a graph, *Bull. Am. Math. Soc.* **68** (1962) 565–568.
7. S. Belcastro y J.Kaminski, Families of dot-product snarks on orientable surfaces of low genus, *Graphs Comb.* **23** (2007) 229–244.
8. F. R. Bernhart y P. C. Kainen, The book thickness of a graph, *J. Comb. Theory, Ser. B* **27** (1979) 320–331.
9. D. Blanuša, Problem ceteriju boja (*El problema de los cuatro colores*), *Hrvatsko Prirodoslovno Društvo Glasnik, Mat-Fiz. Astr.*, (*En croata con resumen en francés*) **1 Ser II** (1946) 31–42.
10. J. A. Bondy y U. S. R. Murty, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics 244, Berlin: Springer, 2008.
11. G. Brinkmann y E. Steffen, Snarks and reducibility, *Ars Comb.* **50** (1998) 292–296.
12. J. F. Buss y P. W. Shor, On thepagenumber of planar graphs, *Proc. 16th Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (1984) 98–101.
13. P. Cameron, A. Chetwynd, y J.J.Watkins, Decomposition of snarks, *J. Graph Theory* **11** (1987) 13–19.
14. L. Carrol, *The annotated Hunting of the snark*, W.W. Norton & Co., 2006.
15. A. Chetwynd y R. J. Wilson, Snarks and supersnarks, *The Theory and Applications of Graphs*, John Wiley and Sons, New York (1981) 215–241.
16. B. Descartes, Networking-colourings, *Math. Gazette* **32** (1948) 67–69.
17. T. Endo, The page number of toroidal graphs is at most seven, *Discrete Mathematics* **175** (1997) 87–96.
18. F.C.Tinsley y J.J.Watkins, A study of snark embeddings, *In: Graphs and Applications (Boulder, Colo., 1982)*, Wiley-Interscience Publications, Wiley, New York (1985) 317–332.
19. M. A. Fiol, A boolean algebra approach to the construction of snarks, *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, New York: John Wiley and Sons Ltd. Wiley-Interscience Publication **1** (1991) 493–524.

20. M. Gardner, Mathematical games: Snarks, boojums and other conjectures related to the four-color-map theorem, *Scientific American* **234** (April 1976) 126–130.
21. M. Goldberg, Construction of class 2 graphs with maximum vertex degree 3, *J. Comb. Theory, Ser. B* **31** (1981) 282–291.
22. B. Grunbaum, Conjecture 6. in recent progress in combinatorics, (W.T. Tutte Ed.), *Academic Press* (1969) 343.
23. L. Heath, Embedding planar graphs in seven pages, *Prec. 25th Ann. Syrup. on Foundations of Computer Science* (1984) 74–83.
24. I. Holyer, The np-completeness of edge-coloring, *SIAM J. Comp.* **10** (1981) 718–720.
25. R. Isaacs, Infinite families of non-trivial trivalent graphs which are not tait colorable, *Am. Math. Monthly* **82** (1975) 221–239.
26. F. Jaeger, A survey of the cycle double cover conjecture, cycles in graphs, workshop simon fraser univ., burnaby/can. 1982, *Ann. Discrete Math.* **27** (1985) 1–12.
27. M. Kochol, Polyhedral embeddings of snarks in orientable surfaces, *Proc. Am. Math. Soc.* **137** (2009) 1613–1619.
28. S. M. Malitz, Genus  $g$  graphs have pagenumber  $o(\sqrt{g})$ , *J. Algorithms* **17** (1994) 85–109.
29. W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction, Graduate Text in Mathematics 56*, Springer- Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1987.
30. B. Mohan, E. Steffen, y A. Vodopivec, Relating embedding and coloring properties of snarks, *Ars Math. Contemp.* **1** (2008) 169–184.
31. B. Mohar, A linear time algorithm for embedding graphs in an arbitrary surface, *SIAM J. Discrete Math.* **12** (1999) 6–26.
32. B. Mohar y C. Thomassen, *Graphs on Surfaces*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 2001.
33. B. Mohar y A. Vodopivec, On polyhedral embeddings of cubic graphs, *Combin. Probab. Comput.* **15** (2006) 877–893.
34. R. Nedela y M. Skoviera, Decompositions and reductions of snarks, *J. Graph Theory* **22** (1996) 253–279.
35. R. Neil y P. Seymour, Graph minors. xx: Wagner’s conjecture, *J. Comb. Theory, Ser. B* **92** (2004) 325–357.
36. E. Pegg, Book review: The colossal book of mathematics, *Notices Am. Math. Soc.* **49** (9) (2002) 1084–1086.
37. J. Petersen, Die theorie der regulären graphen, *Acta Math., Stockholm* **15** (1891) 193–220.
38. G. Ringel, Map color theorem, *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 209, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag XII* (1974) 191.
39. P. Seymour, Sums of circuits, in: *Graph Theory and related topics, J.A. Bondy and U.S.R. Murty, eds., Academic Press, New York* (1979) 341–

355.

40. S. Stahl y L. Beineke, Blocks and the nonorientable genus of graphs, *J. Graph Theory* **1** (1977) 75–78.
41. G. Szekeres, Polyhedral decompositions of cubic graphs, *Bull. Austral. Math. Soc.* **8** (1973) 367–387.
42. P. Tait, Remarks on the colouring of maps, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **10** (1880) 729.
43. A. Vodopivec, On embeddings of snarks in the torus, *Discrete Math.* **308** (2008) 1847–1849.
44. J. Watkins y R. Wilson, A survey of snarks, *Graph Theory, Combinatorics, and Applications, Vol. 2, New York: John Wiley and Sons, Inc. Wiley-Interscience Publication* (1991) 1129–1144.
45. M. Yannakakis, Four pages are necessary and sufficient for planar graphs, *Proc. 18th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing (ACM, New York)* (1986) 104–108.