

¿Por qué no es posible definir una integral tipo Lebesgue-Stieltjes o Riemann-Stieltjes con respecto al movimiento browniano?

A. Murillo Salas

Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n
Guanajuato, Gto. 36240, México
amurillos@ugto.mx

J. Villa Morales

Departamento de Matemáticas y Física
Universidad Autónoma de Aguascalientes
Av. Universidad 940, Ciudad Universitaria
Aguascalientes, Ags. 20131, México
jvilla@correo.uaa.mx

Resumen

En esta nota introducimos el concepto de ecuaciones diferenciales estocásticas y con ello esperamos exhibir la necesidad de definir el concepto de integral (estocástica) con respecto al movimiento browniano. Notaremos que, no obstante esta necesidad, no es posible definir una integral trayectorial en el sentido de Lebesgue-Stieltjes o bien Riemann-Stieltjes.

1. Introducción

Como es conocido (ver por ejemplo [11]), muchos fenómenos naturales se pueden modelar por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias

Palabras clave: Integral de Lebesgue-Stieltjes, Integral de Riemann-Stieltjes, Principio de Banach-Steinhaus, Movimiento browniano.

(EDO). Mas precisamente, EDO de primer orden no lineales, como

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) &= b(X(t)), \\ X(0) &= x_0, \end{cases} \quad (1)$$

donde $X(t)$ representa el comportamiento (o estado) del sistema al tiempo t y sigue una dinámica (o evolución) según (1). En efecto, estas ecuaciones diferenciales modelan sistemas dinámicos con aplicaciones en ciencias tales como la física (el flujo de calor en estado estacionario, leyes de Kirchhoff, trayectorias ortogonales, ley de desintegración radioactiva, deflexión de vigas), la química (reacciones y mezclas), la biología (crecimiento de poblaciones), la economía (oferta y demanda, inventarios), entre otras.

Una buena parte de la modelación en matemáticas se realiza exclusivamente por medio de EDO. En este caso se asume, en cierto modo, que se conocen todas las componentes que afectan al sistema, sin embargo no siempre es así. Por ejemplo, hay materiales tales que, asumiendo cierto grado de pureza (y homogeneidad), se comportan de una manera y radicalmente diferentes al tener cierta impureza. Esto pasa por ejemplo (ver [14]) en el estudio de la ruptura de las alas de aviones, brocas, rieles de vía, etc.

Con la finalidad de incorporar, de alguna manera, estos «ruidos imprevistos» que modifican el estado del sistema recordemos los siguientes conceptos. Un espacio medible es una pareja (Ω, \mathcal{F}) , donde \mathcal{F} es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω . Si (Ω, \mathcal{F}) y (C, \mathcal{B}) son espacios medibles una función $X : \Omega \rightarrow B$ se dice \mathcal{F}/\mathcal{B} medible si $X^{-1}(C) \in \mathcal{F}$, para cada $B \in \mathcal{B}$. Si P es una medida en (Ω, \mathcal{F}) tal que $P(\Omega) = 1$ entonces la tripleta (Ω, \mathcal{F}, P) se llama espacio de probabilidad. Si X es \mathcal{F}/\mathcal{B} medible, entonces $\nu_X(B) = P(X^{-1}(B))$ define una medida de probabilidad en (C, \mathcal{B}) llamada distribución de X . En particular, $C = \mathbb{R}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ -álgebra de Borel entonces una función $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ medible se llama variable aleatoria. Dos variables aleatorias X_1 y X_2 se dicen independientes si $\nu_{(X_1, X_2)}(B_1 \times B_2) = \nu_{X_1}(B_1)\nu_{X_2}(B_2)$, para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por otra parte, un proceso estocástico es una colección, $\{X_t, t \geq 0\}$, de variables aleatorias definidas en un mismo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Se ha observado, en diversas ciencias, que sería deseable que la perturbación aleatoria (llamada ruido blanco) fuese un proceso estocástico $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$ con las siguientes características:

- (a) Centrado, es decir, $\mathbb{E}(\xi(t)) = \int_{\Omega} \xi(t, w)P(dw) = 0$, para cada $t > 0$. La integral es en el sentido de Lebesgue.

- (b) Para cualesquiera $t_1 < \dots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$, la distribución del vector aleatorio

$$(\xi(t + t_1), \dots, \xi(t + t_n))$$

no depende de $t \geq 0$.

- (c) Las variables aleatorias $\xi(s)$ y $\xi(t)$, $t \neq s$, son independientes, para cualesquiera $s, t \geq 0$.

Veremos en la sección 4 que el ruido blanco no existe como proceso estocástico ordinario. Sin embargo, se le puede dar un sentido riguroso como proceso estocástico generalizado (ver [4, cap. 3]).

Consideremos un ejemplo concreto para fijar ideas. Malthus (1766–1834) fue un economista inglés que en un ensayo sobre la ley del crecimiento de la población en el año de 1789 interpretó la desigualdad económica entre las clases trabajadora y burguesa, como una consecuencia del crecimiento de la población y la escasez de recursos. Malthus afirmaba que la población crece en progresión geométrica o exponencial y los alimentos crecen en progresión aritmética o lineal, por lo que eventualmente no se podrán alimentar todos los habitantes de la Tierra. Traduciendo lo anterior a un modelo matemático, tenemos que si $X(0) = x_0$, es la población inicial, entonces la población al tiempo t , $X(t)$, es directamente proporcional a la tasa de crecimiento al tiempo t , $dX(t)/dt$, así

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = aX(t), \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

donde $a > 0$ es la constante de proporción. Resolviendo esta EDO tenemos que

$$X(t) = x_0 e^{at}, \quad t \geq 0.$$

Si se inicia con dos individuos y la tasa de crecimiento de la población es la mitad de la población, entonces la población crece como se muestra en la figura 1.

No obstante, sabemos que hay factores que inhiben o favorecen el crecimiento de la población. Por ejemplo, hay enfermedades, cambios climáticos (sequías, inundaciones, tornados), vacunas, mejora en la calidad de los alimentos, etc. Por ende, un comportamiento más real del crecimiento de la población sería una curva no necesariamente suave y creciente (sería algo así como la que aparece en la figura 2). No obstante, esta variabilidad aleatoria, esperamos que en «promedio» el comportamiento de la población sea similar al de la figura 1.

Ahora, si la tasa de crecimiento de la población, $\frac{d}{dt}X(t)$, es directamente proporcional al tamaño de la población, X_t , salvo un ruido

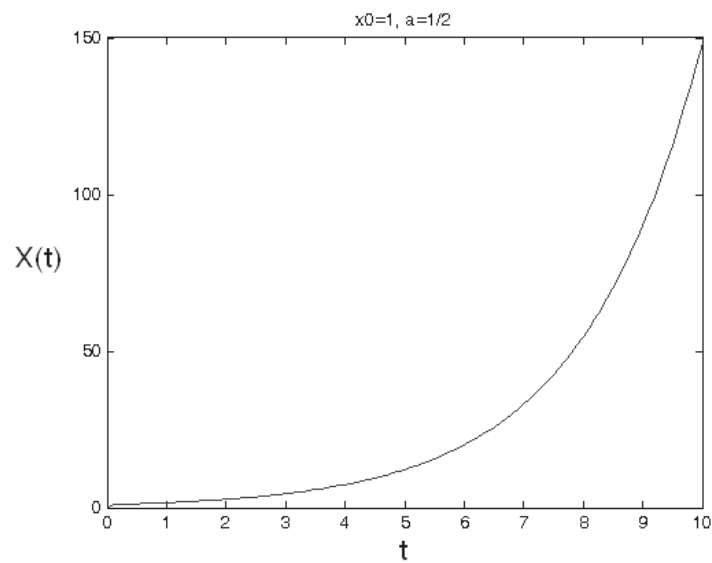


Figura 1: Crecimiento de la población sin ruidos.

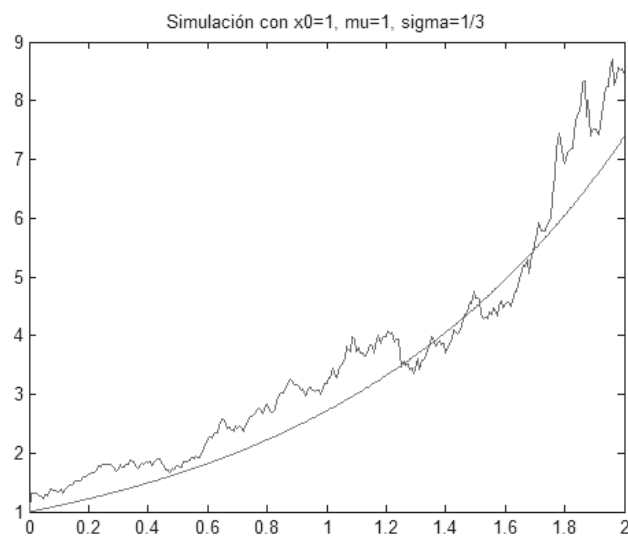


Figura 2: Crecimiento de la población con ruidos.

blanco, entonces

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) &= aX(t) + \xi(t), \\ X(0) &= x_0, \end{cases}$$

modela el crecimiento de la población $X(t)$, $t \geq 0$. Esta ecuación la podemos escribir de manera formal como

$$dX(t) = aX(t) dt + \xi(t) dt, \quad X(0) = x_0, \quad (3)$$

es decir

$$X(t) = x_0 + \int_0^t aX(s) ds + W(t) \quad (4)$$

donde

$$W(t) = \int_0^t \xi(s) ds. \quad (5)$$

La ecuación (4) la podemos interpretar diciendo que la población $X(t)$ es un promedio de los valores $aX(s)$, cuando $0 \leq s \leq t$, perturbado por un ruido $W(t)$. Veremos, en la sección 4, que el ruido $W = \{W(t), t \geq 0\}$ es el movimiento browniano.

De manera formal podemos ver que

$$X(t) = x_0 e^{at} + e^{at} \int_0^t e^{-as} dW(s) \quad (6)$$

es solución de (3). En efecto, ‘tomando diferenciales’

$$\begin{aligned} dX(t) &= x_0 e^{at} adt + a e^{at} dt \int_0^t e^{-as} dW(s) + e^{at} e^{-at} dW(t) \quad (7) \\ &= a \left(x_0 e^{at} + e^{at} \int_0^t e^{-as} dW(s) \right) dt + dW(t) \\ &= aX(t) dt + \xi(t) dt. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de tipo (4) se llaman ecuaciones diferenciales estocásticas lineales con ruido aditivo. Más generalmente, se tienen ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) de la forma

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(X(s)) ds + \int_0^t \sigma(X(s)) dW(s), \quad (8)$$

las cuáles se interpretan en forma diferencial

$$dX(t) = b(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t), \quad X(0) = x_0.$$

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad donde un movimiento browniano W y un proceso estocástico Y están definidos. Para cada $\omega \in \Omega$ consideramos $Y(\omega, \cdot)$ y $W(\omega, \cdot)$ como funciones de t . Como hemos visto, es conveniente (ver (6)) contar con una definición de $\int_0^t Y(\omega, s) dW(\omega, s)$. A primera vista sería natural intentar definir la integral como una integral tipo Lebesgue-Stieltjes o Riemann-Stieltjes. El propósito, en lo que sigue, es mostrar por qué esto no es posible. Cabe mencionar que una herramienta rigurosa, y no formal como el cálculo hecho en (7), para demostrar que un proceso estocástico es solución de una EDE, como (8), es la fórmula de Itô o de cambio de variable, ver [2], [7] u [8].

El resto de la nota está organizada de la siguiente manera. En la sección 2 se introduce la noción de integral de Lebesgue-Stieltjes (L-S) y en la sección 3 la de integral de Riemann-Stieltjes (R-S). Finalmente, en la sección 4 mostramos por qué no es posible definir una integral tipo L-S o R-S con respecto a las trayectorias del movimiento browniano.

2. Integral de Lebesgue-Stieltjes

Una partición π de $[a, b]$, es un conjunto $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, donde $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. El número

$$\|\pi\| = \max \{|t_{i-1} - t_i| : i = 1, \dots, n\}$$

se llama norma de la partición π .

Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. La variación de g en $[a, b]$ se define como

$$V_{[a,b]}(g) = \sup_{\pi} V(g, \pi) = \sup_{\pi} \sum_{\pi} |\Delta g| = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})|, \quad (9)$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones π de $[a, b]$. Se dice que g es de variación acotada en $[a, b]$ si $V_{[a,b]}(g) < \infty$.

Se sabe (ver [9, p. 302], en el fondo es el teorema de extensión de Carathéodory) que toda función de variación acotada $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ induce una única medida signada (o carga) finita λ_g en $\mathcal{B}([a, b])$, la σ -álgebra de Borel en $[a, b]$, tal que

$$\lambda_g((x, y]) = g(y+) - g(x+), \quad \forall a \leq x < y \leq b, \quad (10)$$

donde $g(x+)$ es el límite por la derecha de g en x . La medida λ_g se llama medida de Lebesgue-Stieltjes y la integral inducida por esta medida, $\int_a^b f(x) \lambda_g(dx)$, se llama integral de Lebesgue-Stieltjes (L-S). Se tiene el recíproco.

Teorema 2.1. *Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si la función de conjuntos definida en (10) se extiende a una medida signada finita λ_g en $\mathcal{B}([a, b])$, entonces g es de variación acotada en $[a, b]$.*

Demostración. Por el teorema de descomposición de Hahn-Jordan (ver [9, p. 273]) existen medidas λ_g^+ y λ_g^- en $\mathcal{B}([a, b])$ tales que $\lambda_g = \lambda_g^+ - \lambda_g^-$. La medida finita $|\lambda_g| = \lambda_g^+ + \lambda_g^-$ es la variación total de λ_g (ver [3, p. 88]). Sea $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n |\lambda_g((t_{i-1}, t_i])| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\lambda_g|((t_{i-1}, t_i]) \\ &= |\lambda_g| \left(\bigcup_{i=1}^n (t_{i-1}, t_i] \right) \\ &= |\lambda_g|((a, b]). \end{aligned}$$

Es decir, $V(g, \pi) \leq |\lambda_g|((a, b])$, por lo tanto $V_{[a,b]}(g) < \infty$. □

3. Integral de Riemann-Stieltjes

Ahora estudiaremos otra integral, en cierto sentido, más elemental que la integral de Lebesgue-Stieltjes pues no usa teoría de la medida para su construcción.

Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si existe el límite

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) (g(t_i) - g(t_{i-1})) = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(f, g, \pi)$$

donde $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$ y $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$, es un punto arbitrario, se llama integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto a g y se denota por $\int_a^b f(x) dg(x)$.

A continuación caracterizaremos aquellos integradores g que integran a toda función continua f . Para esto necesitamos un principio de acotamiento uniforme que trataremos en seguida (ver el teorema 3.1), pero antes introduciremos alguna notación. Sean $C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua en } [a, b]\}$ y $\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Una transformación lineal $T : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice acotada si

$$\|T\| = \sup\{|T(f)| : \|f\|_u \leq 1\} < \infty.$$

Lema 3.1. Sea $T : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ una transformación lineal acotada. Para cualesquiera $f \in C([a, b])$ y $r > 0$ existe $\tilde{f} \in C([a, b])$ tal que $|T(\tilde{f})| \geq \frac{2}{3}r \|T\|$ y $\|\tilde{f} - f\|_u \leq r$.

Demostración. Sea $h \in C([a, b])$. Usando las desigualdades elementales

$$\text{máx}\{x, y\} \geq \frac{x+y}{2} \quad \text{y} \quad |x| + |y| \geq |x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \text{máx}\{|T(f+h)|, |T(f-h)|\} &\geq \frac{|T(f+h)| + |T(f-h)|}{2} \\ &\geq \frac{|T(f+h) - T(f-h)|}{2} = |T(h)|. \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado la linealidad de T . Tomando supremos y usando de nuevo la linealidad de T , nos queda

$$\begin{aligned} \sup_{\|\tilde{h}-f\|_u \leq r} |T(\tilde{h})| &\geq \sup_{\|h\|_u \leq r} \text{máx}\{|T(f+h)|, |T(f-h)|\} \\ &\geq \sup_{\|h\|_u \leq r} |T(h)| = r \sup_{\|\frac{1}{r}h\|_u \leq 1} |T(\frac{1}{r}h)| = r \|T\|. \end{aligned}$$

De la definición de supremo se sigue que existe $\tilde{f} \in C([a, b])$ con $\|\tilde{f} - f\|_u \leq r$, tal que $|T(\tilde{f})| \geq \frac{2}{3}r \|T\|$. \square

Teorema 3.1. Sea \mathcal{F} una familia de transformaciones lineales acotadas definidas en $C([a, b])$ con valores en \mathbb{R} . Si $\sup\{|T(f)| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$ para cada $f \in C([a, b])$, entonces $\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$.

Demostración. Supongamos que $\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\} = \infty$. Sea $(T_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en \mathcal{F} tal que $\|T_n\| \geq 4^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $f_0 = 0$ y supongamos que ya hemos tomado f_1, f_2, \dots, f_n en $C([a, b])$ tales que

$$\|f_i - f_{i-1}\|_u < 3^{-i} \quad \text{y} \quad |T_i(f_i)| \geq \frac{2}{3}3^{-n} \|T_i\|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Si hacemos $T = T_{n+1}$, $f = f_n$ y $r = 3^{-(n+1)}$ en el lema 3.1, existe $f_{n+1} \in C([a, b])$ tal que $\|f_{n+1} - f_n\|_u \leq 3^{-(n+1)}$ y $|T_{n+1}(f_{n+1})| \geq \frac{2}{3}3^{-(n+1)} \|T_{n+1}\|$. De este modo, construimos una sucesión (f_n) que cumple (11) para toda $n \in \mathbb{N}$. Nótese que si $m > n$, entonces

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\|_u &\leq \|f_m - f_{m-1}\|_u + \|f_{m-1} - f_{m-2}\|_u + \dots + \|f_{n+1} - f_n\|_u \\ &\leq 3^{-m} + 3^{-(m-1)} + \dots + 3^{-(n+1)} \\ &= 3^{-(n+1)} (1 + 3^{-1} + \dots + 3^{-(m-n-1)}) \\ &< 3^{-(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} = \frac{3^{-n}}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Esto implica que (f_n) es una sucesión de Cauchy en $C([a, b])$, por lo tanto converge a un elemento $h \in C([a, b])$. Haciendo $m \rightarrow \infty$ en (12)

$$\|h - f_n\|_u \leq \frac{3^{-n}}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Además

$$\begin{aligned} |T_n(h)| &= |T_n(f_n) - (T_n(f_n) - T_n(h))| \\ &\geq |T_n(f_n)| - |T_n(f_n) - T_n(h)| \\ &\geq \frac{2}{3} 3^{-n} \|T_n\| - \|T_n\| \|f_n - h\|_u \\ &\geq \frac{2}{3} 3^{-n} \|T_n\| - \|T_n\| \frac{3^{-n}}{2} \\ &= \frac{1}{6} 3^{-n} \|T_n\| \geq \frac{1}{6} \left(\frac{4}{3}\right)^n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Lo que contradice que $\sup \{|T(f)| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$, para cada $f \in C([a, b])$. \square

Teorema 3.2. *Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Si la integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f(x) dg(x)$ existe para toda $f \in C([a, b])$, entonces g es de variación acotada.*

Demostración. Sea $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definamos la transformación lineal $T_\pi : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$T_\pi(f) = S(f, g, \pi) = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) (g(t_i) - g(t_{i-1})). \quad (13)$$

Nótese que

$$\begin{aligned} |T_\pi(f)| &\leq \sum_{i=1}^n |f(t_{i-1})| |g(t_i) - g(t_{i-1})| \\ &\leq \|f\|_u \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| = V(g, \pi) \|f\|_u. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|T_\pi\| \leq V(g, \pi)$, es decir, las transformaciones lineales T_π son acotadas. Por otra parte, podemos construir una función poligonal continua $h_\pi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h_\pi(t_{i-1}) = \begin{cases} 1, & \text{si } g(t_i) - g(t_{i-1}) \geq 0, \\ -1, & \text{si } g(t_i) - g(t_{i-1}) < 0, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$ y $\|h_\pi\|_u = 1$ (ver la figura 3).

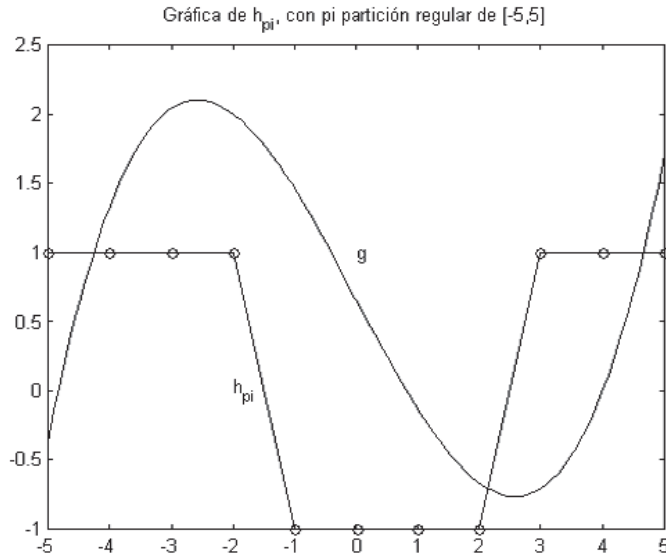


Figura 3: Función poligonal continua h_π .

Esto implica que $T_\pi(h_\pi) = V(g, \pi)$, por ende

$$\|T_\pi\| \geq V(g, \pi). \quad (14)$$

Consideremos la familia de aplicaciones lineales acotadas

$$\mathcal{F} = \{T_\pi : \pi \text{ partición de } [a, b]\},$$

definidas como en (13). Si $f \in C([a, b])$, entonces

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} T_\pi(f) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

Por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$|T_\pi(f)| \leq 1 + \left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \quad (15)$$

para cada partición π de $[a, b]$ con $\|\pi\| < \delta$.

Ahora consideremos el caso en que $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$ con $\|\pi\| \geq \delta$. Sea $\pi_r = \{r_0, r_1, \dots, r_k\}$ una partición de $[a, b]$ con $\|\pi_r\| < \delta$. Sea $I = \{i \in \{1, \dots, n\} : t_i - t_{i-1} \geq \delta\}$. Para cada $i \in I$ sea $\gamma_i = \{t_{i-1} = r_0^i < \dots < r_{n_i}^i = t_i\}$, donde $r_j^i \in \pi_r$ y $r_j^i \in (t_{i-1}, t_i)$, $j = 1, \dots, n_i - 1$. Consideramos la partición

$\pi' = \pi \cup (\cup_{i \in I} \gamma_i)$. Es decir, hacemos más fina la partición π metiendo puntos de la partición π_r en los subintervalos de norma mayor o igual a δ , por lo tanto $\|\pi'\| < \delta$. De la definición de I y π_r se sigue que I tiene a lo más k elementos, entonces

$$\begin{aligned} |T_\pi(f) - T_{\pi'}(f)| &= \left| \sum_{i \in I} f(t_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{n_i} f(r_j^i)(g(r_j^i) - g(r_{j-1}^i)) \right| \\ &\leq 2\|f\|_u \|g\|_u k + 2\|f\|_u \|g\|_u \sum_{i \in I} n_i \leq 4k\|f\|_u \|g\|_u. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (15) concluimos que

$$\begin{aligned} |T_\pi(f)| &\leq |T_\pi(f) - T_{\pi'}(f)| + |T_{\pi'}(f)| \\ &\leq 4k\|f\|_u \|g\|_u + 1 + \left| \int_a^b f(x) dg(x) \right|, \end{aligned} \quad (16)$$

cuando $\|\pi\| \geq \delta$. De (15) y (16) se sigue que

$$\sup \{|T_\pi(f)| : T_\pi \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

El principio de acotamiento uniforme (teorema 2) implica que $\sup\{|T_\pi| : T_\pi \in \mathcal{F}\} < \infty$. De (14) se sigue que g es de variación acotada en $[a, b]$. \square

4. No es posible una integral tipo L-S o R-S con respecto al movimiento browniano

Hemos asumido en la sección 1 que existe un proceso estocástico ξ real-valorado que cumple las condiciones (a)-(c). Sin embargo, como veremos en seguida, no existe un proceso estocástico $\xi \neq 0$, con trayectorias medibles que cumpla (a), (c) y con segundo momento finito, es decir $\mathbb{E}[\xi_t^2] < \infty$.

Teorema 4.1. *Sea $\xi = \{\xi_t, t \geq 0\}$ un proceso estocástico, definido en (Ω, \mathcal{F}, P) , tal que $(t, \omega) \mapsto \xi_t(\omega)$ es medible con respecto a $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}$, $\mathbb{E}[\xi_t] = 0$, $\forall t \geq 0$, $t \mapsto \mathbb{E}[\xi_t^2]$ es continua y de variables aleatorias mutuamente independientes, entonces $\xi_t = 0$ casi seguramente para cada $t \geq 0$.*

Demostración. Sea $T > 0$. Usando el teorema de Tonelli (ver [1, p. 118]) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_0^T |\xi_t \xi_s| dt ds \right) &= \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[|\xi_t| |\xi_s|] dt ds \\ &= \left(\int_0^T \mathbb{E}[|\xi_t|] dt \right)^2 \\ &\leq T \int_0^T (\mathbb{E}[|\xi_t|])^2 dt \\ &\leq T \int_0^T \mathbb{E}[\xi_t^2] dt < \infty. \end{aligned}$$

Sea $I \subset [0, T]$ un intervalo. Del teorema de Fubini (ver [1, p. 119]) deducimos que

$$\mathbb{E} \left(\int_I \xi_t dt \right)^2 = \mathbb{E} \left(\int_I \int_I \xi_t \xi_s dt ds \right) = \int_{I \times I} \mathbb{E}[\xi_t \xi_s] dt ds = 0.$$

Esto implica que existe $N_I \in \mathcal{F}$ tal que $P(N_I) = 0$ y

$$\int_I \xi_t(\omega) dt = 0, \quad \forall \omega \in N_I^c.$$

Sea \mathcal{C} la colección de todos los intervalos $I \subset [0, T]$ con extremos racionales, entonces

$$N = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} N_I \in \mathcal{F}$$

y además $P(N) = 0$. Por otra parte, sea $J \subset [0, T]$ un intervalo, entonces existe una sucesión monótona decreciente $(I_n) \subset \mathcal{C}$ tal que $J = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Para cada $\omega \in N^c = \bigcap_{I \in \mathcal{C}} N_I^c$,

$$\int_J \xi_t(\omega) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_n} \xi_t(\omega) dt = 0.$$

(Nótese que para cada ω , $A \mapsto \int_A \xi_t(\omega) dt$ es una medida con signo.) Por lo tanto, usando el lema de las clases monótonas de Halmos (ver [13, p. 33]), resulta que para cada $\omega \in N^c$,

$$\int_A \xi_t(\omega) dt = 0, \quad \forall A \in \mathcal{B}([0, T]).$$

Lo que implica que si $\omega \in N^c$, entonces $\xi_t(\omega) = 0$, para casi toda $0 \leq t \leq T$. Del teorema de Fubini deducimos que

$$\int_0^T \mathbb{E}[\xi_t^2] dt = \mathbb{E} \left(\int_0^T \xi_t^2 dt \right) = 0.$$

La continuidad de la aplicación $t \mapsto \mathbb{E}[\xi_t^2]$ implica que

$$\mathbb{E}[\xi_t^2] = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Es decir, $\xi_t = 0$ casi seguramente, para cada $0 \leq t \leq T$. \square

Más aún, en [5, p. 10] se demuestra que no existe un proceso estocástico ξ (real-valuado) que cumpla (b) y (c) con trayectorias continuas. No obstante, para estudiar EDE nos interesa (ver (5)) el proceso estocástico integrado

$$W(t) = \int_0^t \xi(s) ds.$$

Si esta integral tuviera sentido, entonces W debería cumplir:

- (i) $W(0) = 0$, casi seguramente.
- (ii) Casi seguramente todas las trayectorias $t \mapsto W(t)$ son continuas.
- (iii) Para $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ las variables aleatorias $W(t_0)$, $W(t_1) - W(t_0)$, \dots , $W(t_n) - W(t_{n-1})$ son independientes.
- (iv) Para cualesquiera $t \geq 0$, $t_1, t_2 \geq 0$, los incrementos $W(t_2 + t) - W(t_1 + t)$ y $W(t_2) - W(t_1)$ tienen la misma distribución.
- (v) $\mathbb{E}[W_t] = 0$, para cada $t \geq 0$.

Se tiene que, ver por ejemplo [6, §1.1], existe un único proceso estocástico real-valuado con trayectorias continuas, homogéneo en el tiempo y con incrementos independientes. Este proceso es el movimiento browniano, W . Más precisamente, existe un proceso estocástico $W = \{W_t, t \geq 0\}$ definido en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) tal que (i)-(iii) se cumplen y para cualesquiera $s, t \geq 0$, y $z \in \mathbb{R}$

$$P\{W_{s+t} - W_s \leq z\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx.$$

Es decir, W tiene incrementos estacionarios con distribución gaussiana.

Las trayectorias del movimiento browniano, aunque continuas, son bastante irregulares. Por ejemplo, la longitud de la curva trazada por ellas es infinita, es decir, de variación no acotada. Para ver esto iniciemos con el siguiente resultado.

Lema 4.1. *Sea W un movimiento browniano y π una partición de $[a, b]$, entonces*

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\sum_{\pi} |\Delta W|^2 - (b - a) \right)^2 = 0,$$

donde los incrementos ΔW se definen como en (9).

Demostración. Sea $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} Y_n^2 &= \left(\sum_{i=1}^n |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|^2 - (b - a) \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \left\{ |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|^2 - (t_i - t_{i-1}) \right\} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{i < j} X_i X_j, \end{aligned}$$

donde $X_i = |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|^2 - (t_i - t_{i-1})$. Usando la independencia y gaussianidad de los incrementos del movimiento browniano,

$$\mathbb{E}(X_i^2) = 2(t_i - t_{i-1})^2, \quad \mathbb{E}(X_i X_j) = 0, \quad i \neq j,$$

así

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n^2) &= 2 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \\ &\leq 2 \|\pi\| \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= 2(b - a) \|\pi\|. \end{aligned}$$

De lo cual se sigue el resultado cuando $\|\pi\| \rightarrow 0$. □

Teorema 4.2. *Las trayectorias del movimiento browniano son de variación no acotada en intervalos finitos casi seguramente.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Es decir, existe un conjunto $\Omega_0 \subset \Omega$ de probabilidad positiva tal que para cada $\omega \in \Omega_0$,

$$V_{[a,b]}(W(\omega)) = \sup_{\pi} \sum_{\pi} |\Delta W(\omega)| < \infty.$$

Por lo tanto, si $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |W_{t_i}(\omega) - W_{t_{i-1}}(\omega)|^2 &\leq \sum_{i=1}^n \left(\max_{1 \leq j \leq n} |W_{t_j}(\omega) - W_{t_{j-1}}(\omega)| \right) \\ &\quad \times |W_{t_i}(\omega) - W_{t_{i-1}}(\omega)| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} |W_{t_j}(\omega) - W_{t_{j-1}}(\omega)| \right) \\ &\quad V_{[a,b]}(W(\omega)). \end{aligned}$$

Es decir

$$\sum_{\pi} |\Delta W(\omega)|^2 \leq \max_{\pi} |\Delta W(\omega)| V_{[a,b]}(W(\omega)).$$

Sea $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : t \mapsto W_t(\omega) \text{ es continua}\}$, $P(\Omega_1) = 1$. Sea $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$ y $\varepsilon > 0$. La continuidad uniforme de $t \mapsto W_t(\omega)$ en $[a, b]$, implica que existe $\delta > 0$ tal que

$$s, t \in [a, b], \quad |t - s| < \delta \Rightarrow |W_t(\omega) - W_s(\omega)| < \frac{\varepsilon}{1 + V_{[a,b]}(W(\omega))}.$$

Sea π una partición de $[a, b]$ tal que $\|\pi\| < \delta$, entonces

$$\max_{\pi} |\Delta W(\omega)| < \frac{\varepsilon}{1 + V_{[a,b]}(W(\omega))}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{\pi} |\Delta W(\omega)|^2 < \varepsilon, \quad \text{si } \|\pi\| < \delta,$$

es decir

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{\pi} |\Delta W|^2 1_{\Omega_0} = 0, \quad \text{casi seguramente.}$$

Puesto que convergencia casi seguramente implica convergencia en probabilidad (ver [1] o [13]) resulta que

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{\pi} |\Delta W|^2 1_{\Omega_0} = 0, \quad \text{en probabilidad.}$$

Por otra parte, ya que convergencia en medida cuadrática implica convergencia en probabilidad (ver [1] o [13]) del lema 4.1 nos queda

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{\pi} |\Delta W|^2 1_{\Omega_0} = (b - a) 1_{\Omega_0}, \quad \text{en probabilidad.}$$

La unicidad del límite en probabilidad (ver [13, p. 141]) nos conduce a una contradicción. \square

Así, el resultado precedente y los teoremas 2.1 y 3.2 indican que no es posible definir una integral del tipo Lebesgue-Stieltjes o Riemann-Stieltjes cuando el integrador es una trayectoria del movimiento browniano, W . En particular, usando las integrales presentadas en esta nota no podemos calcular integrales como

$$\int_a^b W_t dW_t.$$

5. Comentarios finales

En la demostración del teorema 2.1 hemos usado que la carga λ_g es finita, esto significa que su variación total es finita. En [3] se discuten otros conceptos sobre cargas que involucran el de variación total. El teorema 3.1 se llama teorema de Banach-Steinhaus y se cumple en un contexto más general que el espacio de funciones $C([a, b])$. La demostración que damos aquí sigue las líneas de [10], anexando algunos detalles que consideramos pertinentes. Según P. Protter la idea de usar el teorema de Banach-Steinhaus es debida a P. Meyer, nosotros hemos adaptado la demostración que viene en [8], salvo algunas modificaciones sobre la manera de tomar las particiones en (13). Los resultados de la sección 4 son clásicos en probabilidad, al lector interesado le recomendamos [5], [6] y [12].

Una técnica exitosa para calcular integrales con respecto al movimiento browniano se debe a K. Itô (1915–2008), en [7] se puede ver en qué consiste esta y en particular se muestra que

$$\int_a^b W_t dW_t = \frac{1}{2} (W_b^2 - W_a^2) - \frac{1}{2} (b - a).$$

Nótese que hay un término extra, del que uno esperaría con respecto a una integral tipo Riemann, $-\frac{1}{2}(b - a)$, esto está relacionado estrechamente con el resultado del lema 4.1. Cabe mencionar que el concepto de integral estocástica es bastante general, en [8] (ver también [2]) se integra con respecto a semimartingalas, el movimiento browniano es una semimartingala.

Agradecimientos: Agradecemos a los árbitros sus valiosos comentarios. La escritura de este artículo fue apoyada por los proyectos 103.5/11/3908 UGTO-PTC-263 de PROMEP-México, 118294 del CONACyT y PIM13-3N de la Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Bibliografía

1. R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, 1995.
2. T. Bojdecki, *Teoría General de Procesos e Integración Estocástica*, Textos 6, Aportaciones Matemáticas SMM, 2004.
3. G. B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and their Applications*, 2.^a ed., Wiley, 1999.
4. T. Hida, *Brownian Motion*, Springer, 1980.
5. G. Kallianpur, *Stochastic Filtering Theory*, Springer, 1980.
6. F. B. Knight, *Essentials of Brownian motion and Diffusion*, Mathematical Surveys, tomo 8, AMS, 1981.
7. H. H. Kuo, *Introduction to Stochastic Integration*, Springer, 2006.
8. P. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2.^a ed., Springer, 2004.
9. H. L. Royden, *Real Analysis*, 3.^a ed., Prentice-Hall, 1988.
10. A. D. Sokal, «A really simple elementary proof of the uniform boundedness theorem», *The American Mathematical Monthly*, vol. 118 (5), 2011, 450–452.
11. M. R. Spiegel, *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*, Prentice-Hall, 1983.
12. C. Tudor, *Procesos Estocásticos*, Textos 2, Aportaciones Matemáticas SMM, 2002.
13. J. Villa, *Introducción a la medida e integración*, Universidad Autónoma de Aguascalientes, 2005.
14. ———, «Un ejemplo de explosión en ecuaciones diferenciales estocásticas con ruido aditivo», *Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones*, vol. 44, 2011, 187–194.