

Henri Poincaré y las transformaciones de Lorentz

Eduardo Piña Garza
Departamento de Física
Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa,
P. O. Box 55 534
México, D. F., 09340 México
pge@xanum.uam.mx

Resumen

Se presenta la relación del homenajeado con las transformaciones de Lorentz desde un punto de vista matemático. Para Henri Poincaré las transformaciones de Lorentz fueron usadas por su maestro Hermite en el estudio de las formas cuadráticas indefinidas. Posteriormente él identifica este grupo con el de las isometrías de la geometría no-euclidiana. Subgrupos discretos de este grupo, son los que denomina grupos fuchsianos y kleinianos. Reencuentra este grupo en las transformaciones de Lorentz del espacio tiempo. Anuncia que se trata de un grupo de Lie. Escribe por primera vez las ecuaciones no triviales del álgebra de Lie de este grupo al afirmar que el conmutador de los generadores 1 y 2 de boosts van en la dirección 3 del momento angular. Finalmente vemos una versión divulgadora de la importancia de la geometría hiperbólica y de los grupos kleinianos en el estudio de un nudo hiperbólico, y se representa el grupo del complemento del nudo por medio de transformaciones de Lorentz.

1. Introducción

En este trabajo describo una de las aportaciones matemáticas debidas a Henri Poincaré que se considera de mayor relevancia para la Física. Este trabajo rememora el centenario de su muerte y debe verse como parte del homenaje que rendimos a la importancia de su presencia actual.

Por supuesto debe considerarse como una visión incompleta porque la valoración de su trabajo parece incrementarse monotónicamente con el tiempo.

Henri Poincaré nace en Nancy en 1858 y muere en París en 1912. Se forma como ingeniero en la Escuela Normal e inicia sus actividades profesionales como Ingeniero de Minas. Muy pronto se orienta hacia las matemáticas. Inicia con una tesis sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales [3].

Describir su obra nos llevaría mucho tiempo y espacio por sus dimensiones enormes en diversos significados de la expresión porque publica más de quinientos trabajos y muchos libros en variedad de temas importantes de matemáticas, ingeniería, astronomía, física y filosofía.

Dentro de la obra gigantesca de Henri Poincaré he seleccionado su papel en el nacimiento y aplicación de las transformaciones de Lorentz. El motivo para divulgar este trabajo tiene el propósito de destacar algunos hechos comunes para la Física que pueden ser de interés para la Matemática y propiedades matemáticas muy conocidas que pueden alcanzar resultados novedosos en la Física.

En un trabajo de divulgación sobre transformaciones de Lorentz se incluyen generalmente abundantes referencias principalmente a H. A. Lorentz, A. Einstein y H. Minkowski, además de H. Poincaré. En este trabajo al darle prioridad a los hallazgos de Poincaré voy a suprimir el crédito debido a los otros científicos. Para reparar este hecho recomiendo a los lectores interesados acudir para completar el panorama de la acción colectiva de éstos, y otros menos importantes, a una fuente que les dará una información equilibrada, y según yo bastante completa y explícita, de la creación y primeros desarrollos de las transformaciones de Lorentz desde el punto de vista de la Física. Me refiero al excelente libro de W. Pauli *Theory of Relativity* [11].

Voy a iniciar con la definición de transformación de Lorentz, para enseguida recordar la trascendencia de Poincaré en la gestación de estas substituciones lineales. Enseguida recuerdo la prehistoria de las transformaciones de Lorentz, que para Poincaré se inicia con trabajos de su maestro Hermite. Posteriormente encontramos el camino para relacionar las transformaciones de Lorentz con la geometría hiperbólica. Para ello enfocamos la atención en el disco de Beltrami, en el semiplano de Poincaré, en el disco de Poincaré; estos se incluyen en muchas presentaciones de la literatura de geometría no-euclidiana o hiperbólica de dos dimensiones. Nuestro punto de vista se extiende como de costumbre de los modelos de dos a los de tres dimensiones, es decir a la 3-bola de Poincaré y al semiespacio de Poincaré. La posibilidad de extender estas

ideas a cualquier número de dimensiones se sigue trivialmente de estos ejemplos. El tratamiento que hacemos se distingue del usual dando a las transformaciones de Lorentz el rol principal haciendo evidente la representación de transformaciones isométricas de geometría hiperbólica por medio de transformaciones de Lorentz en el espacio de Minkowski.

El papel de la geometría hiperbólica ha sido enfatizado por el físico emérito Roger Penrose que ha incluido una descripción muy clara de esta geometría y como un ingrediente importante de la física contemporánea en varios libros publicados para el no especialista [12].

Mi interés principal es tender puentes entre ideas matemáticas y objetos físicos. Las matemáticas se pueden usar para predecir cuando se descubre la semejanza que existe entre el mundo matemático y otros mundos donde existen similitudes. Para este objetivo se necesita ingenuidad y considerar casos particulares sencillos para reconocer paralelismos todavía no develados.

La noticia para nosotros es que desde hace más de treinta años un grupo de topólogos interesados en los nudos los han relacionado con la geometría hiperbólica, con las variedades en tres dimensiones, con la teoría de los grupos kleinianos. Con frecuencia estudian estas ideas en el espacio de Minkowski de los físicos. Como Henri Poincaré tuvo mucho que ver tanto en estos temas de matemáticas, como en el nacimiento de las transformaciones de Lorentz; y como además tengo en mi pensamiento la conjetura de que para Poincaré estos conceptos estuvieron íntimamente relacionados en su cerebro, voy a tratar de explicar con un lenguaje matemático sencillo los temas que me parecen de mayor interés.

2. Transformaciones de Lorentz

El nombre de transformaciones de Lorentz lo acuña Poincaré en 1905 [16], según su costumbre de resaltar la importancia de aquellos que crearon conceptos matemáticos que le parecían interesantes.

Definición 1. *Las transformaciones de Lorentz \mathcal{L} son transformaciones lineales de coordenadas $(x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4 \rightarrow (\hat{x}^0, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3) \in \mathbb{R}^4$, que dejan invariante la forma cuadrática indefinida*

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -(\hat{x}^0)^2 + (\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 + (\hat{x}^3)^2. \quad (1)$$

Desde el punto de vista físico, x^1, x^2, x^3 son coordenadas cartesianas que miden distancias a tres planos coordenados mutuamente ortogonales que se intersecan en un punto llamado *origen de coordenadas*, con

una unidad de medición de distancias previamente convenida. La letra x^0 denota el tiempo de un reloj medido con la unidad de tiempo segundo, multiplicado por la velocidad de la luz c . El producto $ct = x^0$ tiene unidades de distancia, como x^1, x^2, x^3 y juega un papel similar al de éstas, forma con ellas las cuatro coordenadas del espacio tiempo. Se supone que los tres planos ortogonales están en reposo respecto de tres estrellas muy lejanas y brillantes como la estrella *Deneb* de la constelación del *Cisne* y que el reloj que mide el tiempo t también está en reposo respecto a esos planos o esas estrellas.

El sistema de coordenadas con acento circunflejo es similar y se distingue físicamente porque ahora las tres coordenadas $\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3$ se miden respecto a otros tres planos ortogonales, los cuales se mueven con todos sus puntos respecto al sistema anterior con una velocidad constante \mathbf{v} de componentes v_1, v_2, v_3 , medida en el sistema coordenado sin acento circunflejo. Según Poincaré resulta del experimento de Michelson y Morley [8] que el reloj que está en reposo en el sistema con acento circunflejo y que se mueve con velocidad \mathbf{v} respecto al sistema sin acento circunflejo, mide tiempo y coordenadas diferentes dados por las transformaciones lineales de Lorentz determinadas por la condición de invariancia (1) con la misma velocidad de la luz c en ambos sistemas de coordenadas.

Las transformaciones de Lorentz aparecen en la Física a principios del siglo XX como aquéllas necesarias para representar el resultado de medir coordenadas y tiempo en dos sistemas de referencia que se mueven uno respecto al otro con velocidad constante y que miden (Michelson y Morley) la misma velocidad de la luz.

La forma cuadrática que queda invariante ante transformaciones de Lorentz tiene asociada la matriz de Minkowski como sigue

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (x^0, x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz cuyas componentes se denotan por η_{ij}

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

queda invariante ante transformaciones de Lorentz. El signo de esta matriz se ha elegido en este trabajo como se hace en física [21].

En el espacio de Minkowski se define con la misma matriz una métrica indefinida

$$(ds)^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j,$$

desde ahora los índices latinos repetidos se suman en esta sección de 0 a 3.

La métrica de Minkowski es invariante con respecto a la transformación de Lorentz, la cual es una transformación lineal en el espacio de Minkowski, de las coordenadas $x^j \in \mathbb{R}^4$ a las coordenadas transformadas $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^4$, definidas por

$$\hat{x}^k = \mathcal{L}^k_j x^j,$$

donde la matriz de transformación de Lorentz $\mathcal{L}^k_j \in \mathbb{R}^{16}$ conserva invariante la matriz métrica de Minkowski

$$\eta_{ij} \mathcal{L}^i_k \mathcal{L}^j_l = \eta_{kl}$$

con las ecuaciones invariantes escritas explícitamente para la forma cuadrática y para la métrica.

$$\eta_{jk} x^j x^k = \eta_{jk} \hat{x}^j \hat{x}^k, \quad \eta_{jk} dx^j dx^k = \eta_{jk} d\hat{x}^j d\hat{x}^k.$$

Henri Poincaré juega un papel relevante en el nacimiento de las transformaciones de Lorentz [16]. En base al trabajo anterior de Lorentz, agrega condiciones para que las transformaciones formen un grupo. De forma mucho más clara y completa descubre cómo quedan invariantes ante transformaciones de Lorentz las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, inclusive las densidades de carga y corriente eléctrica y los dos escalares invariantes del campo electromagnético: $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ y $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$. Es el primero en reconocer que dichas transformaciones forman un grupo de Lie. Es el primero en escribir las ecuaciones no triviales del álgebra de Lie; es decir, encuentra que el paréntesis de Lie de dos «boosts» ortogonales es la componente perpendicular a ellos del momento angular. Aclaremos que los físicos llaman «boost» a una transformación de Lorentz con velocidad a lo largo de un eje coordenado de las coordenadas espaciales; la transformación de Lorentz afecta a esta coordenda y al tiempo, pero deja invariantes las otras dos coordenadas espaciales. Como un grupo matemático, sin relación al tiempo, Poincaré ha utilizado las transformaciones de Lorentz para dejar invariante la métrica indefinida [15] con su maestro Hermite y las ha relacionado con las transformaciones de Möbius isométricas de la geometría hiperbólica, 25 años antes de su aplicación a la física, como veremos enseguida.

3. Ruinas prehistóricas de las transformaciones de Lorentz

Como este es un trabajo de divulgación con pocas pretensiones históricas, damos enseguida una visión turística de algunas ruinas prehistóricas de las transformaciones de Lorentz que llaman la atención.

En 1881, un cuarto de siglo antes del nacimiento de la relatividad especial, publica Poincaré un trabajo que inicia al recordar las sustituciones lineales, estudiadas previamente por Hermite en 1854 [15], que dejan invariante la métrica indefinida con matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y son en consecuencia ejemplos precursores de las transformaciones de Lorentz. Por supuesto vienen a cuento un conjunto de aclaraciones que podrían ser pertinentes. Se trata de transformaciones de Lorentz que no son de cuatro sino de tres dimensiones. Además son transformaciones que no involucran al tiempo y en consecuencia no son reconocidas como hijas legítimas de la Física, ni de Lorentz. Por otra parte los elementos o componentes de las sustituciones lineales son números enteros para Hermite, lo cual las particulariza nuevamente. Poincaré no usa la notación matricial en este trabajo y la aparición de dicha matriz en sus *Œuvres* es debida a la generosidad del comentador (A. C.) de las mismas. Para no restar mérito a Poincaré aclaramos que él agrupa en tablas ordenadas (sin paréntesis) a muchos conjuntos de variables: usa matrices sin la notación matricial.

Lo que me pareció notable en este trabajo de Poincaré es la conexión que él hace de la geometría no-euclidiana, que fuera de tanto interés para él, con el estudio de formas cuadráticas indefinidas que hace su maestro Hermite. Poincaré usa la palabra *identiques* al comparar las transformaciones lineales que dejan invariante la métrica indefinida (transformaciones de Lorentz) con las transformaciones isométricas de la geometría hiperbólica. Nuestra intención de divulgadores nos lleva a hacer muy explícita esta relación en la sección que sigue.

4. El hiperboloide de Poincaré

Los modelos a considerar en esta sección se identifican con superficies de curvatura constante sumergidas en el espacio de Minkowski [10] de

tres dimensiones. El espacio de Minkowski que se considera está determinado por puntos con 3 coordenadas representadas por x^j , donde el índice j toma los valores $0 \leq j \leq 2$.

Curvas en este espacio tienen una longitud de arco s definida por

$$(ds)^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2. \quad (2)$$

La cual se escribe en forma compacta como

$$(ds)^2 = \eta_{jk} dx^j dx^k,$$

donde se usa la convención de suma de Einstein, y donde se define la métrica de Minkowski

$$\eta_{jk} = \begin{cases} -1 & \text{para } j = k = 0 \\ 1 & \text{para } j = k \neq 0 \\ 0 & \text{para } j \neq k \end{cases}.$$

Se denota un punto en el espacio de Minkowski por $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, es decir

$$\mathbf{r} = (x^0, x^1, x^2). \quad (3)$$

Escribiendo las tres coordenadas x^j como funciones suaves de 2 coordenadas $u^\alpha \in \mathbb{R}^2$, definen una variedad 2-dimensional que llamaremos superficie. Ellas permiten definir una base de dos vectores en el espacio de Minkowski tangentes a la superficie que se identifican por las derivadas parciales

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial x^1}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial x^2}{\partial u^\alpha} \right), \quad (\alpha = 1, 2). \quad (4)$$

El producto punto de esta base produce el tensor métrico en la superficie ($\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4$)

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \eta_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta}, \quad (5)$$

donde los índices latinos repetidos se suman en esta sección de 0 a 2. La longitud de arco sobre la superficie se define por

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \quad (6)$$

donde índices griegos repetidos se suman en esta sección de 1 a 2.

Se define el vector unitario $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$ perpendicular a la superficie con las propiedades

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{g} = -1, \quad \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{g} = 0. \quad (7)$$

El hecho de que este vector \mathbf{g} tenga «cuadrado» negativo se explica por la forma indefinida de la métrica de Minkowski y tiene que ver con el hecho de que nos interesan superficies con métrica positiva definida.

Derivadas parciales de los vectores \mathbf{e}_α dan la ecuación

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\beta \alpha}^{\gamma} \mathbf{e}_\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{g}$$

que se expresa ahora en la base ampliada que incluye al vector \mathbf{g} . Sus componentes en esta base son los símbolos de Christoffel [7] que se pueden calcular por

$$\Gamma_{\beta \alpha}^{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\gamma\mu} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\mu} \right), \quad (8)$$

donde $g^{\alpha\mu}$ son las componentes de la matriz inversa de la métrica $g_{\alpha\mu}$.

Las otras componentes que aparecen en (4) forman la segunda forma fundamental $b_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^4$ que se define por la misma ecuación como

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial u^\beta} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \quad (9)$$

la última expresión obtenida por integración por partes.

Una curva definida en el espacio de Minkowski, si se escriben las tres coordenadas como funciones de un parámetro τ , tiene un vector tangente, el cual, si se encuentra sobre la superficie, se puede expresar con ayuda de la regla de la cadena en la base \mathbf{e}_α

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{e}_\alpha \frac{du^\alpha}{d\tau}. \quad (10)$$

Su segunda derivada es

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} = \left(\frac{d^2 u^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta \gamma}^{\alpha} \frac{du^\beta}{d\tau} \frac{du^\gamma}{d\tau} \right) \mathbf{e}_\alpha + b_{\beta\gamma} \frac{du^\beta}{d\tau} \frac{du^\gamma}{d\tau} \mathbf{g}, \quad (11)$$

que se expresa ahora en la base ampliada que incluye al vector \mathbf{g} .

Este ligero repaso de geometría diferencial elemental tiene por objeto utilizar estas ecuaciones familiares en el estudio de una superficie particular que llamamos aquí el hiperboloide de Poincaré y se puede definir en el espacio de Minkowski por la ecuación

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \eta_{jk} x^j x^k = -1 \quad (12)$$

Queremos que al escribir las tres coordenadas x^j como funciones suaves de 2 coordenadas u^α , produzca la misma superficie, para lo cual

se requiere que al sustituir las x^j funciones de las u^α en el miembro izquierdo se satisfaga idénticamente la ecuación (12). Al final de esta sección daremos varios ejemplos. Para todos esos ejemplos vale lo que sigue.

De la derivada con respecto a u^α de la ecuación (12) del hiperboloide de Poincaré viene

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{r} = 0, \quad (13)$$

por lo cual los vectores \mathbf{r} y \mathbf{g} obedecen las mismas ecuaciones. Compare (12) con la primera de (7) y compare (13) con la segunda de (7). Por tanto se puede elegir el signo de las componentes de \mathbf{g} para tener la propiedad característica del hiperboloide de Poincaré

$$\mathbf{g} = \mathbf{r}.$$

En este caso la ecuación (9) nos conduce a la ecuación

$$b_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}.$$

Cuando estas dos ecuaciones se remplazan en (11) se obtiene

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} = \left(\frac{d^2u^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{du^\beta}{d\tau} \frac{du^\gamma}{d\tau} \right) \mathbf{e}_\alpha + g_{\beta\gamma} \frac{du^\beta}{d\tau} \frac{du^\gamma}{d\tau} \mathbf{r}.$$

Observamos que el último sumando puede escribirse como

$$\left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 \mathbf{r}.$$

Las geodésicas se definen [4] por las ecuaciones en función de la longitud de arco s

$$\frac{d^2u^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} = 0,$$

Por estos resultados se demuestra que la ecuación diferencial de las geodésicas del hiperboloide de Poincaré es

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \mathbf{r},$$

con la solución general

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{a} \exp s + \mathbf{b} \exp(-s),$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores constantes de integración en el espacio de Minkowski.

Para estar contenida la geodésica en el hiperboloide, los vectores constantes de integración deberán obedecer las condiciones

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1/2, \quad (14)$$

esto es: \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores luzaloides con producto interno menos un medio.

La generalización de las ecuaciones de geometría diferencial del caso Euclidiano al caso de Minkowski son casi triviales [4]. Un aspecto a tomar en cuenta es la conducta de vectores con respecto al producto punto definido por medio de la métrica de Minkowski. Existen entonces vectores reales en el espacio de Minkowski que tienen un cuadrado negativo (temporaloide), positivo (espacialoide), o nulo (luzaloide). Es posible ver que una base de tres vectores reales ortogonales en el espacio de Minkowski de tres dimensiones, dos son espacialoides y uno temporaloide. Estas propiedades de los vectores reales del espacio de Minkowski las demuestra Synge [19], estableciendo los siguientes principios de exclusión:

1. Un vector temporaloide no puede ser ortogonal a otro vector temporaloide ni a un vector luzaloide.
2. Un vector luzaloide no puede ser ortogonal a un vector luzaloide linealmente independiente.

Como la geodésica se ha escrito en la base de dos vectores luzaloides \mathbf{a} y \mathbf{b} , la misma se puede escribir de otra forma con ayuda del vector espacialoide \mathbf{c} , ortogonal a los dos vectores luzaloides, es decir con las propiedades $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 1$ y $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0$. Entonces el vector de posición de la geodésica es ortogonal al vector \mathbf{c} por lo que $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = 0$, que es la ecuación de un plano; la geodésica está en la intersección de este plano con el hiperboloide. Otra forma de expresar la ecuación de la geodésica es substituir en la ecuación del plano las ecuaciones del hiperboloide escritas en términos de las coordenadas u^α

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}(u^\alpha) = -c^0 x^0(u^\alpha) + c^1 x^1(u^\alpha) + c^2 x^2(u^\alpha) = 0. \quad (15)$$

Al mismo tiempo que Poincaré desarrollaba estas ideas a partir de 1880, W. Killing hacía un uso similar del hiperboloide en el espacio de Minkowski para estudiar geometría hiperbólica. No existe evidencia de comunicación de estas ideas entre ellos. Killing atribuye a Weirstrass el origen de estas coordenadas en cursos atendidos por él. Eisenhart [4] llama a estas coordenadas de Weirstrass en base a una cita de 1902 de

L. Bianchi. Sin restar mérito a grandes matemáticos me concentro lo más posible en Poincaré.

A continuación se presentan tres modelos de geometría hiperbólica descubiertos por E. Beltrami [2] que fueron utilizados con provecho por Poincaré.

4.1. El disco de Beltrami

El disco se define por dos coordenadas $u^1 = u$, $u^2 = v$ de los puntos del hiperboloide de Poincaré (12) en el espacio de Minkowski

$$x^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, \quad x^1 = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, \quad x^2 = \frac{v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, \quad (16)$$

coordenadas que están definidas en el disco

$$u^2 + v^2 < 1.$$

El punto calculado de valores particulares de u y v está sobre el hiperboloide (12). La métrica del hiperboloide de Poincaré del tipo (6) induce la métrica del disco de Beltrami

$$ds^2 = \frac{(1 - v^2)du^2 + 2uvdudv + (1 - u^2)dv^2}{(1 - u^2 - v^2)^2}.$$

Las geodésicas se obtienen por substitución de (16) en la ecuación (15), donde \mathbf{c} es el vector espacialoide de componentes c^j . La raíz cuadrada es un divisor común que se suprime y se obtiene

$$c^1u + c^2v = c^0,$$

ésta es una línea recta si u y v se consideran coordenadas cartesianas del plano. La condición espacialoide implica que la línea recta interseca al disco unidad.

4.2. El semiplano de Poincaré

El semiplano de Poincaré se define por coordenadas $u^1 = \xi$ y $u^2 = \eta$ de los puntos del hiperboloide de Poincaré (12) sumergido en el espacio de Minkowski

$$x^0 = \frac{\xi^2 + \eta^2 + 1}{2\eta}, \quad x^1 = \frac{\xi}{\eta}, \quad x^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{2\eta}, \quad (17)$$

donde ξ, η se definen en el semiplano

$$\eta > 0,$$

para que las coordenadas del punto calculadas de los valores particulares de ξ y η esté sobre el hiperboloide (12). La métrica de tipo (6) sobre el hemiplano de Poincaré es

$$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{\eta^2}. \quad (18)$$

Las geodésicas se obtienen por substitución de (17) en (15)

$$-c^0(\xi^2 + \eta^2 + 1) + c^1 2\xi + c^2(\xi^2 + \eta^2 - 1) = 0,$$

en el plano ξ, η ésta es la ecuación de un círculo ortogonal a la línea $\eta = 0$ para $c^2 \neq c^0$. De otra forma es la ecuación de una línea ortogonal a la misma frontera.

La métrica (18) queda invariante ante las transformaciones de Möbius

$$\hat{\xi} + i\hat{\eta} = \frac{a(\xi + i\eta) + b}{c(\xi + i\eta) + c}, \quad \left(\frac{d\xi^2 + d\eta^2}{\eta^2} = \frac{d\hat{\xi}^2 + d\hat{\eta}^2}{\hat{\eta}^2} \right),$$

cuando los parámetros a, b, c, d están en \mathbb{R} . Para lo que sigue supondremos que se cumple la condición

$$ad - bc = 1.$$

Esta isometría corresponde en el espacio de Minkowski a una transformación de Lorentz

$$\begin{pmatrix} \frac{\xi^2 + \eta^2 + 1}{2\eta} \\ \frac{\xi}{\eta} \\ \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{2\eta} \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \frac{\xi^2 + \eta^2 + 1}{2\eta} \\ \frac{\xi}{\eta} \\ \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{2\eta} \end{pmatrix},$$

donde la matriz \mathcal{L} de la transformación de Lorentz se expresa en términos de los parámetros reales a, b, c, d como

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} ad + bc & ac - bd & ac + bd \\ ab - cd & \frac{1}{2}(a^2 - b^2 - c^2 + d^2) & \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) \\ ab + cd & \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) & \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \end{pmatrix},$$

la cual recuerda la expresión de Rodrigues para la matriz de rotación en función de los parámetros de Euler-Rodrigues.

4.3. El disco de Poincaré

El disco de Poincaré se define por coordenadas $u^1 = p$ y $u^2 = q$ de los puntos del hiperboloide de Poincaré (12) sumergido en el espacio de Minkowski

$$x^0 = \frac{1 + p^2 + q^2}{1 - p^2 - q^2}, \quad x^1 = \frac{2p}{1 - p^2 - q^2}, \quad x^2 = \frac{2q}{1 - p^2 - q^2}, \quad (19)$$

donde p, q se definen en el «disco»

$$p^2 + q^2 < 1.$$

Se verifica, sin pena ni gloria, que los puntos (19) satisfacen idénticamente la ecuación (12) del hiperboloide de Poincaré. La métrica de Minkowski induce una métrica (6) en el disco de Poincaré

$$(ds)^2 = \frac{4(dp^2 + dq^2)}{(1 - p^2 - q^2)^2}. \quad (20)$$

Las geodésicas se obtienen por substitución de (19) en (15)

$$-c^0(1 + p^2 + q^2) + 2c^1p + 2c^2q = 0, \quad (21)$$

la cual es la ecuación de un círculo ortogonal a la frontera del disco de Poincaré ($x^2 + y^2 = 1$), si c^0 es diferente de cero, de lo contrario es un diámetro del disco.

La métrica (20) queda invariante ante las transformaciones de Möbius

$$\hat{p} + i\hat{q} = \frac{a(p + iq) + b}{b^*(p + iq) + a^*}, \quad \left(\frac{4(dp^2 + dq^2)}{(1 - p^2 - q^2)^2} = \frac{4(d\hat{p}^2 + d\hat{q}^2)}{(1 - \hat{p}^2 - \hat{q}^2)^2} \right).$$

Para lo que sigue suponemos que se cumple la condición

$$bb^* - aa^* = 1.$$

La cual se satisface idénticamente con los parámetros reales μ, α, β si

$$a = \cosh \mu \exp(i\alpha), \quad b = \sinh \mu \exp(i\beta).$$

Esta isometría corresponde en el espacio de Minkowski a una transformación de Lorentz

$$\begin{pmatrix} \frac{1 + \hat{p}^2 + \hat{q}^2}{1 - \hat{p}^2 - \hat{q}^2} \\ \frac{2\hat{p}}{1 - \hat{p}^2 - \hat{q}^2} \\ \frac{2\hat{q}}{1 - \hat{p}^2 - \hat{q}^2} \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \frac{1 + p^2 + q^2}{1 - p^2 - q^2} \\ \frac{2p}{1 - p^2 - q^2} \\ \frac{2q}{1 - p^2 - q^2} \end{pmatrix},$$

donde la matriz \mathcal{L} de la transformación de Lorentz se factoriza en tres matrices en términos de los parámetros μ, α, β en forma similar a la factorización de una matriz de rotación con los ángulos de Euler

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3, \quad (22)$$

con

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\operatorname{sen}(\alpha + \beta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} \cosh 2\mu & 0 & \operatorname{senh} 2\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{senh} 2\mu & 0 & \cosh 2\mu \end{pmatrix},$$

y

$$\mathcal{L}_3 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) & -\operatorname{sen}(\alpha - \beta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta) & \cos(\alpha - \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz del medio, rodeada por dos rotaciones, es un boost, a lo largo de la coordenada x^1 , con velocidad $v = \tanh 2\mu$.

5. Los grupos fuchsianos

Poincaré llega a interesarse en la geometría hiperbólica a partir de sus investigaciones en la teoría de familias de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden en el plano complejo. Al usar la propiedad de que la combinación lineal de soluciones, también es solución de las ecuaciones, observa que al cociente de dos soluciones linealmente independientes le corresponde, por esta propiedad, en una transformación bilineal de Möbius del cociente de otras dos soluciones. Al considerar conjuntos de transformaciones de Möbius que forman un grupo discreto infinito, descubre funciones automorfias, soluciones de ecuaciones diferenciales, invariantes ante las transformaciones de dichos grupos. En el plano complejo, asociadas a ellas, encuentra la relación de ecuaciones y soluciones con la geometría no euclideana como ha sido presentada por Beltrami [2]. Relacionados a los estudios de Poincaré se tiene el trabajo precursor de Schwarz [18], del cual copiamos la figura 1. Interpretado el dibujo de Schwarz en el disco de Poincaré se descubre que desde el punto de vista de la geometría hiperbólica el disco se ha llenado completamente con triángulos idénticos, con lados formados por geodésicas ortogonales a la frontera del disco de Poincaré, y la figura es simétrica ante rotaciones y reflexiones hiperbólicas. Se tiene una red cristalina de

triángulos «iguales», con ángulos en sus vértices iguales a $\pi/2, \pi/4$ y $\pi/5$. Por ejemplo en la ecuación hipergeométrica asociada, los vértices de los triángulos son los puntos singulares, y la solución se comporta simétricamente ante las mismas simetrías de la figura geométrica. Las tres constantes de la ecuación hipergeométrica determinan los tres ángulos, cuya suma es menor que π .

Para dibujar esta figura empezamos con los triángulos del centro: dos de sus lados son diámetros del disco separados dos vecinos por un ángulo en el centro de magnitud $\pi/5$. La figura es simétrica respecto a reflexiones respecto a estos diámetros. El producto de dos reflexiones en diámetros vecinos es una rotación de $2\pi/5$. El dibujo se construye con el programa *postscript* que permite reproducir una parte de la figura después de rotar por $2\pi/5$. Aparte de estas rectas, el disco tiene círculos que son ortogonales a la frontera del disco. El programa dibuja arcos con los reales: mover la pluma a la posición inicial del arco (dos coordenadas); dar entonces coordenadas del centro, radio, ángulos inicial y final (en grados). Los arcos del dibujo están determinados por dos ángulos: σ que es la inclinación de la recta que une el centro del disco con el centro del arco, y γ que es el ángulo entre esta recta y la recta que une el centro del disco con cualquiera de las dos intersecciones entre el arco y la frontera del disco. Si la unidad de distancia es el radio del disco, las coordenadas del punto de intersección donde inicia el arco son $(\cos(\sigma + \gamma), \sin(\sigma + \gamma))$. Las coordenadas del centro del arco son $(\frac{\cos \sigma}{\cos \gamma}, \frac{\sin \sigma}{\cos \gamma})$, el radio del arco es $\tan \gamma$. Los ángulos inicial y final en radianes son $\sigma + \gamma + \pi/2$ y $\sigma - \gamma + 3\pi/2$. Estos arcos se deben reflejar respecto a los diámetros o se deben invertir respecto a otros arcos para construir la figura.

Estos arcos y diámetros son geodésicas (21) determinadas por las coordenadas del vector espacialoide c^0, c^1, c^2 del espacio de Minkowski, ortogonal a la geodésica, el cual, sin perder generalidad se puede escoger unitario $((c^0)^2 - (c^1)^2 - (c^2)^2 = 1)$. Las componentes de este vector se escriben en función de los ángulos del párrafo precedente:

$$c^0 = \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma}, \quad c^1 = \frac{\cos \sigma}{\sin \gamma}, \quad c^2 = \frac{\sin \sigma}{\sin \gamma}. \quad (23)$$

El producto punto definido con la métrica de Minkowski de dos de estos vectores unitarios espacialoides, correspondientes a dos geodésicas, nos da el coseno del ángulo entre ellas.

Los vectores luzaloides constantes \mathbf{a} y \mathbf{b} , ortogonales al vector espacialoide (23) y con las propiedades (14), se han escrito también en

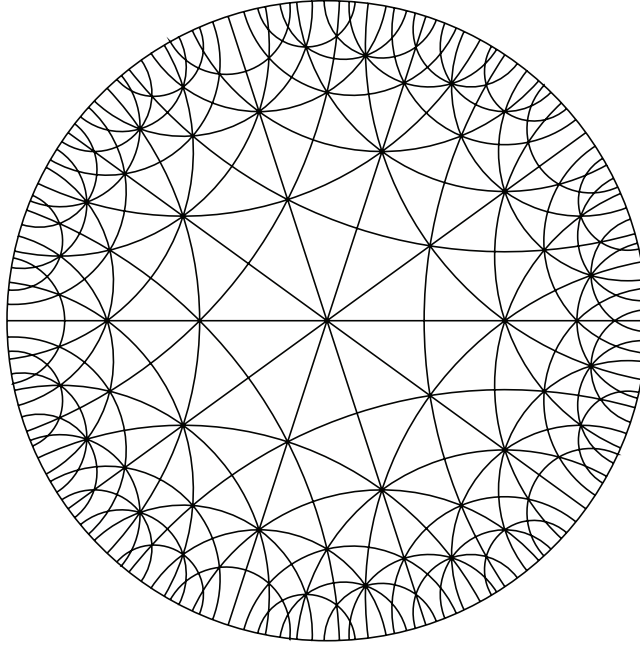


Figura 1: El grupo fuchsiano de Schwarz [18] de 1872.

función de los mismos ángulos

$$a^0 = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \gamma}, \quad a^1 = \frac{\cos(\sigma + \gamma)}{2 \operatorname{sen} \gamma}, \quad a^2 = \frac{\operatorname{sen}(\sigma + \gamma)}{2 \operatorname{sen} \gamma}$$

$$b^0 = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \gamma}, \quad b^1 = \frac{\cos(\sigma - \gamma)}{2 \operatorname{sen} \gamma}, \quad b^2 = \frac{\operatorname{sen}(\sigma - \gamma)}{2 \operatorname{sen} \gamma}.$$

La inversión geométrica respecto a este arco se puede efectuar mediante una transformación de Lorentz similar a (22): $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3$ con

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} \cos \sigma & -\operatorname{sen} \sigma & 0 \\ \operatorname{sen} \sigma & \cos \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1+\cos^2 \gamma}{\operatorname{sen}^2 \gamma} & 0 & -2 \frac{\cos \gamma}{\operatorname{sen}^2 \gamma} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 \frac{\cos \gamma}{\operatorname{sen}^2 \gamma} & 0 & \frac{1+\cos^2 \gamma}{\operatorname{sen}^2 \gamma} \end{pmatrix},$$

y

$$\mathcal{L}_3 = \begin{pmatrix} \cos \sigma & \operatorname{sen} \sigma & 0 \\ -\operatorname{sen} \sigma & \cos \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

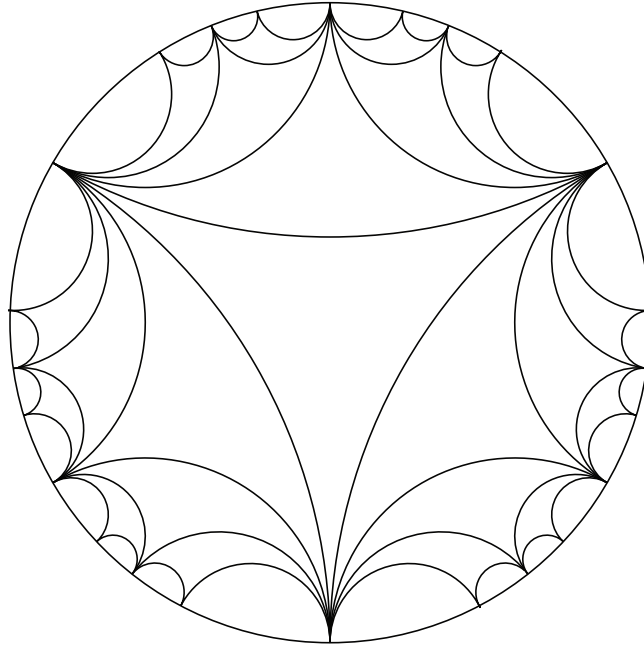


Figura 2: Un grupo fuchsiano en el disco de Poincaré. La celda elemental es un triángulo ideal con ángulo cero en los tres vértices.

Poincaré generaliza la teoría para tomar en cuenta el caso en que los triángulos tienen ángulo cero en los tres vértices. Para ello hace tender los vértices a la frontera del disco de Poincaré, llamado horociclo, que corresponde al infinito. Los triángulos se llaman ahora ideales. Un ejemplo de ecuación diferencial a la que puede aplicarse este caso [5] es la ecuación diferencial de Legendre para los dos períodos de las funciones elípticas de Jacobi en función del módulo. La figura 2 ilustra un grupo fuchsiano formado por triángulos ideales. Esta idea se generaliza a los tetraedros ideales de la geometría hiperbólica de tres dimensiones que será considerada en una sección posterior.

El triángulo ideal está formado por tres geodésicas que son asintóticamente tangentes en infinito en una dirección luzaloides. Tenemos tres vectores luzaloides compartidos por las tres geodésicas, cada vector pertenece a dos geodésicas. De acuerdo a (14) el producto punto entre dos diferentes es $-1/2$. Cada geodésica tiene un vector unitario espaciale ortogonal a su geodésica. El producto escalar entre dos vectores unitarios diferentes debe ser menos uno porque el ángulo entre estas geodésicas es π . Los tres vectores unitarios perpendiculares a geodésicas forman una base dual de los tres vectores nulos compartidos por dos geodésicas. La matriz de productos punto entre los vectores de una

de estas bases es respectivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

las cuales son inversas una de la otra. En [14] hemos utilizado estas propiedades en el problema de tres cuerpos de la mecánica.

6. Cuatro dimensiones

Poincaré también analizó la generalización de la geometría hiperbólica de dos a tres dimensiones. Todas las ecuaciones de la sección 4 anteriores a la subsección 4.1, con excepción de (2), (3), (4) y (15) permanecen válidas si los índices latinos toman valores entre 0 y 3; y si los índices griegos valen ahora entre 1 y 3. La ecuación (4) sufre la generalización trivial

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial x^1}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial x^2}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial x^3}{\partial u^\alpha} \right), \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

El producto punto de esta base en \mathbb{R}^{12} , produce el tensor métrico de la superficie en \mathbb{R}^9

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \eta_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta},$$

donde los índices latinos repetidos se suman en esta sección de 0 a 3 y donde los índices griegos repetidos se suman en esta sección de 1 a 3.

Se mantienen en cuatro dimensiones del espacio de Minkowski los teoremas de exclusión obtenidos por Synge [19] que prohíben ortogonalidad entre vectores reales temporaloides y luzaloides.

Es posible ver que de cuatro vectores reales, ortogonales, en el espacio de Minkowski que forman una base, tres son espacialoides y uno temporaloide [19].

Por estas razones, si bien las ecuaciones de las geodésicas (28) y (29) están correctas, ahora existen dos vectores espacialoides \mathbf{c} y \mathbf{d} , ortogonales entre sí y perpendiculares a los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} de la geodésica en lugar del único \mathbf{c} del caso de tres dimensiones del espacio de Minkowski.

El modelo del semiplano de Poincaré se generaliza al semiespacio de Poincaré

El semiespacio de Poincaré se define por coordenadas $u^1 = \xi$, $u^2 = \eta$ y $u^3 = \zeta$ de los puntos del hiperboloide de Poincaré (12) sumergido en

el espacio de Minkowski de cuatro dimensiones

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 1}{2\zeta}, & x^1 &= \frac{\xi}{\zeta}, \\ x^2 &= \frac{\eta}{\zeta}, & x^3 &= \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1}{2\zeta}, \end{aligned} \quad (24)$$

donde ξ , η , ζ se definen en el semiespacio

$$\zeta > 0,$$

para que las coordenadas del punto calculadas de los valores particulares de ξ , η y ζ esté sobre el hiperboloide (12). La métrica de tipo (6) sobre el hemiplano de Poincaré es

$$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{\zeta^2}. \quad (25)$$

Las geodésicas se obtienen por substitución de (24) en la generalización de (15)

$$-c^0(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 1) + c^1 2\xi + c^2 2\eta + c^3(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1) = 0,$$

en el semiespacio ξ, η, ζ esta es la ecuación de una esfera ortogonal al plano $\zeta = 0$ para $c^3 \neq c^0$. De otra forma es la ecuación de un plano ortogonal a la misma frontera.

El disco de Poincaré da lugar a la 3-bola de Poincaré. La 3-bola de Poincaré se define por coordenadas $u^1 = p$, $u^2 = q$ y $u^3 = r$ de los puntos del hiperboloide de Poincaré sumergido en el espacio de Minkowski

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{1 + p^2 + q^2 + r^2}{1 - p^2 - q^2 - r^2}, & x^1 &= \frac{2p}{1 - p^2 - q^2 - r^2}, \\ x^2 &= \frac{2q}{1 - p^2 - q^2 - r^2}, & x^3 &= \frac{2r}{1 - p^2 - q^2 - r^2}, \end{aligned} \quad (26)$$

donde p, q, r se definen en la bola

$$p^2 + q^2 + r^2 < 1.$$

Se verifica que los puntos (26) satisfacen idénticamente la ecuación del hiperboloide de Poincaré. La métrica de Minkowski induce una métrica (6) en el disco de Poincaré

$$(ds)^2 = \frac{4(dp^2 + dq^2 + dr^2)}{(1 - p^2 - q^2 - r^2)^2}. \quad (27)$$

Las geodésicas se obtienen por substitución de (26) en la generalización de (15)

$$-c^0(1 + p^2 + q^2 + r^2) + 2c^1p + 2c^2q + 2c^3r = 0, \quad (28)$$

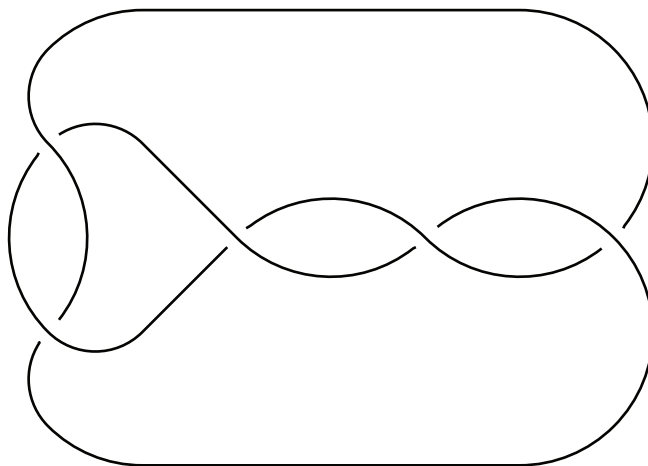
la cual es la ecuación de una esfera ortogonal a la frontera de la bola de Poincaré ($p^2 + q^2 + r^2 = 1$) si c^0 es diferente de cero, de lo contrario es un disco que divide en dos hemisferios dicha bola.

7. Las transformaciones de Lorentz del nudo 5_2

En esta sección voy a presentar dos transformaciones de Lorentz que generan el grupo del complemento del nudo hiperbólico 5_2 . No se trata de un ejercicio sin relevancia alguna donde se introduce sin justificación razonable el parentesco entre este nudo y las transformaciones de Lorentz.

Por el contrario, se encuentra que los grupos de simetría de los complementos de los nudos, tienen representaciones como subgrupos kleinianos de las transformaciones de Möbius. En el modelo de la 3-bola de Poincaré estos grupos dejan invariante regiones de la misma y la dividen en esas regiones fundamentales, que en el modelo de dos dimensiones se pueden representar gráficamente como los triángulos formados por arcos de círculo en los dibujos de las figuras 1 y 2. En este caso de tres dimensiones, en lugar de los triángulos ilustrados, la 3-bola de Poincaré se llena con tetraedros. Los tetraedros de interés para quienes estudian los nudos son tetraedros ideales, con seis aristas, que en la 3-bola, son círculos ortogonales a la frontera de la 3-bola, la horosfera situada a una distancia infinita, si medimos la distancia con la métrica hiperbólica.

Las aristas del tetraedro ideal, formadas por geodésicas, están en la intersección de dos esferas ortogonales a la horosfera. El ángulo a lo largo de la arista es el mismo, porque es el ángulo determinado por los vectores unitarios perpendiculares a las esferas en el espacio de Minkowski. En cada vértice del tetraedro llegan tres geodésicas y se intersecan tres esferas, los tres ángulos interiores al triángulo formado por los vectores unitarios perpendiculares a las esferas suman π , porque en el límite en que se acercan a la horosfera están en el plano tangente a la horosfera. Por la propagación del ángulo en cada arista de un vértice a otro y por la propiedad de que la suma de los tres ángulos en cada vértice es π , se demuestra que los ángulos de aristas opuestas del

Figura 3: El nudo 5_2 .

tetraedro ideal tienen el mismo ángulo. Cada tetraedro ideal tiene tres ángulos diedros entre las esferas que forman sus caras.

El grupo del complemento de un nudo está formado por lazos contenidos en el complemento, que no pueden cruzar el nudo. Aprender a generar el grupo de un nudo puede resultar sencillo si se considera la presentación de Wirtinger que se puede disfrutar como lo enseña Rolfsen [17].

La ecuación del grupo del nudo 5_2 de la figura 3, está generado por los elementos F, G sujetos a la restricción

$$F^{-1}G^{-1}FGFG^{-1}F^{-1} = G^{-1}F^{-1}GFGF^{-1}G^{-1}. \quad (29)$$

En el trabajo publicado por J. Milnor [9] (derivado de un simposio que reconoce la herencia matemática de Poincaré en 1980) Milnor representa los generadores de un grupo similar por dos transformaciones de $S(\mathbb{C}^2)$ parabólicas cuyas matrices son:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

que al ser substituidas en la ecuación (29), que satisfacen los generadores, nos da la ecuación cúbica

$$z^3 - z^2 + 2z - 1 = 0,$$

cuya solución compleja en términos de tres ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, cuya suma es π , se puede escribir como

$$z = \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_3} \exp i\alpha_1 = 0.215079854500973 + 1.30714127868205i. \quad (31)$$

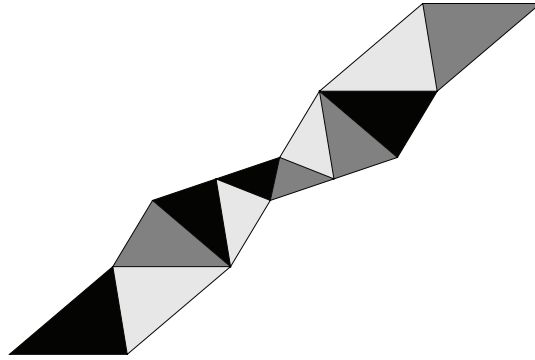


Figura 4: Celda elemental del nudo en la horosfera, según Thurston.

Los tres ángulos se determinan con facilidad porque se permutan cíclicamente en la ecuación (31) por las transformaciones del grupo modular

$$z \rightarrow \frac{1}{1-z}, \quad z \rightarrow 1 - \frac{1}{z}.$$

W. Thurston encuentra que tres tetraedros con los mismos ángulos forman la celda elemental invariante ante las transformaciones de este grupo. Los ángulos de cada tetraedro son los mismos α_1, α_2 y α_3 .

Los tres tetraedros unidos forman una celda elemental sin huecos entre ellos. La unión de las celdas idénticas a la elemental rellenan perfectamente la 3-bola de Poincaré.

Al pegar los tres tetraedros, sus vértices en infinito llegan a la horosfera de la 3-bola de Poincaré donde la geometría es euclidiana. Al llenar la 3-bola de Poincaré con uniones de estos tetraedros, se encuentra sobre la horosfera un mosaico donde se repite la celda elemental formada por los doce triángulos de los vértices de los tetredros.

La celda elemental calculada por Thurston [20] se representa en la figura 4. En el dibujo que hizo Thurston no se da importancia a los ángulos verdaderos, lo cual se hace en la figura 4. Los triángulos de los vértices de los tetraedros se distinguen por tonos de gris diferentes y muestran al tono de gris pálido simétrico frente a una rotación de π y a los tonos medio y oscuro intercambiados después de la misma rotación. Posteriormente unimos varias copias de la celda elemental y aparece en la figura 5 un mosaico con otra celda elemental equivalente que se separa en la figura 6 y es la que se usa a continuación por ser un paralelepípedo.

La celda formada por el paralelepípedo (ver figura 6) está formada por doce triángulos semejantes, cuyos tres ángulos serán p el menor, m el intermedio y g el mayor. De un vértice del paralelepípedo se encuentra

la propiedad de la geometría euclidiana para la suma de ángulos $p+m+g = \pi$. Del otro vértice se tiene la ecuación que relaciona los ángulos de la figura $3p + m = \pi$. Del interior se encuentra $3g + 2m = 2\pi$, la cual no es independiente de las dos anteriores. De dos de ellas se encuentra la propiedad no evidente $g = 2p$. Estas ecuaciones dejan un ángulo independiente. Lo que es menos evidente es que dicho ángulo satisface otra condición debida al acomodo sin huecos de los triángulos semejantes. Se deduce esa propiedad de la ley que relaciona el tamaño de los lados con los senos de los ángulos opuestos.

De los cinco tamaños de triángulos diferentes descartemos los mayores y menores. Entre los tres restantes hay tres lados que separan dos de ellos. Cancelando estos tres de la ley que relaciona lados y senos de ángulos, obtenemos las ecuaciones

$$\operatorname{sen}^3 m = \operatorname{sen} p \operatorname{sen}^2 g \quad \rightarrow \quad 4 \cos^2 p = (4 \cos^2 p - 1)^3. \quad (32)$$

Ésta es una ecuación cúbica $x^3 - x - 1 = 0$ para la raíz $x = \cos^2 p - 1$. Con soluciones numéricas aproximadas

$$\begin{aligned} x &= 1.32471795724475, \\ p &= 0.703857721301473, \\ g &= 1.40771544260295, \\ m &= 1.03001948968536. \end{aligned}$$

Estos ángulos son los de la raíz de la ecuación del nudo con las correspondencias de notación

$$\alpha_1 = g, \quad \alpha_2 = m, \quad \alpha_3 = p.$$

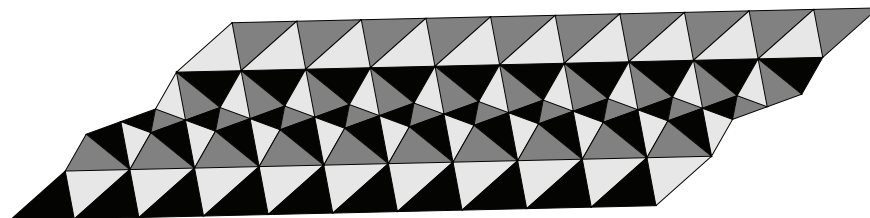


Figura 5: Mosaico con la celda del dibujo anterior que muestra otra celda elemental diferente, la cual es un paralelepípedo.

Los generadores del grupo del nudo 5_2 (29) pueden representarse

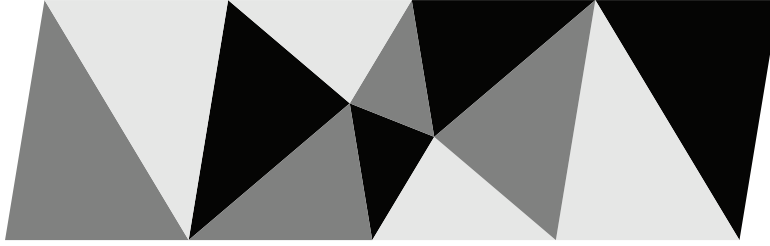


Figura 6: La celda elemental en forma de paralelepípedo. Los vértices de cada tetraedro con tonos de gris diferentes.

por las transformaciones de Lorentz

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\text{sen } \alpha_2 \cos \alpha_1}{\text{sen } \alpha_3} & \frac{\text{sen } \alpha_2 \cos \alpha_1}{\text{sen } \alpha_3} \\ 0 & 1 & \frac{\text{sen } \alpha_2 \text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \alpha_3} & \frac{\text{sen } \alpha_2 \text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \alpha_3} \\ -\frac{\text{sen } \alpha_2 \cos \alpha_1}{\text{sen } \alpha_3} & -\frac{\text{sen } \alpha_2 \text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \alpha_3} & 1 - \frac{\text{sen}^2 \alpha_2}{2 \text{sen}^2 \alpha_3} & -\frac{\text{sen}^2 \alpha_2}{2 \text{sen}^2 \alpha_3} \\ \frac{\text{sen } \alpha_2 \cos \alpha_1}{\text{sen } \alpha_3} & \frac{\text{sen } \alpha_2 \text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \alpha_3} & \frac{\text{sen}^2 \alpha_2}{2 \text{sen}^2 \alpha_3} & 1 + \frac{\text{sen}^2 \alpha_2}{2 \text{sen}^2 \alpha_3} \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Estas son las transformaciones de Lorentz en el espacio de Minkowski asociadas a las transformaciones que usa Milnor [9] por medio de las transformaciones de Möbius parabólicas en (30). Por supuesto se trata del isomorfismo (o casi isomorfismo 2 a 1) entre ambos grupos. A una transformación de Möbius parabólica (con la propiedad $(F - 1)^2 = 0$), le corresponde una transformación de Lorentz

$$\mathcal{L}^j_l = \exp(\mathcal{A}^{jk} \eta_{kl}),$$

definida por su desarrollo en serie de potencias, donde \mathcal{A}^{jk} es una matriz antisimétrica con sus dos invariantes nulos, con la propiedad $(\mathcal{A}^{jk} \eta_{kl})^3 = 0$ [13].

8. Conclusiones

Poincaré tiene un lugar consagrado entre los matemáticos por sus contribuciones seminales en los campos de la geometría y de la topología. Sus estudios fundamentales de funciones invariantes ante grupos fuchsianos y kleinianos han dado lugar a nuevos territorios, algunos inexplorados, relacionados con la geometría hiperbólica. Entusiasmar a jóvenes

matemáticos y físicos en ensanchar nuestro conocimiento en estas direcciones es nuestro propósito.

Para aquellos inconformes en participar en territorios que ya tienen fuerte competencia, deberían buscar leyendo a V. Arnold en el campo viviente de la teoría de bifurcaciones y catástrofes [1], que para Poincaré estaba relacionado con el comportamiento de las ecuaciones de la física donde las singularidades requieren tratamiento especializado, y que se conectan de forma misteriosa con la formulación de la mecánica cuántica a la Feynman [6]. Mi pensamiento quisiera acercarse al de E. Witten y quizá no está muy lejano cuando vemos que en la conferencia que imparte en el cincuenta aniversario del CINVESTAV en 2011 nos habla de variedades en el semiespacio de Poincaré, y cuando dibuja nudos sobre la frontera de este semiespacio.

Bibliografía

1. V. I. Arnold, *Catastrophe Theory*, Springer, New York, 1992.
2. E. Beltrami, «Teoria fondamentali degli spazii di curvatura costante», *Annali di Matematica*, vol. 2, 1868, 232–255.
3. E. Charpentier, E. Ghys y A. Lesne, eds., *The Scientific Legacy of Poincaré*, American Mathematical Society, London Mathematical Society, Providence, London, 2010.
4. L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, 1966.
5. J. J. Gray, *Linear Differential Equations and Group Theory*, 2.^a ed., Birkhäuser, Boston, 2000.
6. J. Z. Justin, *Path Integrals in Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 2004.
7. J. McCleary, *Geometry from a Differentiable Viewpoint*, Cambridge University Press, New York, 1997.
8. A. A. Michelson y E. W. Morley, «On the relative motion of the Earth and the luminiferous ether», *The American Journal of Science*, vol. 34 (203), 1887, 333–345.
9. J. D. Milnor, «Hyperbolic geometry: the first 150 years», *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, vol. 6, 1982, 9–24, Reimpreso en *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **39** Part I, 25–40 (1983).
10. H. Minkowski, «Die Grundgleichungen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern», *Nachrichten Ges. Wis. Göttingen*, vol. 2, 1908, 53–111.
11. W. Pauli, *Theory of Relativity*, Dover, New York, 1981, Traducido del

- alemán de 1921 por Gerard Field y publicado en 1958 por Pergamon Press.
12. R. Penrose y A. A. Knopf, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Oxford University Press, New York, 2005.
 13. E. Piña, «La transformación de Lorentz y el movimiento de una carga en el campo electromagnético constante», *Revista Mexicana de Física*, vol. 16, 1967, 233–249.
 14. E. Piña y A. Bengochea, «Hyperbolic geometry for the binary collision angles of the three-body problem in the plane», *Qualitative theory of dynamical systems*, vol. 8, 2009, 399–417.
 15. H. Poincaré, «Sur les applications de la Géometrie non-Euclidienne à la théorie des formes quadratiques», *Association Française pur l'avancement des sciences, 10th session, Algiers, vol. 16, 1881, Œuvres*, V, 267–276.
 16. ———, «Sur la dynamique de l'électron» *C. R. Ac. Sci. Paris*, **140**, (1905), pp. 1504-1508, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, vol. 21, 1906, 129–176.
 17. D. Rolfsen, *Knots and Links*, AMS Chelsea Publishing, Providence, 2003. Reimpreso con correcciones del de Publish or Perish, Berkeley, 1976.
 18. H. A. Schwarz, «Ueber diegenijen Falle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstell», *JfM*, vol. 75, 1872, 292–335.
 19. J. L. Synge, *Relativity, the special theory*, North Holland, Amsterdam, 1956.
 20. W. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, tomo 1, Princeton University Press, 1997, (S. Levy ed.).
 21. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, tomo I, Cambridge University Press, 2005.