

Difusión anómala: fundamentos y aplicaciones

Damián Hernández Herrán
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Maestría en Ciencias de la Complejidad
damianuacm@gmail.com

1. Introducción

La difusión es un fenómeno común en la naturaleza, y es fundamentalmente, un mecanismo que transporta materia o alguna otra cantidad física de un lugar a otro en un espacio determinado. Las características de dicho mecanismo dependen tanto de las propiedades físicas del medio, *e.g.* la temperatura y la estructura geométrica del espacio dentro del cuál se lleva a cabo este fenómeno, como de la interacción entre la sustancia que se difunde y la sustancia en la cual ocurre la difusión, *e.g.* la difusión de una gota de tinta en agua o la difusión de moléculas en el interior de células vivas [37].

El proceso que da origen a la difusión es un proceso estocástico o aleatorio, lo cual se aprecia de forma clara en el ejemplo paradigmático de este fenómeno, el movimiento Browniano. Dicho movimiento consiste en el desplazamiento irregular e impredecible de pequeñas partículas suspendidas en la superficie de un fluido, y fue explicado en 1905 por Albert Einstein en un importante artículo titulado: *On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat*. En este trabajo, Einstein utilizó la hipótesis atómica de la materia y la herramienta de las caminatas aleatorias [29], para encontrar la relación que existe entre dicho fenómeno y la ecuación de difusión. Entre los principales resultados del artículo, se encuentra que el desplazamiento cuadrado promedio recorrido por una partícula suspendida en la superficie de un fluido, crece de forma lineal en el tiempo, es decir: $\langle r^2(t) \rangle \propto t$, donde $r(t)$ denota al desplazamiento de la partícula al tiempo t , y donde los corchetes significan el promedio de la cantidad que éstos encierran. Este resultado es una de las principales características de la difusión normal, y es fundamentalmente, una consecuencia del *teorema del límite central*. *Grosso modo*,

dicho teorema establece que la distribución de probabilidad que define a una suma de variables aleatorias independientes (en este caso los desplazamientos de las partículas), igualmente distribuidas y con segundo momento finito, se aproxima a una distribución Gaussiana cuando el número de variables aleatorias que se suman es muy grande.

Entre los muchos ejemplos de fenómenos naturales cuya dinámica está descrita a través de procesos difusivos normales, se pueden mencionar: la propagación de calor en medios homogéneos [21], el movimiento de fluidos incompresibles en medios porosos homogéneos [2], reacciones químicas en solución [20] y el movimiento de impurezas y partículas cargadas en sólidos cristalinos [22].

Por otro lado, desde la segunda década del siglo XX se han encontrado muchos sistemas tanto físicos como biológicos, donde el desplazamiento cuadrado promedio recorrido por la sustancia que se difunde crece con el tiempo de la siguiente forma: $\langle r^2(t) \rangle \propto t^\gamma$, donde el valor del exponente divide de manera natural a los procesos difusivos en dos regímenes distintos: *superdifusión* para $\gamma > 1$ y *subdifusión* para $\gamma < 1$, ambos, casos particulares de lo que la comunidad científica nombró como *difusión anómala*.

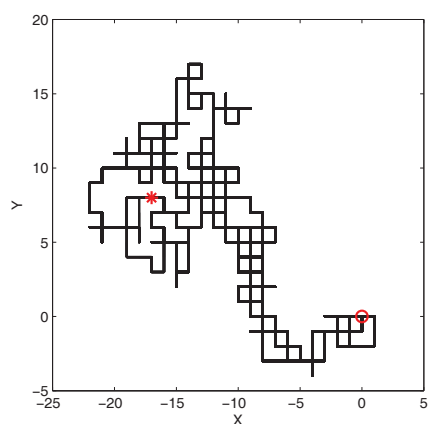
En contraste con el significado literal de su nombre, la difusión anómala es un fenómeno bastante común en la naturaleza, y al igual que la difusión normal, su estudio y aplicaciones rebasan el ámbito de la física. Como herramienta para la descripción y modelación de diversos sistemas complejos, la difusión anómala ha sido útil en el estudio de la estructura interna de células vivas [36], la caracterización de la manera en la que distintas especies de animales encuentran alimento [34], y en la descripción del movimiento del agua o petróleo en reservorios o yacimientos altamente desordenados [17].

En este artículo discutiremos una de las principales causas de la difusión anómala, su modelación a través de *caminantes aleatorios en tiempo continuo*, y a través de la *ecuación de difusión fraccionaria*.

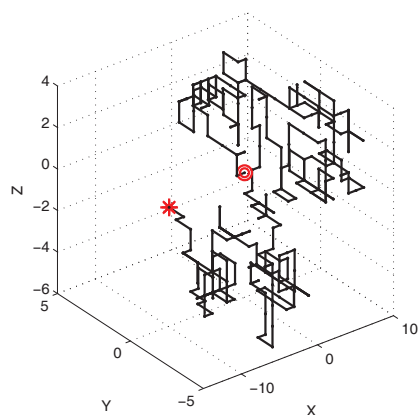
2. Teoría básica: difusión normal

Una de las maneras más comunes de estudiar y modelar un proceso difusivo es a través de caminatas aleatorias. Un caminante aleatorio se puede pensar como una partícula puntual que realiza una serie de desplazamientos aleatorios en un espacio y en un tiempo determinados. De manera más formal, una caminata aleatoria es un proceso estocástico definido (generalmente) sobre los puntos de una malla d -dimensional. Normalmente, la variable que toma el papel del tiempo se considera como una variable discreta y para cada unidad de tiempo τ , el caminante

cambia su posición actual por otra posición cualquiera en la malla de acuerdo a una densidad de probabilidad $\lambda(x)$, ver fig.(1). Dicha densidad, nombrada como la distribución de saltos del caminante, define la probabilidad de que el caminante haga un salto descrito por el vector x , es decir, la probabilidad de que el caminante haga un salto con una magnitud $\|x\|$ en la dirección $\frac{x}{\|x\|}$.



(a)



(b)

Figura 1. Trayectorias de un caminante aleatorio en 2 y 3 dimensiones después 450 y 350 saltos respectivamente. En ambas caminatas, los saltos ocurren solamente entre los puntos adyacentes de una maya cúbica con probabilidad $\lambda(x) = \frac{1}{2d}$, con d la dimensión del espacio. El círculo corresponde a la posición inicial del caminante, mientras que asterisco a la posición final.

Si el caminante se encuentra en el origen al tiempo $t = 0$, la posición que este ocupa después de N saltos, está dada por

$$X_N = \sum_{i=1}^N x_i, \quad (1)$$

donde el tiempo y el número de saltos se relacionan a través de $N = t/\tau$, y donde x_i , corresponde a la variable aleatoria asociada al i -ésimo salto. Nótese que al ser X_N una suma de variables aleatorias, esta también es una variable aleatoria, por lo que el *problema fundamental de la teoría de los caminantes aleatorios, consiste en encontrar la densidad de probabilidad de la variable X_N* . Esta importante probabilidad, de ahora en adelante denotada como $P(t, r)$, nos dice la probabilidad de encontrar al caminante en la posición r al tiempo t , y para encontrarla, se debe plantear una ecuación que describa su evolución espacio-temporal para posteriormente resolverla.

Ahora bien, nótese que de la Ec.(1) y del hecho que conocemos la distribución de saltos del caminante, podemos obtener ya información sobre el comportamiento promedio de este peculiar movimiento. Debido a que los saltos están dados por la misma distribución (variables aleatorias idénticamente distribuidas) y son independientes entre sí, podemos calcular la posición promedio y el desplazamiento cuadrado promedio que recorre el caminante después de N saltos

$$\begin{aligned} \langle X_N \rangle &= N \langle x \rangle, \\ \langle \|X_N\|^2 \rangle &= N \langle \|x\|^2 \rangle + N(N-1) \langle \|x \rangle \|^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Si además suponemos que la caminata es isótropa, es decir, que la distribución de saltos solo depende de la magnitud del salto y no de la dirección, es fácil demostrar que $\langle x \rangle = 0$, y que la Ec.(2) toma la siguiente forma después de escribir el número de saltos como función del tiempo

$$\langle X(t) \rangle = 0, \quad \langle \|X(t)\|^2 \rangle = 2dDt. \quad (3)$$

La constante D se conoce como el coeficiente de difusión, y está dada por $D = \langle \|x\|^2 \rangle / 2d\tau$, donde d es la dimensión del espacio donde se lleva a cabo la caminata. Es importante notar que para la deducción de la Ec.(3), no se utilizó la forma explícita de la distribución de saltos, pero se asumió de manera implícita la existencia del segundo momento de esta. Además, nótese que la segunda expresión de la Ec.(3) corresponde a una de las características principales de lo que en la introducción denominamos como difusión normal.

Para obtener más información acerca del movimiento de un caminante aleatorio con las características arriba mencionadas, y de su relación con la ecuación de difusión, supongamos que la caminata se da en una

mallas cúbicas d -dimensionales, y que los saltos se dan solamente entre puntos adyacentes de la mallas con una probabilidad $\lambda(x) = \frac{1}{2d}$, donde d es la dimensión de la mallas (ver fig.(1)). La probabilidad de encontrar al caminante en r al tiempo $t = N\tau$, está dada por [22]

$$P(t, r) = \sum_{j=1}^d \frac{P(t - \tau, r - a\hat{e}_j)}{2d} + \sum_{j=1}^d \frac{P(t - \tau, r + a\hat{e}_j)}{2d}, \quad (4)$$

donde \hat{e}_j son los vectores unitarios que definen la mallas y a es la distancia entre dos puntos vecinos. Restando $P(t - \tau, r)$ de ambos lados de la Ec.(4), multiplicando y dividiendo el lado derecho por a^2 y acomodando términos tenemos

$$\begin{aligned} & P(t, r) - P(t - \tau, r) \\ &= \frac{a^2}{2d} \sum_{j=1}^d \left(\frac{P(t - \tau, r - a\hat{e}_j) - 2P(t - \tau, r) + P(t - \tau, r + a\hat{e}_j)}{a^2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

La expresión que está entre paréntesis en el lado derecho de la Ec.(5), corresponde a la discretización de la segunda derivada en la dirección del j -ésimo eje coordenado de nuestra mallas. Entonces, si dividimos ambos lados de la ecuación por τ y tomamos el límite cuando $\tau \rightarrow 0$ y $a \rightarrow 0$, de tal manera que $0 < \lim_{\tau, a \rightarrow 0} \frac{a^2}{\tau} < \infty$ y que $\lim_{\tau \rightarrow 0} N\tau = t$, la Ec.(5) tiende a la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial P(t, r)}{\partial t} = D \nabla^2 P(t, r), \quad D = \lim_{\tau, a \rightarrow 0} \left(\frac{a^2}{2\tau d} \right), \quad (6)$$

donde el operador espacial, o Laplaciano, está dado por $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$, con x_i las coordenadas del vector r de la Ec.(6) (no confundir estas con los saltos de la ecuación Ec.(1)).

La Ec.(6) es justamente la ecuación de difusión, y la constante D corresponde al coeficiente de difusión. De esta manera vemos que, en el límite continuo, la densidad de probabilidad de encontrar al caminante en el punto r del espacio al tiempo t , evoluciona de acuerdo con esta ecuación.

Nótese que el coeficiente de difusión de la Ec.(6) no es exactamente el mismo que el de la Ec.(3), sobre todo debido a la existencia de los límites, los cuales además oscurecen su interpretación física. Para evitar esto, y para ir introduciendo herramientas que necesitaremos más adelante, se puede plantear una expresión que generaliza la Ec.(4) para el caso de una caminata que no está restringida a una mallas, y donde el tiempo es una variable continua en lugar de discreta. Este tipo de caminatas se conocen como *caminatas aleatorias en tiempo continuo* o

CATC, y para su descripción, es necesario introducir una nueva densidad de probabilidad a través de la cual sepamos la probabilidad de que el caminante dé un salto al tiempo t . Dicha densidad, denotada de ahora en adelante como $\psi(t)$, se llama distribución de tiempos de espera, y la variable aleatoria obtenida a través de esta corresponde al tiempo que transcurre entre dos saltos consecutivos, *i.e.* el tiempo que el caminante pasa en una posición determinada del espacio, ver fig.(2). En este caso, la ecuación que obedece la densidad de probabilidad $P(t, r)$ se conoce como la ecuación de Montroll-Weiss [30], la cual toma la siguiente forma para una caminata aleatoria unidimensional

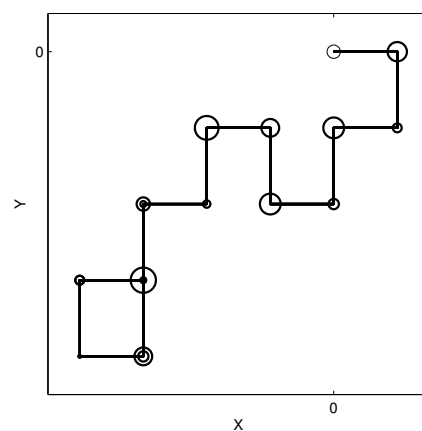
$$P(t, x) = \delta(x) \int_t^\infty \psi(t') dt' + \int_0^t \psi(t-t') \left[\int_{-\infty}^\infty \lambda(x-x) P(t', x') dx \right] dt', \quad (7)$$

donde los saltos y los tiempos de espera, se consideran como variables aleatorias independientes, y donde en lugar del vector r , utilizamos la coordenada x para la posición del caminante. La razón de restringir el problema al caso unidimensional es para simplificar los cálculos que siguen, aunque la metodología que se presentará a continuación se aplica de la misma forma al caso d -dimensional.

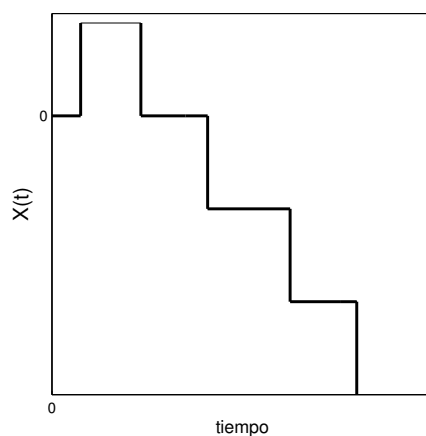
Ahora bien, el primer término de la parte derecha de la Ec.(7) corresponde a la probabilidad de que el caminante no se haya movido de su posición inicial, en este caso el origen, durante el intervalo de tiempo $[0, t]$. El segundo término corresponde a la probabilidad de que el caminante llegue al punto x al tiempo t , dado que se encontraba en x' al tiempo t' con $t' < t$.

La ecuación Ec.(7) consiste esencialmente de convoluciones entre las diferentes densidades de probabilidad que definen el problema, por lo que la forma más natural de resolverla es a través de las transformadas de Fourier y Laplace. Así, al aplicar dichas transformadas a la ecuación de Montroll-Weiss tenemos

$$\hat{\hat{P}}(s, k) = \frac{1 - \tilde{\psi}(s)}{s} \frac{1}{1 - \tilde{\psi}(s) \hat{\lambda}(k)}, \quad (8)$$



(a)



(b)

Figura 2. a) Esquemización de los primeros pasos de una CATC que comienza en el origen. El radio de los círculos alrededor de cada punto de la trayectoria del caminante es proporcional al tiempo que este pasa en ellos. Los puntos donde hay más de un círculo indican que el caminante paso por allí más de una vez, tardando distintos intervalos de tiempo antes de realizar un salto hacia otra posición. b) Proyección en el eje X de los primeros pasos de la caminata esquematizada en la figura (a). Nótese que debido a la naturaleza aleatoria de los tiempos de espera, el tamaño de la parte horizontal de los escalones es distinto para cada escalón. Nótese también que la transición entre dos posiciones consecutivas del caminante es instantánea.

donde

$$\hat{\lambda}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \lambda(x) dx, \quad \tilde{\psi}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \psi(t) dt. \quad (9)$$

Obsérvese que al calcular las transformadas inversas de Fourier y Laplace de la expresión mostrada en la Ec.(8), obtenemos la forma explícita de $P(t, x)$, lo cual resuelve el problema de la **CATC** generada por las densidades de probabilidad $\lambda(x)$ y $\psi(t)$. Por otro lado, el cálculo explícito de dichas transformadas inversas se puede obtener solamente para casos muy específicos de las distribuciones de saltos y de tiempos de espera, por lo que en la práctica, se suele trabajar en lo que usualmente se conoce como límite difusivo, el cual equivale a la región del espacio de Fourier-Laplace donde $k, s \ll 1$. Como veremos a continuación, en el espacio (x, t) , el límite difusivo corresponde a escalas espacio-temporales mucho mayores a las que caracterizan la caminata, y por la tanto al límite cuando el número de saltos realizados por el caminante es $N \gg 1$.

Recordemos que para la deducción de la Ec.(6), se tomó el límite cuando el tamaño de los saltos y el tiempo transcurido entre éstos tendían a cero. Esto indica que la ecuación de difusión es una ecuación macroscópica, ya que describe la evolución de $P(t, x)$ a escalas tanto temporales como espaciales mucho mayores a las asociadas con los saltos del caminante. En el caso de **CATC**, las escalas espacio-temporales características de la caminata son el tiempo promedio que transcurre entre saltos consecutivos, y la magnitud promedio de éstos. Las cantidades que cuantifican dichas escalas son el segundo momento de la distribución de saltos ($\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \lambda(x) dx$) y el primer momento de la distribución de tiempos de espera ($\langle \tau \rangle = \int_0^{\infty} \tau \psi(\tau) d\tau$). Entonces, el límite difusivo de la Ec.(7) corresponde a $|x| \gg \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ y $t \gg \langle \tau \rangle$, lo cual implica que en el espacio de Fourier-Laplace $|k| \ll \frac{1}{\sqrt{\langle x^2 \rangle}}$ y $s \ll \frac{1}{\langle \tau \rangle}$. Estas desigualdades permiten aproximar $\hat{\psi}(s)$ y $\tilde{\lambda}(k)$ como

$$\hat{\psi}(s) \approx 1 + \left. \frac{d\hat{\psi}}{ds} \right|_{s=0} s = 1 - \langle \tau \rangle s, \quad \tilde{\lambda}(k) \approx 1 + \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 \tilde{\lambda}}{dk^2} \right|_{k=0} k^2 = 1 - \frac{\langle x^2 \rangle}{2}, \quad (10)$$

donde las expresiones mostradas en la ecuación anterior asumen de forma implícita que la caminata es isótropa, *i.e.* $\langle x \rangle = 0$, y corresponden a expansiones en series de Taylor alrededor de cero.

Ahora bien, si sustituimos la Ec.(10) en la Ec.(8) y reacomodamos términos obtenemos la siguiente expresión

$$s \hat{P}(s, k) - 1 = -Dk^2 \hat{P}(s, k). \quad (11)$$

En el espacio (x, t) , la Ec.(11) equivale al problema de valores iniciales definido por la Ec.(6) para $d = 1$ con condición inicial $P(0, x) = \delta(x)$, donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac, y donde el coeficiente de difusión

está dado por $D = \frac{\langle x^2 \rangle}{2\langle \tau \rangle}$. Como era de esperarse, la solución de dicho problema de condiciones iniciales está dada por la densidad de probabilidad Gaussiana

$$P(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \quad (12)$$

ya que las suposiciones que se hicieron para obtener la Ec.(11), corresponden a las condiciones suficientes para que el teorema del límite central sea válido, y por lo tanto, la probabilidad de encontrar al caminante al tiempo t en un punto x debe de estar dada por la Ec.(12). Obsérvese que tras sustituir la Ec.(10) en la Ec.(8), es posible calcular las transformadas inversas de Fourier y Laplace para la expresión resultante, lo cual da como resultado la Ec.(12).

Finalmente, nótese que entre más grande es el tiempo promedio entre saltos consecutivos, más pequeño es el coeficiente de difusión, lo cual resulta en un proceso difusivo más lento. Por otro lado, entre más grande es el segundo momento de la distribución de saltos, el coeficiente de difusión es más grande y en consecuencia la difusión es más rápida. En la próxima sección veremos que cuando alguna de estas cantidades diverge, aparecen los fenómenos conocidos como *subdifusión* y *superdifusión*. Evidentemente, procesos difusivos con estas características ya no pueden ser descritos por la Ec.(6), entonces ¿habrá alguna ecuación que generalice a la ecuación de difusión y que sea capaz de describirlos?

3. Difusión anómala y ecuación de difusión generalizada

La respuesta a la pregunta formulada al final de la sección anterior es: Si la hay. De hecho, partiendo de distintas hipótesis, la comunidad científica ha propuesto varias ecuaciones que generalizan la ecuación de difusión [31, 24]. En esta sección nos concentramos en una de las formulaciones más exitosas, tanto por sus aplicaciones como por su justificación microscópica en términos de **CATC**. Dicha ecuación es una generalización de la Ec.(6) conocida como la *ecuación de difusión fraccionaria*.

La difusión anómala aparece en sistemas desordenados o en sistemas que se encuentran lejos del equilibrio termodinámico [6], donde las heterogeneidades del sistema, inducen un comportamiento anómalo en el desplazamiento cuadrado promedio de una partícula que se difunde en ese medio, y el cual generalmente toma la siguiente forma

$$\langle X^2(t) \rangle \propto t^\gamma, \quad \gamma \neq 1. \quad (13)$$

Los casos en los que $\gamma < 1$ se conocen como *subdifusión*, mientras que para $\gamma > 1$ tenemos *superdifusión*.

De acuerdo con lo dicho en la sección anterior, la Ec.(13) implica que alguna de las condiciones necesarias para que el teorema del límite central sea válido no se cumple. Esto último puede suceder esencialmente de dos formas distintas:

1. Cuando las distribuciones de probabilidad que definen la caminata aleatoria, *i.e.* las distribuciones de saltos y de tiempos de espera, son distribuciones libres de escala, también conocidas como distribuciones con colas anchas.
2. Cuando existen correlaciones de largo alcance entre los saltos del caminante.

En lo que resta del artículo, nos limitaremos a discutir el caso correspondiente a las distribuciones libres de escala.

Cuando las distribuciones que definen la caminata aleatoria decaen como una ley de potencias, *i.e.* $\lambda(x) \sim |x|^{-(1+\alpha)}$, $\psi(t) \sim t^{-(1+\beta)}$ para $|x| \gg x_0$ y $t \gg t_0$, con x_0 y t_0 escalas de espacio y tiempo asociadas al problema que se está tratando, estas se consideren como libres de escala si los exponentes de ambas cumplen con las siguientes desigualdades: $1 < \alpha < 2$ y $0 < \beta < 1$, ya que estas garantizan que el segundo momento de la distribución de saltos y el primer momento de la distribución de tiempos de espera tomen valores infinitos.

En el caso de la distribución de saltos, la divergencia del segundo momento implica que los saltos de la caminata carecen de un tamaño característico, y por lo tanto, la magnitud de éstos puede tomar valores de cualquier tamaño con una probabilidad no despreciable. De la misma manera, la divergencia de $\langle \tau \rangle$ implica que el tiempo transcurrido entre dos saltos consecutivos, puede tomar valores muy grandes con probabilidad no despreciable. Nótese que, al contrario de lo que sucede en difusión normal, en los casos que acabamos de describir la separación entre escalas microscópicas y macroscópicas no existe. En este contexto, el comportamiento anómalo mostrado en la Ec.(13) se puede entender de la siguiente forma:

Supongamos una **CATC** unidimensional e isótropa, donde solamente la distribución de saltos es libre de escala, y los saltos son variables aleatorias independientes. En este tipo de caminatas, también llamadas *vuelos de Lévy* [7], el tiempo que tarda el caminante en dar N saltos se comporta como $t \sim N \langle \tau \rangle$, donde $\langle \tau \rangle$ es el tiempo promedio entre saltos consecutivos. Por otro lado, la posición que este ocupa después de N saltos está determinada por la suma de los desplazamientos del caminante (ver Ec.(1)). Ahora bien, de acuerdo con nuestras hipótesis y con la Ec.(2), el desplazamiento cuadrado promedio del caminante es formalmente infinito. Para evitar esta divergencia, cosa que nunca

veríamos en un experimento real, necesitamos truncar la distribución de saltos de alguna forma. Para esto, consideremos la probabilidad de que el salto de longitud más grande encontrado en N saltos sea x_c , donde x_c es un número por determinar, y donde dicha probabilidad está dada por: $N\lambda(x_c) \left(\int_0^{x_c} \lambda(x)dx\right)^{N-1}$. En el límite $N \gg 1$, el máximo de esta expresión ocurre cuando x_c es del orden de $x_c \sim N^{1/\alpha}$, con α el exponente de la distribución de saltos. Mediante este resultado y la Ec.(2), es posible estimar el crecimiento del desplazamiento cuadrado promedio en función del número de saltos

$$\langle X_N \rangle^2 \sim N \int_0^{x_c} x^2 \lambda(x) dx \sim N^{2/\alpha}, \quad (14)$$

donde al calcular la integral, se tomó en cuenta solamente la contribución de las colas de la distribución, es decir, la contribución asociada al decaimiento descrito por la ley de potencias. Finalmente, escribiendo el número de saltos en términos del tiempo se obtiene una expresión como la mostrada en la Ec.(13), donde $\gamma = 2/\alpha > 1$, y de la cual se concluye que los vuelos de Lévy son un proceso superdifusivo.

En las últimas décadas, la teoría desarrollada alrededor de los vuelos de Lévy ha sido muy útil para entender y describir diversos fenómenos observados en la naturaleza, tales como la manera en la que distintas especies de animales buscan alimento [13], la absorción de polímeros en superficies [5], y fenómenos de transporte en plasmas confinados [11] y física de fluidos [35].

Supongamos ahora que solamente la distribución de tiempos de espera es libre de escala. Entonces, de acuerdo con la Ec.(2), para poder dar una estimación del desplazamiento cuadrado promedio recorrido por caminante al tiempo t , necesitamos encontrar la dependencia del tiempo en función del número de saltos. Para esto, nótese que en una **CATC**, el tiempo que tarda un caminante en dar N saltos está dado por la siguiente suma

$$t = \sum_{i=1}^N \tau_i, \quad (15)$$

donde τ_i , es el tiempo que transcurre entre los saltos con índices $i - 1$ e i , y por lo tanto es la variable aleatoria obtenida de la distribución de tiempos de espera.

Formalmente, el tiempo promedio que tarda el caminante en dar N saltos diverge, ya que $\langle \tau_i \rangle = \infty$. Para evitar esta divergencia, debemos truncar la distribución de tiempos de espera de la misma forma que lo hicimos para los vuelos de Lévy, donde en lugar de x_c tenemos que $t_c \sim N^{1/\beta}$, con β el exponente de la distribución de tiempos de espera.

Esto último permite escribir

$$\langle t \rangle \sim N \int_0^{t_c} \psi(\tau) \tau d\tau \sim N^{1/\beta}, \quad (16)$$

donde al calcular la integral, se tomó en cuenta solamente la contribución de la cola de la distribución. Nótese que la Ec.(16) implica que el tiempo promedio que tarda el caminante en dar N saltos, está dominado por el tiempo de espera más grande de la suma mostrada en la Ec.(15), lo cual permite hacer la siguiente estimación: $t \sim \langle t \rangle \sim N^{1/\beta}$. De esta manera vemos que al escribir la segunda expresión de la Ec.(2) en términos del tiempo, obtenemos una expresión de la forma mostrada en la Ec.(13), donde $\gamma = \beta < 1$. Concluimos entonces que, cuando la distribución de tiempos de espera es libre de escala, obtenemos un proceso subdifusivo.

Entre los ejemplos donde este tipo de caminatas aleatorias han sido aplicadas de manera exitosa, destacan la propagación de contaminantes en acuíferos [4], la propagación de partículas cargadas en sólidos amorfos [32, 33] y el transporte de distintas macromoléculas en el interior de células vivas [1, 19].

Hasta ahora, nos hemos concentrado en entender la aparición del comportamiento mostrado en la Ec.(13) cuando las distribuciones que generan la **CATC** son libres de escala, pero ¿cuál es la ecuación de evolución que obedece la probabilidad de encontrar al caminante en el punto x al tiempo t en el límite difusivo?

Para responder esto, calculamos el comportamiento asintótico de las expresiones mostradas en la Ec.(9) cuando $s, k \ll 1$ [25],

$$\hat{\psi}(s) \approx 1 - c_\beta s^\beta, \quad \tilde{\lambda}(k) \approx 1 - c_\alpha |k|^\alpha, \quad (17)$$

donde c_β y c_α son constantes que aparecen al hacer la expansión asintótica, y cuyas unidades físicas son: $[tiempo]^\beta$ y $[distancia]^\alpha$ respectivamente.

Entonces, sustituyendo la Ec.(17) en la Ec.(8) y reacomodando términos tenemos

$$s^\beta \hat{P}(s, k) - s^{\beta-1} = -D_{\alpha, \beta} |k|^\alpha \hat{P}(s, k), \quad (18)$$

donde $D_{\alpha, \beta} = c_\alpha / c_\beta$.

La Ec.(18) es una generalización de la Ec.(11), reduciéndose a esta cuando $\alpha \rightarrow 2$ y $\beta \rightarrow 1$. Así, en el espacio (x, t) la Ec.(18) equivale a la siguiente generalización del problema de valores iniciales discutido en la sección anterior para la ecuación de difusión

$$\frac{c \partial^\beta P(t, x)}{\partial t^\beta} = D_{\alpha, \beta} \frac{\partial^\alpha P(t, x)}{\partial |x|^\alpha}. \quad (19)$$

$$P(0, x) = \delta(x), \quad 0 < \beta \leq 1, \quad 1 < \alpha \leq 2,$$

donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac, $D_{\alpha,\beta}$ el coeficiente de difusión generalizado, y donde los símbolos $\frac{{}^c\partial^\beta}{\partial t^\beta}$ y $\frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha}$, se conocen como la *derivada fraccionaria de Caputo* de orden β y la *derivada fraccionaria simétrica de Riemman-Liouville* de orden α respectivamente [14, 28]. Estos operadores son una generalización de los operadores de derivación usuales, y su forma explícita está dada por

$$\begin{aligned}\frac{{}^c\partial^\beta P(t, x)}{\partial t^\beta} &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-t')^{-\beta} \frac{\partial P(t', x)}{\partial t'} dt', \\ \frac{\partial^\alpha P(t, x)}{\partial |x|^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} |x-x'|^{1-\alpha} P(t, x') dx'.\end{aligned}\tag{20}$$

El estudio de las propiedades de derivadas e integrales de orden arbitrario, y de la generalización de los teoremas fundamentales del cálculo integro-diferencial para este tipo de operadores, corresponde a la rama de las matemáticas conocida como cálculo fraccionario [27], y aunque sus aplicaciones son relativamente recientes, su origen puede ser trazado hasta finales del siglo *XVII* [23].

La Ec.(19) se conoce como la ecuación de difusión fraccionaria, y es una generalización de la Ec.(6) que permite estudiar varios aspectos de la difusión anómala. En particular, cuando la derivada fraccionaria aparece solamente en las coordenadas espaciales ($\beta = 1, 0 < \alpha < 2$), esta describe la evolución espacio-temporal de la probabilidad de encontrar a un caminante que se mueve a través de vuelos de Lévy en un punto x al tiempo t . Por otro lado, cuando la derivada fraccionaria aparece solamente en la coordenada temporal, dicha ecuación es un buen modelo para procesos subdifusivos causados por trampas (regiones del espacio en las que el caminante puede quedar atrapado durante largos periodos del tiempo) u obstáculos [26].

Las ventajas de modelar procesos difusivos, ya sean anómalos o normales, en términos de la Ec.(6) o la Ec.(19), y en lugar de hacerlo a través de caminantes aleatorios, radica en que estas permiten plantear y resolver con mayor facilidad problemas con condiciones a la frontera, y problemas en los que la sustancia que se difunde es afectada por distintos tipos de campos, *e.g.* campo gravitatorio o campos eléctricos. Además, permiten el uso de herramientas de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, tales como técnicas de transformadas y separación de variables [8].

La investigación alrededor de las propiedades y las aplicaciones de la ecuación de difusión fraccionaria, ha ganado mucha fuerza en la última década [25, 26], además ha impulsado importantes áreas de investigación, tales como la modelación de reacciones químicas en presencia de difusión anómala [15, 3], y los efectos que esta tiene en fenómenos

típicos observados en sistemas de reacción difusión, tales como formación de patrones estacionarios [9, 18] y propagación de frentes de onda [10, 16].

Por último, es importante mencionar que existen otros modelos para la descripción de procesos difusivos anómalos que no mencionamos en este artículo, y que se han desarrollado a partir de las ideas aquí tratadas. Entre estos modelos destacan las *caminatas de Lévy* [38] y los *vuelos de Lévy truncados* [12].

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Jorge X. Velasco por su invitación para contribuir a este número de Miscelánea Matemática.

Bibliografía

- [1] E. Barkai, Y. Garini y R. Metzler, «Strange kinetics of single molecules in living cells», *Physics Today*, vol. 65, 2012, 29–35.
- [2] J. Bear, *Dynamics of fluids in porous media*, Dover Publications INC., 1988.
- [3] D. ben Avraham y S. Havlin, *Diffusion and reaction in fractal and disordered systems*, Cambridge University Press, 1977.
- [4] B. Berkowitz, A. Cortis, M. Dentz y H. Sher, «Modeling non-fickian transport in geological formation as a continuous time random walk», *Reviews of Geophysics*, vol. 44, 2006, .
- [5] E. Bouchaud y M. Daoud, «Adsorbed polymers and node-avoiding levy flights», *J. Phys. A*, vol. 20, 1987, 1463–1470.
- [6] J. Bouchaud y A. Georges, «Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications», *Physics Reports*, vol. 195, 1990, 127293.
- [7] A. V. Chechkin, R. Metzler, J. Klafter y V. Y. Gonchar, *Capítulo “introduction to the theory of levy flights” en anomalous transport*, ed. r. klages, g. radons and i.m. sokolov, first.^a ed., WILEY-VCH, 2008.
- [8] J. Crank, ed., *The mathematics of diffusion*, Oxford University Press, 2004.
- [9] C.Varea y R. Barrio, «Travelling turing patterns with anomalous diffusion», *J. Phys. Condens. Matter*, vol. 16, 2004, S5081–S5090.
- [10] D. del Castillo-Negrete, «Fractional diffusion models of nonlocal transport», *Physics of Plasmas*, vol. 13, núm. 082308, 2006, 1–16.
- [11] ———, «Non-diffusive, non-local transport in fluids and plasmas», *Nonlin. Processes Geophys*, vol. 17, 2010, 1–9.
- [12] ———, *Capítulo “anomalous transport in the presence of truncated lévy flights” en fractional dynamics : recent advances* , ed. joseph klafter, s. c. lim , ralf metzler , World Scientific, 2011.
- [13] A. M. Edwards, R. A. Philips, N. W. Watkins, M. P. Freeman, E. J. Murphy, V. Afanasyev, S. V. Buldyrev, M. da Luz, E. Raposo, H. E. Stanley y G. M. Viswanathan, «Revisiting lévy flight search patterns of wandering albatrosses, bumblebees and deer», *Nature*, vol. 449, 2007, 1044–1048.
- [14] R. Gorenflo y F. Mainardi, *Capítulo “fractional calculus : Integral and differential equations of fractional order” en fractals and fractional calculus in continuum mechanics* , ed. a carpinteri and f. mainardi, Springer, 1997.

- [15] B. I. Henry, T. A. M. Langlands y S. L. Wearne, «Anomalous diffusion with linear reaction dynamics: From continuous time random walks to fractional reaction-diffusion equations», *Phys. Rev. E*, vol. 74, 2006, 031116.
- [16] D. Hernández, R. Barrio y C. Varea, «Wave-front dynamics in systems with directional anomalous diffusion», *Phys. Rev. E*, vol. 74, 2006, 046116.
- [17] D. Hernández, M. Núñez-López y J. X. Velasco-Hernández, «Telegraphic double porosity models for head transient behaviour in naturally fractured aquifers», Por publicarse.
- [18] D. Hernández, C. Varea y R. Barrio, «Dynamics of reaction-diffusion systems in a subdiffusive regime», *Phys. Rev. E*, vol. 79, 2009, 026109.
- [19] F. Höfling y T. Franosch, «Anomalous transport in the crowded world of biological cells», *Reports on Progress in Physics*, vol. 76, 2013, .
- [20] P. L. Houston, *Chemical kinetics and reaction dynamics*, Dover Publications Inc., 2006.
- [21] http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation, «Heat equation».
- [22] L. P. Kadanoff, *Statistical physics: Statics, dynamics and renormalization*, World Scientific, 2000.
- [23] J. T. Machado, V. Kiryakova y F. Mainardi, «Recent history of fractional calculus», *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, vol. 16, 2011, 11401153.
- [24] R. Metzler, W. G. Glöckle y F. Nonnenmacher, «Fractional model equation for anomalous diffusion», *Physica A*, vol. 211, 1994, 13–24.
- [25] R. Metzler y J. Klafer, «The random walk guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach», *Physics Reports*, vol. 339, núm. 1, 2000, 1–77.
- [26] ———, «The restaurant at the end of the random walk recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics», *J. Phys. A Math. Gen.*, vol. 37, 2004, R161–R208.
- [27] K. B. Oldham y J. Spanier, *The fractional calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, Dover Publications Inc., 2006.
- [28] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, Academic Press, 1999.
- [29] J. Rudnick y G. Gaspari, *Elements of the random walk*, Cambridge University Press, 2004.
- [30] E. Scalas, R. Gorenflo y F. Mainardi, «Uncoupled continuous time-random walks Solutions and limiting behaviour of the master equation», *Phys. Rev. E*, vol. 69, 2004, 011107.
- [31] B. O. Shaughnessy y I. Procaccia, «Diffusion on fractals», *Phys. Rev. A*, vol. 32, 1985, 3073–3083.
- [32] H. Sher y E. Montroll, «Anomalous transit time dispersion in amorphous solids», *Phys. Rev. B*, vol. 7, 1975, 2455–2477.
- [33] H. Sher, M. F. Slesinger y J. T. Bendler, «Time-scale invariance in transport and relaxation», *Physics Today*, vol. 44, 1991, 26–34.
- [34] M. F. Shlesinger, «Search research», *Nature*, vol. 443, 2006, 281–.
- [35] T. H. Solomon, E. R. Weeks y H. L. Swinney, «Observation of anomalous diffusion and lévy flights in a two-dimensional rotating flow», *Phys. Rev. Lett*, vol. 71, 1993, 3975–3978.
- [36] M. Weiss, M. Elsner, F. Kartberg y T. Nilsson, «Anomalous subdiffusion is a measure for cytoplasmic crowding in living cells», *Biophysical Journal*, vol. 87, 2004, 7277–7289.
- [37] M. Weiss y T. Nilsson, «In a mirror dimly: Tracing the movement of molecules in a living cell», *Trends in Cell Biology*, vol. 14, 2004, 267–73.
- [38] G. Zumofen, A. Blumen y J. Klafter, «Current flow under anomalous-diffusion conditions: Lévy walks», *Phys. Rev. A*, vol. 41, 1990, 4558–4561.