

Leyes de grandes números para la distribución de grados en gráficas aleatorias con ligas preferenciales

Gerónimo Uribe Bravo

Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad Universitaria, Coyoacán, 04510. México, D. F.
geronimo@matem.unam.mx

Resumen

A partir de la ley fuerte de los grandes números y de un argumento de Ornstein que data de 1965 obtendremos un resultado más reciente: veremos que la cantidad de vértices conectados con otros k en una sucesión de gráficas aleatorias, llamada de ligas preferenciales, converge casi seguramente conforme la cantidad de vértices tiende a infinito.

1. Leyes de los grandes números

Las leyes de los grandes números usualmente se interpretan como una justificación matemática de la interpretación frecuentista de la probabilidad. Otra forma de enunciarlo es que dichas leyes permiten observar regularidades que aparecen en grandes colectivos de eventos aleatorios. A continuación recordemos los enunciados precisos de la ley débil y fuerte de los grandes números.

El contexto de la ley fuerte de los grandes números usual es el siguiente. Suponemos que en un espacio de probabilidad, existen variables aleatorias X_1, X_2, \dots con valores reales que son independientes e idénticamente distribuidas. Esto es: para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq x_n).$$

Teorema 1.1 (Ley débil de los grandes números). Si $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ y $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ entonces para toda $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

A la sucesión de sumas parciales asociada a una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas se le conoce como caminata aleatoria. Así, la ley de los grandes números también se puede ver como una afirmación acerca de caminatas aleatorias. El teorema anterior fue obtenido por Jakob Bernoulli en [2] en el caso en que $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = p \in [0, 1]$ (en cuyo caso nos referimos a X_i como una variable aleatoria con distribución Bernoulli de parámetro p) y publicado en su libro *Ars Conjectandi* (el arte de conjeturar). Bernoulli se refería a este resultado como su *Teorema Dorado*.

Por otra parte, la ley débil de los grandes números se ha generalizado en el siguiente resultado.

Teorema 1.2 (Ley fuerte de los grandes números). Si $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ y $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ entonces

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mu \right) = 1.$$

La diferencia entre las leyes débil y fuerte de los grandes números estriba en el tipo de convergencia utilizada. En la primera, se afirma que el promedio de X_1, \dots, X_n converge en probabilidad a la esperanza de X_1 mientras que la segunda afirma que la convergencia es casi segura. Puesto que en cursos avanzados de probabilidad se prueba que la convergencia casi segura implica la convergencia en probabilidad vemos que la ley fuerte implica la débil. Sin embargo, otra diferencia importante es que la ley débil de los grandes números es un enunciado sobre una cantidad finita de variables aleatorias mientras que la ley fuerte involucra a una cantidad infinita de variables aleatorias. Esto aumenta la sofisticación matemática que se requiere para probar la ley fuerte al requerir teoría de la medida. La ley fuerte de los grandes números es un teorema de principios del siglo pasado obtenido en su versión más general por Kintchine en [9]. La prueba clásica de la ley fuerte de los grandes números se basa en el lema de Borel–Cantelli; la prueba más sencilla con estas técnicas que conoce el autor es la dada por Etemadi en [5] que además relaja la hipótesis de independencia. También, encontramos pruebas de la ley fuerte a partir de la teoría de martingalas; estas pruebas además permiten sustituir la hipótesis de independencia por una de simetría llamada intercambiabilidad y conduce al llamado Teorema de de Finetti, que se encuentra en la base de la estadística bayesiana. Otra prueba se hace como un caso particular del teorema

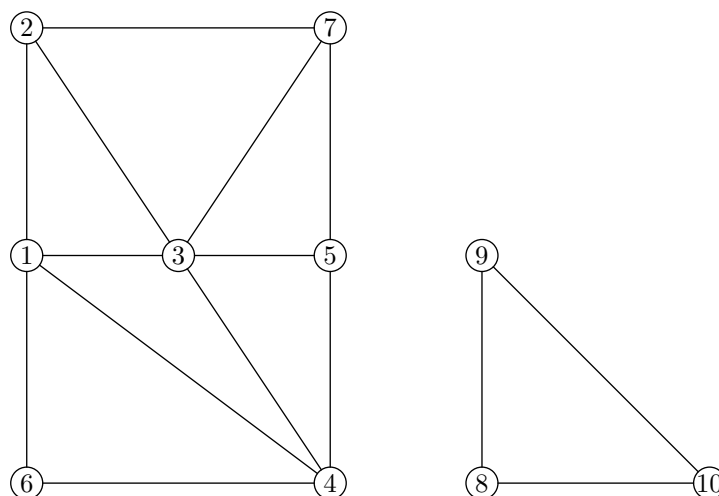


Figura 1. Representación de una gráfica con conjunto de vértices $V = \{1, \dots, 10\}$ y aristas $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 7\}, \{5, 7\}, \{3, 7\}, \{3, 4\}, \{8, 9\}, \{9, 10\}$ y $\{10, 8\}$

ergódico puntual, que a su vez admite una prueba basado en el teorema ergódico maximal (con una prueba que casi confunde maximalmente, como afirma Halmos en [7]). Sin embargo, también hay una prueba directa y sencilla del teorema ergódico dada por Katznelson y Weiss en [8] que se traduce en una prueba distinta a las anteriores de la ley fuerte de los grandes números.

2. Gráficas aleatorias con ligas preferenciales

Ahora investigaremos un problema que ha atraído mucho interés desde que fué planteado en [1]. En dicho artículo, los autores se proponen crear un modelo de gráficas aleatorias que sea compatible con algunas características que se observan en gráficas definidas por situaciones de la vida real.

Definición 2.1. Una **gráfica** es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto (finito) a cuyos elementos llamamos **vértices** y E es una colección de subconjuntos de V de tamaño 2 a cuyos elementos se les da el nombre de **aristas**.

Es común representarlos mediante un dibujo de puntos (que representan a los vértices) unidos por líneas entre ellos (que representan a las aristas), como en la figura 1. Un ejemplo concreto de una gráfica tomada de la vida real es la asociada a la Red Informática Mundial (World Wide Web ó WWW): podemos pensar a dicha red como una gráfica cuyos vértices serían las páginas web que existen y donde incluimos

una arista entre dos páginas si en una de ellas existe un hipervínculo hacia la otra. Otro ejemplo es la red de patrones de citas, en la que los vértices son los artículos científicos publicados y hay una arista entre un par de ellos si uno cita al otro.

Definición 2.2. Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Definimos el **grado** del vértice $v \in V$ en la gráfica G , denotado $\delta(v, G)$, como la cantidad de aristas que ligan (o formalmente que contienen) al vértice v .

La **distribución de grados** de la gráfica G es la función $\Gamma_G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\Gamma_G(k)$ es la fracción de vértices en la gráfica G que tienen grado k .

Si G es la gráfica asociada a la WWW o a la red de patrones de citas, se observa una característica curiosa de la distribución de grados: existen constantes C y γ tales que

$$\Gamma_G(k) \approx Ck^{-\gamma}$$

al menos en una región importante de enteros k . (Para la WWW, esto se reporta en [1].) Se dice entonces que la distribución de grados de G sigue una ley de potencia. El decrecimiento en la distribución de grados es más lento que si hubiera decrecimiento exponencial (del tipo p^k) y en general nos dirá que hay una cantidad considerable de vértices altamente conectados por aristas. Uno de los objetivos de [1] es dar un modelo de gráficas aleatorias en el que se observen este tipo de leyes de potencias. Curiosamente, dentro de la red de patrones de citas, dicho artículo destacaría: una búsqueda en Google Scholar (realizada el 30 de Octubre del 2014) nos dice que dicho artículo es citado ¡por otros 20983! El mecanismo que proponen es el de ir agregando vértices a la gráfica conforme pasa el tiempo y que dichos vértices se conecten preferentemente con vértices con grado grande. Esto se conoce como un mecanismo de ligas preferenciales.

2.1 Gráficas de Barabási-Albert

A continuación presentamos el modelo matemático formal y los resultados que obtienen en [1] mediante simulación. En dicho artículo se propone un (proto)modelo para el crecimiento de una gráfica con ligas preferenciales. Como hacen notar en [3], en general el modelo no está bien especificado y es imposible reproducir los resultados salvo en el caso particular en el que se va agregando un vértice a la vez. Como en [4], nos enfocaremos en este caso, aunque los argumentos que veremos son válidos con mucha mayor generalidad.

Hay un nombre para una sucesión de gráficas que se van construyendo al agregar vértices uno por uno y agregando una arista de este vértice

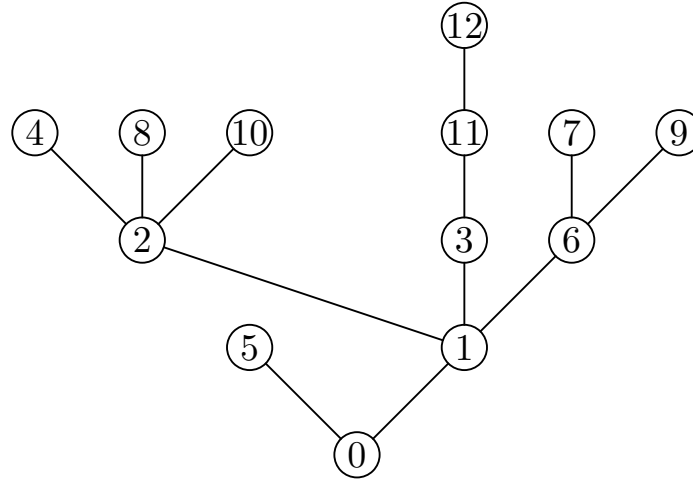


Figura 2. Representación del árbol recursivo asociado al vector $(0, 1, 1, 2, 0, 1, 6, 2, 6, 2, 3, 11)$.

a alguno existente: árboles recursivos. Por simplicidad, el conjunto de vértices será siempre

$$V_n = \{0, 1, \dots, n\}$$

para alguna n .

Definición 2.3. Un **árbol recursivo** de tamaño $n + 1$ es una gráfica con conjunto de vértices V_n tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe exactamente una única arista del tipo $\{i, \pi_i\}$ y se tiene que $\pi_i < i$.

Una forma de imaginarse a un árbol recursivo de tamaño n es como sigue: a cada instante de tiempo i del 1 al n agregamos al vértice i junto con la arista $\{i, \pi_i\}$. Un ejemplo de un árbol recursivo se puede consultar en la figura 2. Así, podemos poner en correspondencia a los árboles recursivos de tamaño n con sucesiones de naturales $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ tales que $0 \leq \pi_i < i$. Por lo tanto, hay $n!$ árboles recursivos de tamaño $n + 1$.

Examinemos ahora el mecanismo de generación aleatoria de árboles recursivos con ligas preferenciales.

Modelo de Barabási-Albert: Sea G_1 el único árbol recursivo de tamaño 2. Para cada $n \geq 1$ definimos recursivamente a G_{n+1} como el árbol aleatorio recursivo obtenido de adicionar el vértice $n + 1$ a G_n junto con la arista $\{n + 1, I_{n+1}\}$ donde

$$\mathbb{P}(I_{n+1} = i \mid G_n) = \frac{\delta(i, G_n)}{2n}$$

para $i \in V_n$.

(La suma de los grados en la gráfica G_n no es una cantidad aleatoria, sino determinista e igual al doble de aristas puesto que cada arista se

cuenta doble cuando se suma el grado de cada vértice). Al poner en correspondencia a la gráfica G_n con la sucesión de enteros (I_1, \dots, I_n) , podemos utilizar el siguiente código para generar la gráfica en el lenguaje Octave.

```
# El código simula un árbol aleatorio recursivo
  que sigue el modelo de Barabási-Albert
n=30; # Tamaño de la gráfica final
I=0; # Gráfica inicial G_1 en su representación
      como sucesión de enteros
# Vector de grados de los vértices
w=[1,1];
# Se agregan los individuos mediante un ciclo
for i=2:(n-1)
# Se agrega el vértice i
# Se escoge a dónde apunta su arista
  I(i)=discrete_rnd(0:(i-1),w./(2*i),1);
# Se actualizan los grados de los vértices
  w(I(i)+1)=w(I(i)+1)+1;
# Se agrega el grado de i
  w=[w,1];
endfor
```

Código 1. batree.m

2.2 Análisis mediante cadenas de Markov (inhomogéneas)

Para realizar el análisis riguroso de la distribución empírica de grados, notaremos que es sencillo asociar cadenas de Markov que nos den acceso directo a la distribución de grados sin necesidad de simular al árbol aleatorio recursivo. En efecto, notemos que si el vértice n se conecta con un vértice de grado 1 entonces la cantidad de vértices de grado 1 permanece constante mientras que la cantidad de vértices de grado mayor a 1 crece en 1. Por otra parte, si el vértice n se conecta con un vértice de grado mayor a 1 entonces la cantidad de vértices de grado 1 crece en 1 y la cantidad de vértices de grado mayor a 1 permanece constante. Esto nos dice que es posible simular directamente la sucesión de vértices de grado 1 mediante la construcción recursiva siguiente. Sean $(U_n, n \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias uniformes e independientes; esto es, para cada $n \geq 1$ y para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in (0, 1)$,

$$\mathbb{P}(U_1 \leq x_1, \dots, U_n \leq x_n) = x_1 \cdots x_n.$$

Sea $C_1^1 = 2$ y definamos

$$C_{n+1}^1 = C_n^1 + \mathbf{1}_{U_n > \frac{C_n^1}{2n}}. \quad (1)$$

Una posible interpretación de dicha recurrencia aleatoria es que C^1 es una especie de caminata aleatoria que a cada paso escoge su distribución de salto. En efecto, la distribución condicional de $C_{n+1}^1 - C_n^1$ dada la historia hasta el tiempo n es Bernoulli de parámetro $1 - C_n^1/2n$. Formalmente, notamos que C^1 es una cadena de Markov inhomogénea. (Se propone el nombre de caminata aleatoria autoregulada).

El siguiente código nos permite simular a C_n^1 y observamos que si graficamos a C_n^1/n , esto pareciera converger a $2/3$ conforme $n \rightarrow \infty$, como se ve en la figura 3.

```
# El código simula la evolución de la proporción
  de vértices de grado 1 en el modelo de
  Barabási-Albert.
n=2501; # Tamaño de la gráfica final.
c=2; # El vector guardará la evolución de la
  cantidad de vértices de grado 1.
  # Para G_1, la cantidad de vértices de
  grado 1 es 2.
for i=2:(n-1)
# Se agrega un nuevo vértice
# y se ve si es de grado 1 (b=1) o de grado
  mayor o igual a 1 (b=0).
  b=(rand > c(end)/(2*i));
# Se actualiza la cantidad de vértices de grado
  1
  c=[c; c(end)+b];
endfor;
# Se grafica la evolución de la proporción de
  vértices de grado 1.
plot(c(1:(n+1))./(2:(n+2)),')
```

Código 2. degree1.m

Dada la interpretación de C^1 como una especie de caminata aleatoria, la siguiente heurística se sugiere: si $C_n^1/(n+1)$ convergiera a alguna cantidad α , digamos en probabilidad, entonces el parámetro de salto convergería a $1 - \alpha/2$ y entonces C_n^1 sería como una suma de variables Bernoulli de dicho parámetro, por lo que la ley débil de los grandes números nos diría que C_n^1/n converge a $1 - \alpha/2$. Esto sólo es posible si $\alpha = 1 - \alpha/2$ ó equivalentemente $\alpha = 2/3$.

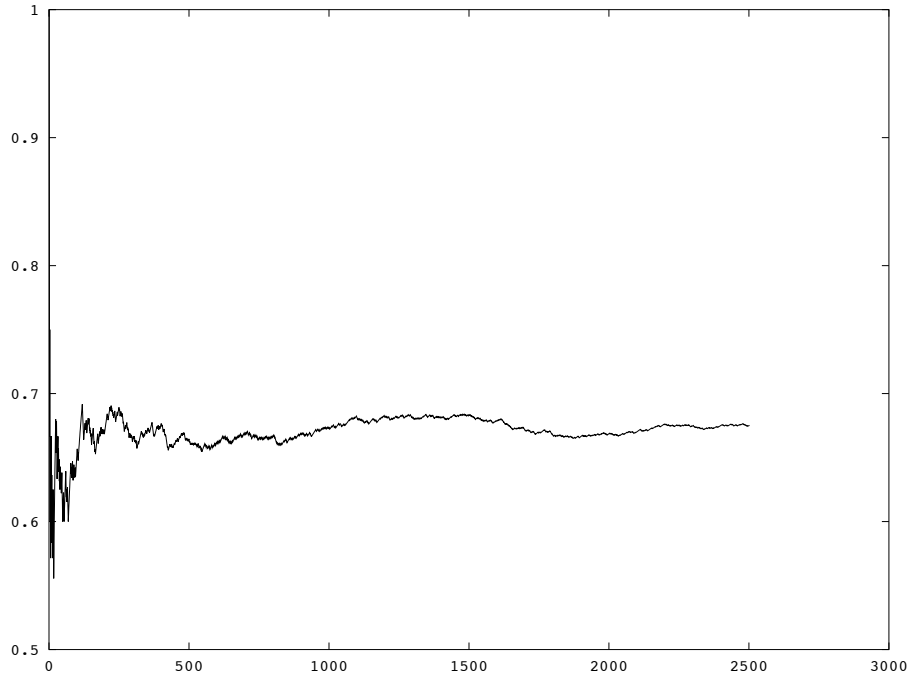


Figura 3. Resultado de ejecutar el código degree1.m

El análisis para C^2, C^3, \dots tiene una diferencia importante. Ya no es cierto que C^i sea una cadena de Markov para $i \geq 2$. Lo que sí es cierto es que para toda $k \geq 1$, (C^1, \dots, C^k) es una cadena de Markov. Es fácil ver por qué: dividimos a los vértices de G_n en vértices de grados de 1, de grado 2, \dots , de grado k y de grado mayor a k . Al agregar al vértice $n+1$ para formar G_{n+1} , este se liga a un vértice de grado i con $i \leq k$ con probabilidad (condicional) $iC_n^i/2n$ mientras que se liga con un vértice de grado mayor a k con probabilidad condicional

$$1 - \frac{C_n^1 + \dots + kC_n^k}{2n}.$$

Lo que notamos es que si el vértice $n+1$ se conecta a un vértice de grado 1 entonces la cantidad de vértices de grado 2 aumenta en 1 y todas las demás cantidades permanecen constantes. Si el vértice $n+1$ se conecta a un vértice de grado $i \in \{2, \dots, k-1\}$ entonces la cantidad de vértices de grado 1 aumenta en 1, la cantidad de vértices de grado i disminuye en 1 y la cantidad de vértices de grado $i+1$ aumenta en 1. Similarmente, si $n+1$ se conecta con un vértice de grado k entonces la cantidad de vértices de grado 1 aumenta en 1 y la cantidad de vértices de grado k disminuye en 1. Así, podemos calcular la distribución condicional del

incremento $(\Delta C_n^1, \dots, \Delta C_n^k)$ dada la gráfica \mathcal{G}_n y concluir que

$$\mathbb{P}\left((\Delta C_n^1, \dots, \Delta C_n^k) = \vec{i} \mid \mathcal{G}_n \right) = \begin{cases} \frac{C_n^1}{2n} & \vec{i}_2 = 1 \text{ y } \vec{i}_i = 0 \text{ para todo } i \neq 2 \\ \frac{iC_n^i}{2n} & \vec{i}_1 = 1, \vec{i}_i = -1, \vec{i}_{i+1} = 1 \text{ y } \vec{i}_j = 0 \text{ si } j \neq i, i+1 \\ \frac{kC_n^k}{2n} & \vec{i}_1 = 1, \vec{i}_k = -1 \text{ y } \vec{i}_i = 0 \text{ para } i \neq 1, k \\ 1 - \frac{C_n^1 + \dots + kC_n^k}{2n} & \vec{i}_1 = 1 \text{ y } \vec{i}_i = 0 \text{ si } i \neq 1 \end{cases}.$$

La heurística explicada cuando $k = 1$ sigue siendo válida cuando $k > 1$. Lo que nos dice es que si C_n^k/n converge a α_k conforme $n \rightarrow \infty$ (digamos en probabilidad) entonces $(C_n^k, n \geq 1)$ sería, en el límite, una caminata aleatoria con distribución de salto

$$\mathbb{P}(\text{salto} = -1) = k\alpha_k, \quad \mathbb{P}(\text{salto} = 0) = 1 - k\alpha_k - (k-1)\alpha_{k-1} \quad \text{y} \\ \mathbb{P}(\text{salto} = 1) = (k-1)\alpha_{k-1},$$

lo cual a su vez nos dice que C_n^k/n converge a la esperanza de dicha distribución de salto y que por lo tanto

$$\alpha_k = (k-1)\alpha_{k-1} - k\alpha_k \quad \text{ó} \quad \alpha_k = \frac{k-1}{k+1}\alpha_{k-1}.$$

Esta relación de recurrencia se puede resolver recordando que $\alpha_1 = 2/3$, por lo que

$$\alpha_k = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}.$$

Notemos que la distribución límite es de tipo ley de potencias:

$$\alpha_k \sim 4k^{-3}.$$

La heurística que acabamos de presentar depende del hecho de que C_n^k/n sea convergente (al menos en probabilidad). Estamos en posición de enunciar el teorema que nos ocupará el resto del artículo.

Teorema 2.4. *Casi seguramente C_n^k/n converge conforme $n \rightarrow \infty$ hacia α_k .*

2.2.1. Cantidad de vértices de grado 1: el argumento de acoplamiento y retroalimentación de Ornstein

En [6] el autor estudia una generalización del modelo clásico de urnas de Pólya que es parecido al que acabamos de analizar. Da una prueba de la convergencia, de manera casi segura, al utilizar un argumento basado en acoplamiento y la ley fuerte de los grandes números que el autor atribuye a Ornstein. El argumento que da se puede utilizar para mostrar el teorema 2.4 cuando $k = 1$ o equivalentemente para verificar la convergencia casi segura de C_n^1/n hacia $2/3$. Se basa en un

acoplamiento de la caminata aleatoria simple y la posterior obtención del resultado mediante retroalimentación.

La primera etapa consiste en un acoplamiento. Sean $(U_i, i \geq 1)$ las variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $(0, 1)$ con las que definimos a $C_n^1, n \geq 1$ en la ecuación (1). Definamos

$$R_0^p = 0 \quad \text{y} \quad R_{n+1}^p = R_n^p + \mathbf{1}_{U_{n+1} > 1-p}.$$

Esta etapa se llama de acoplamiento pues permite construir a todas las caminatas aleatorias con saltos Bernoulli de parámetro p a partir de una sólo sucesión de uniformes independientes y, en particular, en el mismo espacio de probabilidad. Esta construcción además satisface la monotonía

$$R_n^p \leq R_n^{p'}$$

válida si $p \leq p'$.

Ahora consideremos $x, y \in [0, 1]$ con $x < y$ y definamos al conjunto

$$O_{x,y} = \left\{ x \leq \liminf_n \frac{C_n^1}{n} \quad \text{y} \quad \limsup_n \frac{C_n^1}{n} \leq y \right\}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. En dicho conjunto, sea N tal que para toda $n \geq N$ se tenga que

$$x - \varepsilon < \frac{C_n^1}{n} \quad \text{y} \quad \frac{C_n^1}{n} < y + \varepsilon.$$

Entonces, para $n \geq N$ se sigue que

$$R_n^{1-(y+\varepsilon)/2} - R_N^{1-(y+\varepsilon)/2} \leq C_n^1 - C_N^1 \leq R_n^{1-(x-\varepsilon)/2} - R_N^{1-(x-\varepsilon)/2}.$$

Sin embargo, por la ley fuerte de los grandes números, se tiene que

$$\lim_n \frac{R_n^p}{n} = p$$

lo cual implica que

$$1 - \frac{y + \varepsilon}{2} \leq \liminf_n \frac{C_n^1}{n} \leq \limsup_n \frac{C_n^1}{n} \leq 1 - \frac{x - \varepsilon}{2}.$$

Puesto que lo anterior es válido para cualquier $\varepsilon > 0$, se sigue que

$$\mathbb{P}(O_{x,y}) \leq \mathbb{P}(O_{1-y/2, 1-x/2}).$$

Pasamos ahora al argumento de retroalimentación. Al notar que

$$1 = \mathbb{P}(O_{0,1})$$

obtenemos

$$1 = \mathbb{P}(O_{0,1}) \leq \mathbb{P}(O_{1/2,1}) \leq \mathbb{P}(O_{1/2,3/4}) \leq \mathbb{P}(O_{5/8,3/4}) \leq \dots \leq \mathbb{P}(O_{f^{(2n)}(x), f^{(2n)}(y)}) \leq \dots,$$

donde $f(x) = 1 - x/2$ y $f^{(n)}$ es la n -ésima composición de f consigo misma. Puesto que f es una contracción de $[0, 1]$, existe un único punto fijo, que resulta ser $2/3$ y que es el límite de $f^{(n)}(x)$ conforme $n \rightarrow \infty$ para cualquier $x \in [0, 1]$. Se concluye que los conjuntos $O_{f^{(2n)}(x), f^{(2n)}(y)}, n \geq 1$ van decreciendo y que su intersección es $O_{2/3, 2/3}$. Por continuidad de la medida \mathbb{P} se concluye que

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(O_{f^{(2n)}(x), f^{(2n)}(y)}) = \mathbb{P}(O_{2/3, 2/3}) = \mathbb{P}\left(\lim_n \frac{C_n^1}{n} = \frac{2}{3}\right).$$

2.2.2. Convergencia casi segura de la distribución empírica de grados

La extensión del argumento anterior a la cantidad de vértices de grado k para $k \geq 1$ en G_n (que habíamos denotado por C_n^k) tiene sólo una dificultad adicional. Mientras que la cantidad de vértices de grado 1 tiene una evolución que sólo depende de sí misma, la cantidad de vértices de grado k para $k \geq 2$ involucra a la cantidad de vértices de grado i para $i \leq k$. Esto es fácil de ilustrar cuando $k = 2$: gracias al análisis que hemos hecho sobre el carácter markoviano de (C_n^1, C_n^2) , vemos que si U_1, U_2, \dots son variables independientes uniformes en $(0, 1)$, entonces la sucesión $(C_n^1, C_n^2), n \geq 1$ admite la representación

$$\begin{aligned} C_1^1 &= 2, \\ C_1^2 &= 0, \\ C_{n+1}^1 &= C_n^1 + \mathbf{1}_{U_n > C_n^1/2n} \quad \text{y} \\ C_{n+1}^2 &= C_n^2 + \mathbf{1}_{U_n \leq C_n^1/2n} - \mathbf{1}_{C_n^1/2n < U_n \leq (C_n^1 + 2C_n^2)/2n}. \end{aligned}$$

La idea de comparar con caminatas aleatorias (esto es, la etapa de acoplamiento) aún funciona: en efecto, la base de comparación son las desigualdades

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{[0, p-\varepsilon]} - \mathbf{1}_{[p-\varepsilon, p+q+\varepsilon]} &\leq \mathbf{1}_{[0, p]} - \mathbf{1}_{[p, p+q]} \\ &\leq \mathbf{1}_{[0, p+\varepsilon]} - \mathbf{1}_{[p+\varepsilon, p+q-\varepsilon]}, \end{aligned}$$

que serán aplicadas al evaluar las indicadoras en U_n . Si $R^{p,q}$ es la caminata aleatoria definida por

$$R_0^{p,q} = 0 \quad \text{y} \quad R_{n+1}^{p,q} = R_n^{p,q} + \mathbf{1}_{0 \leq U_{n+1} < p} - \mathbf{1}_{p \leq U_{n+1} < p+q},$$

observamos en particular que

$$R^{p-\varepsilon, q+2\varepsilon} \leq R^{p,q} \leq R^{p+\varepsilon, q-\varepsilon}.$$

Si $0 \leq x \leq y \leq 1$, consideremos al conjunto

$$O_{x,y}^i = \left\{ x \leq \liminf_n \frac{C_n^i}{n} \text{ y } \limsup_n \frac{C_n^i}{n} \leq y \right\}.$$

Notemos que como $C_n^1/n \rightarrow 2/3$ entonces $O_{2/3,2/3}^1$ tiene probabilidad 1. Nos concentraremos ahora en demostrar la igualdad

$$\mathbb{P}(O_{x,y}^2) \leq \mathbb{P}(O_{f_2(y),f_2(x)}^2) \quad (2)$$

si definimos

$$f_2(x) = 1 - \frac{2}{3} - x.$$

Por el mismo argumento de retroalimentación que para la cantidad de vértices de grado 1, concluiremos que

$$\mathbb{P}(O_{1/6,1/6}) = 1$$

pues f_2 es una contracción en $[0, 1]$ y $1/6$ es su único punto fijo.

Supongamos que para cualquier $\varepsilon > 0$ y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tenga que

$$\frac{2}{3} - 2\varepsilon \leq \frac{C_n^1}{n} \leq \frac{2}{3} + 2\varepsilon \quad \text{y} \quad x - \varepsilon \leq \frac{C_n^2}{n} \leq y + \varepsilon.$$

Entonces, para $n \geq N$, observamos que

$$R_{n+1}^{1/3-\varepsilon, y+\varepsilon} - R_n^{1/3-\varepsilon, y+\varepsilon} \leq C_{n+1}^2 - C_n^2 \leq R_{n+1}^{1/3+\varepsilon, x-\varepsilon} - R_n^{1/3+\varepsilon, x-\varepsilon}.$$

La ley fuerte de los grandes números nos dice que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n^{p,q}}{n} = 1 - p - q$$

casi seguramente. Por lo tanto, vemos que

$$1/3 - y \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^2}{n} \quad \text{y} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^2}{n} \leq 1/3 - x.$$

Se deduce la desigualdad (2), misma que como ya mencionamos prueba que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^2}{n} = \frac{1}{6}$$

casi seguramente.

El argumento anterior se puede también aplicar a la cantidad C_n^k de vértices de grado k en G_n para $k \geq 2$. Para verlo, definamos

$$D_n^k = \frac{C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + kC_n^k}{2n}.$$

Si $U_n, n \geq 1$ es nuestra sucesión de variables uniformes en $(0, 1)$ e independientes entre si entonces $C_n^k, n \geq 1$ tiene la misma evolución que la sucesión (con la misma notación) definida mediante

$$C_1^k = 0 \quad \text{y} \quad C_{n+1}^k - C_n^k = \mathbf{1}_{[D_n^{k-2}, D_n^{k-1}]}(U_{n+1}) - \mathbf{1}_{[D_n^{k-1}, D_n^k]}(U_{n+1}).$$

Al aplicar el argumento de retroalimentación de Ornstein vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^k}{n} = \alpha_k$$

casi seguramente, donde

$$\alpha_k = \frac{k-1}{k+2} \alpha_{k-1},$$

y que por lo tanto

$$\alpha_k = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}.$$

Hemos por lo tanto concluido la prueba del teorema 2.4.

Agradecimientos

Quiero agradecer a Miriam Rodríguez González por las conversaciones que sostuvimos para la realización de su tesis de licenciatura *Sobre la distribución de grados de las gráficas aleatorias de los modelos de Erdős-Rényi y Barabási-Albert* (UNAM, 2009). En el curso de la investigación nos topamos con algunos argumentos de la literatura que no nos quedaron claros. Para remediar esta situación se desarrollaron los métodos expuestos en el presente artículo. También agradezco al revisor anónimo que ayudó a evitar algunos errores cometidos en la primera versión.

Bibliografía

- [1] A.-L. Barabási y R. Albert, «Emergence of scaling in random networks», *Science*, vol. 286, núm. 5439, 1999, 509–512.
- [2] J. Bernoulli, «Ars conjectandi», Impensis Thurnisiorum, fratrum, 1713.
- [3] B. Bollobás y O. Riordan, «The diameter of a scale-free random graph», *Combinatorica*, vol. 24, 2004, 5–34.
- [4] B. Bollobás, O. Riordan, J. Spencer y G. Tusnády, «The degree sequence of a scale-free random graph process», *Random Structures Algorithms*, vol. 18, núm. 3, 2001, 279–290.
- [5] N. Etemadi, «An elementary proof of the strong law of large numbers», *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, vol. 55, núm. 1, 1981, 119–122.
- [6] D. A. Freedman, «Bernard Friedman's urn», *Ann. Math. Statist.*, vol. 36, 1965, 956–970.
- [7] P. R. Halmos, «How to write mathematics», *Enseignement Math. (2)*, vol. 16, 1970, 123–152.
- [8] Y. Katznelson y B. Weiss, «A simple proof of some ergodic theorems», *Israel J. Math.*, vol. 42, núm. 4, 1982, 291–296.
- [9] A. Khintchine, «Sur la loi des grands nombres», *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 188, 1929, 477–479.