MISCELÁNEA MATEMÁTICA **37** (2003) 29-63

SMM

Medida de Jordan

Luis Víctor Dieulefait
Institut Galilée
Université de Paris XIII
(Villetaneuse, France)

"The will is infinite and the execution confined,
the desire is boundless and the act a slave to limit".

Cesaro, 1905.

1 Introducción.

Desde la época de esplendor griego los matemáticos se han preocupado por extender los conceptos de longitud, área y volumen a la mayor clase posible de figuras; partiendo de la longitud de un segmento, el área de un rectángulo y el volumen de un paralelepípedo. Así encontramos ya en Euclides una serie de postulados para la igualdad de áreas de polígonos, que desarrollan la noción primordial de que *figuras que se pueden descomponer en partes dos a dos congruentes tienen igual área.* Este principio se aplicó aún hasta fines del siglo pasado para la determinación de áreas. Al ser éste concepto insuficiente para la determinación del área de ciertas figuras, los mismos griegos introducen el *método de exhaución*, con el cual Arquímedes logra medir el área de un círculo y el de la región comprendida entre una parábola y un segmento. Por otra parte, para medir la longitud de la circunferencia también introducen el método de *rectificación de curvas.*

Para volúmenes o superficies curvas también los griegos aplicaron el método de exhaución, con el que Arquímedes midió el volumen y la superficie lateral de la esfera.

Este procedimiento para el cálculo de áreas y de volúmenes fue sistematizado y mejorado en el siglo XVII por Luca Valerio, Kepler, Cavalieri y Toricelli. Con el concepto de *integral definida*, que implicaba una concepción más fina del concepto de límite y una enorme simplificación de las dificultades antes encontradas mediante la noción de *integral definida* y la aplicación del Teorema de Barrow, se logra el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes siempre que se cumplan ciertas condiciones de regularidad.

A fines de siglo pasado y principios de este siglo, los matemáticos se vieron llevados a generalizar las nociones de área de superficies planas, área de superficies curvas y volúmenes.

G. Cantor en su trabajo "De la puissance des ensembles parfaits de points" (1884) [Ca] da una noción de volumen n-dimensional para conjuntos de puntos en E^n (el espacio euclídeo de n dimensiones).

Como veremos, la definición de Cantor no es satisfactoria, en particular porque el volumen así definido no resulta aditiva (sin embargo representa un avance, y está ligada a la noción que desarrollara Jordan).

Camille Jordan, en su trabajo "Remarques sur les intégrales définies" (1892) [Jo] finalmente introduce lo que luego se llamaría *medida de Jordan*, inspirado por el hecho de que en el cálculo de integrales definidas el rol de la función a integrar estaba totalmente esclarecido mientras que: *Línfluence de la nature du champe paraft pas avoir été étudiée avec le meme soin.* Con su procedimiento Jordan logra asignar a cualquier dominio una *medida interior* y una *medida exterior*, y define como medibles a aquellos conjuntos para los cuales estos 2 valores coinciden, siendo su medida este valor común.

Con respecto al área de una superficie curva, el método de aproximación por superficies poliédricas aparecía como una generalización natural del método de rectificación de curvas. Sin embargo, como quedó en evidencia por la paradoja de Schwarz, la situación era más compleja, y numerosos autores intentaron definir el área imponiendo restricciones sobre las superficies poliédricas a considerar (por ejemplo, que las caras sean triángulos cuyos ángulos no tiendan a cero). Definiciones basadas en el volumen de sólidos que cubren a la superficie cuyo espesor tiende uniformemente a 0 se encuentran en Borchardt (1854), Minkowski (1901) y Peano (1902) [Mi], [Pe2]. Pero la más interesante quizás sea la definición de Lebesgue [Le3]. Luego veremos estas definiciones en la sección 5.

Cabe destacar que la clase de superficies curvas cuya área puede calcularse mediante una integral es muy restringida. Refiriéndose a esta clase de superficies Lebesgue los considera "casos casi banales".

A este panorama de fines del siglo XIX debe agregarse el hecho de que la matemática se encontraba pasando por un período de crisis provocado por la aparición de *funciones continuas sin derivada en ninguno* *de sus puntos* (el primer ejemplo se debe a Weierstrass en 1872) [We] y las *curvas que llenan toda un área plana* (la primera, creada por Peano en 1890) [Pe3]. Si bien una curva que llene un área plana, como veremos luego, necesariamente posee puntos múltiples, los matemáticos empezaron a vislumbrar que una curva simple podía ser algo muy lejano a lo que la intuición geométrica, embebida de los Elementos de Euclides, podía imaginar. La sensación de algunos en ese momento queda reflejada en las palabras de C. Hermite, quien escribió a Stieltjes en 1893 que estaba "revolviéndose en miedo y horror ante esta lamentable plaga de funciones sin derivada".

Se construyeron curvas simples cerradas tales que las regiones por ellas determinadas no poseen medida de Jordan, curvas con "área positiva", como la de Osgood (1903) [Os]. Que tenga "área positiva" significa que su medida exterior de Jordan es positiva; esta curva jamás podrá ser entonces medible Jordan, pues su medida interior de Jordan es necesariamente 0, por ser curva simple (ver sección 4).

En general, comenzaron a aparecer curvas no-rectificables, es decir curvas de "longitud infinita", a las cuales, inspirándose en los métodos de Minkowski [Mi], F. Hausdorff logró en 1919 asociar ciertos invariantes que llamaremos *medida de Hausdorff y Dimensión de Hausdorff o Dimensión Fractal* [Ha].

Los conceptos de Dimensión Fractal y medida de Hausdorff están íntimamente relacionados con la medida de Jordan. Probaremos en este trabajo que una región plana cuyo borde es una curva simple es medible Jordan si y sólo si la curva posee Dimensión Fractal menor que 2 (o Dimensión Fractal 2 con medida de Hausdorff 0) (ver sección 3).

Respecto a las curvas de Dimensión Fractal 2 con medida de Hausdorff positiva (curvas con área), aplicando un Teorema de Diferenciación de Lebesgue y la noción de punto de densidad, trataremos de comprender un poco más de su estructura (sección 4).

Una de las características principales de la Medida de Jordan es su invariancia bajo transformaciones rígidas. En la sección 2, daremos una prueba de este hecho (en el plano).

2 Medida de Jordan de conjuntos planos.

El método que expondremos a continuación, introducido por Camille Jordan en 1892, es una generalización del método griego de exhaución.

Ambos métodos se basan en un postulado fundamental que se impone a la noción de área:

$$\text{Si } A \subset B, \quad \text{Area}(A) \leq \text{Area}(B)\,. \tag{1}$$

De esta forma definiremos, siguiendo a Jordan, el área de "dominios fundamentales" y con eso asignaremos una medida (área) a aquellos conjuntos que puedan aproximarse "suficientemente bien" por estos dominios fundamentales.

Definición 2.1. Si el conjunto E puede descomponerse como unión finita de cuadrados C_i de lados paralelos a un par de ejes fijos x, y, todos de igual lado r: $E = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ diremos que el área de E es $n \cdot r^2$.

Es fácil ver que esta área está bien definida, es decir, no depende de la descomposición en cuadrados (para probarlo, dadas 2 descomposiciones, se considera una tercera que refina a ambas).

Un conjunto E que admite una descomposición de este tipo será llamado *Dominio Fundamental.*

Observación 2.2. Los resultados de ésta sección valen para conjuntos en n-dimensiones ($n \geq 1$), definiendo Dominios Fundamentales como descomponibles en un número finito de intervalos, cuadrados, cubos o hipercubos, dependiendo de la dimensión; con lo cual se construye una medida de Jordan para n-dimensiones, la cual depende fuertemente de n: el cuadrado unitario tiene medida de Jordan plana 1, pero inmerso en E^3 su medida de Jordan es 0.

Definición 2.3. Diremos que un conjunto F del plano es acotado cuando existe algún círculo que lo contiene.

Definición 2.4. Sea F un conjunto acotado del plano. Descompongamos el plano mediante paralelas a los ejes en cuadrados de lado r.

El conjunto E formado por aquellos cuadrados incluidos en F es un dominio fundamental contenido en F.

Variando r, obtenemos una familia U de dominios fundamentales contenidos en F.

Como todas sus áreas están uniformemente acotadas (por el área de un cuadrado que contenga a F) sabemos que existe $\sup\limits_{E \in U} \text{area}(E)$. Llamemos a éste valor *medida interior de Jordan* de F y denotémoslo $m^i(F)$.

Análogamente, si consideramos los dominios fundamentales $E \cup E'$ formados tomando de un reticulado de lado r aquellos cuadrados que tengan algún punto en común con F, variando r obtenemos una familia V de dominios fundamentales que contienen a F (fueron escritos de esta forma pues parte de ellos es un $E \in U$).

Por ser las áreas no-negativas, existe $\inf_{E \cup E' \in V} \text{area}(E \cup E')$, llamemos a este valor: *medida exterior de Jordan de* F y denotémoslo $m^{\theta}(F)$.

Como cada elemento de V contiene a cualquiera de los elementos de U tenemos:

$$E_i \in U, E_j \cup E_j' \in V \Longrightarrow E_i \subset F \subset E_j \cup E_j' \Longrightarrow \text{area}(E_i) \leq \text{area}(Ej \cup E_j') \tag{2}$$

En esta afirmación estamos usando el hecho de que $D = (E_j \cup E_j') - E_i$ tiene área positiva: pero observemos que D puede no ser un dominio fundamental. De todos modos como D siempre puede descomponerse en rectángulos de lados paralelos a los ejes se llega igual a (2).

Por simplicidad vamos a cambiar la definición y llamar dominio fundamental a aquel que es unión finita de rectángulos (de lados paralelos a los ejes). Puede verse sin mucho trabajo que tomando el supremo y el ínfimo sobre las familias de dominios fundamentales de este nuevo tipo contenidos y que contengan a F, respectivamente, no se alteran los valores $m^i(F)$ y $m^{\theta}(F)$, sea cual sea F.

De (2) se sigue que:

$$\sup_{E \in U} \text{area}(E) \leq \inf_{E \cup E' \in V} \text{area}(E \cup E') \text{ o sea: } m^i(F) \leq m^{\theta}(F) . \tag{3}$$

También puede probarse que el valor $m^i(F)$ es exactamente el límite cuando r tiende a 0 de las áreas de los dominios fundo E_r antes considerados:

$$\lim_{r \to 0} \text{area}(E_r) = \sup_{r>0} \text{area}(E_r) = m^i(F) . \tag{4a}$$

Similarmente:

$$m^{\theta}(F) = \lim_{r \to 0} \text{area}(E_r \cup E_r') = \inf_{r>0} \text{area}(E_r \cup E_r') \tag{4b}$$

(ver [Jo] y [Le4]).

Definición 2.5. Diremos que un conjunto plano F es Medible Jordan cuando

$$m^i(F) = m^{\theta}(F) \tag{5}$$

A este valor común lo llamaremos Medida de Jordan de F y lo denotaremos $m(F)$.

De (4a) y (4b) tenemos que F es medible Jordan si y sólo si:

$$\lim_{r\to 0} \text{area}(E_r) = \lim_{r\to 0} \text{area}(E_r \cup E'_r) = \lim_{r\to 0} \text{area}(E_r) + \lim_{r\to 0} \text{area}(E'_r)$$

Es decir que F es medible si y sólo si:

$$\lim_{r\to 0} \text{area}(E'_r) = 0 \tag{6}$$

Por definición de E_r y $E_r \cup E'_r$ es claro que E'_r es un dominio fundamental que contiene a la frontera de F: $\text{Fr}(F)$. Luego (6) equivale a decir que

$$m^{\theta}(\text{Fr}(F)) = 0 \tag{7}$$

De (3) concluimos que $m(\text{Fr}(F)) = 0$.

En resumen: F es medible Jordan si y sólo si $\text{Fr}(F)$ tiene medida exterior (y medida) de Jordan cero.

Muchos de los ejemplos que veremos a continuación son de dominios. Por lo tanto, definamos:

Definición 2.6. Una curva es el conjunto de puntos (x, y) descrito por las funciones continuas: $x = f(u)$, $y = g(u)$ donde u recorre el intervalo $[0, 1]$.

Una curva se dirá cerrada si a 0 y 1 les corresponde el mismo punto y abierta en caso contrario.

Cuando no existen dos valores distintos del parámetro u (excepto quizás 0 y 1) a los cuales les corresponde el mismo punto la curva se dice simple o de Jordan.

Teorema de la Curva de Jordan: *Sea γ una curva simple cerrada en el plano E^2. Luego $E^2 - \gamma$ puede ser escrito, y de manera única, como la unión disjunta de dos regiones I y G tales que I es acotada y simplemente conexa* (o sea "sin agujeros"), *γ puede contraerse a cualquier punto de $I \cup \gamma$ y la frontera de I y de G es γ. A la región I la llamaremos interior de γ.*

Definición 2.7. Llamaremos dominio a un conjunto formado por una curva simple cerrada y su interior.

Veremos luego ejemplos de dominios que no son medibles Jordan, o sea (por (7)) que la curva simple γ que lo rodea tiene medida exterior de Jordan positiva (sección 4).

El siguiente Teorema se prueba sin gran dificultad partiendo de la definición de Medida de Jordan:

Teorema 2.8. *Sean R y S dos dominios medibles Jordan que se intersectan solo en puntos de la frontera de ambos (o no se intersectan). Entonces $R \cup S$ es medible Jordan y vale:*

$$m(R \cup S) = m(R) + m(S)\,. \tag{8}$$

Otro resultado fundamental es el siguiente:

Teorema 2.9. *Sean $R \subset S$ dos dominios medibles Jordan. Entonces $S - R$ es medible Jordan y vale:*

$$m(S - R) = m(S) - m(R)\,.$$

Nota. La definición de área dada por Cantor (1884) [Ca] coincide con la de medida exterior de Jordan, nada más que cubre la figura con círculos centrados en los puntos de la misma (en lugar de con cuadrados o rectángulos) y hace que el radio de éstos tienda a 0. El problema principal de tomar m^θ como definición de área es que ésta no es aditiva.

Ahora sí estamos en condiciones de ver algunos ejemplos de conjuntos medibles y no medibles Jordan:

(i) Rectángulos de lados paralelos a los ejes: Como ya se dijo considerar a los dominios fundamentales compuestos por rectángulos o por cuadrados no altera el valor de la medida de Jordan. De hecho es fácil ver que si consideramos sólo cuadrados, los rectángulos resultan medibles y su área da el valor esperado (base por altura). Esta identificación será utilizada de ahora en adelante sin más comentario.

(ii) Polígonos: Para probar que un polígono cualquiera es medible Jordan alcanza con verlo para triángulos, pues todo polígono es triangulable y se aplica el teorema 2.8 (generalizado a más de 2 dominios por inducción).

A su vez para probarlo para un triángulo arbitrario alcanza con verlo para triángulos rectángulos de catetos paralelos a ambos ejes. Esto sale de aplicar el teorema 2.9 al triángulo dado y al mínimo rectángulo de lados paralelos a los ejes que lo contenga: en efecto un tal rectángulo es medible Jordan y la diferencia entre este rectángulo y el triángulo dado es unión de tres triángulos rectángulos de catetos paralelos a los ejes (esta unión será medible Jordan por el teorema 2.8).

Sea ABC triángulo rectángulo en B, con catetos paralelos a los ejes. Considerando dominios fundamentales E y $E \cup E'$ contenidos y continentes, de tal forma que los lados AB y BC formen parte de ambos, vemos que para probar que el triángulo es medible basta con ver que el segmento AC posee medida exterior nula. Sea ℓ la longitud de AC. Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que cubrir AC con k cuadrados de lado δ tales que el área total sea menor que ε.

Cada cuadrado cubre un segmento de AC de longitud ℓ/k, luego el lado verifica $\delta < \ell/k$ y el área total verifica: $\delta^2 \cdot k < \ell^2/k$.

Tomando $k > \ell^2/\varepsilon$ obtenemos: área total $= \delta^2 \cdot k < \ell^2/k < \varepsilon$.

Luego el triángulo ABC es medible Jordan, y vamos a calcular su medida. Para ello consideramos el rectángulo $ABCD$ y probemos que $m(ABC) = m(ADC)$. Como $m(ABC) + m(ADC) = m(ABCD) = b \cdot h$, donde b y h son las longitudes de los catetos de ABC, queda $m(ABC) = b \cdot h/2$.

La igualdad $m(ABC) = m(ADC)$ surge simplemente del hecho de que si E es un dominio fundamental contenido en ABC (continente), aplicándole una simetría axial sobre el eje AC obtenemos un dominio fundamental contenido en ADC (continente), y recíprocamente. Por lo tanto $m(ABC) = m(ADC) = b \cdot h/2$.

(iii) Un conjunto no medible Jordan: Consideremos el conjunto G de los puntos del cuadrado unitario con ambas coordenadas racionales.

La medida interior de este conjunto es 0 pues no contiene ningún rectángulo.

Por otro lado, todo dominio fundamental E que contenga a G contendrá al cuadrado unitario I, pues si no fuera así $I - E$ sería un dominio fundamental y dentro de los rectángulos que lo forman habría puntos con ambas coordenadas racionales que no estarían cubiertos por E.

Es decir que: $m_i(G) = 0$ y $m^e(G) = 1$, por lo que G no es medible Jordan.

Invariancia de la Medida de Jordan respecto a las transformaciones rígidas.

Es sabido que en el plano 2 figuras son congruentes si y sólo si pueden superponerse mediante la aplicación de una transformación rígida; que será siempre composición de a lo sumo una rotación respecto a un punto prefijado, una traslación y una simetría axial. Nos proponemos demostrar el:

Teorema 2.10. *Sea T una transformación rígida del plano que transforma un conjunto medible Jordan R en $T(R)$. Entonces: $T(R)$ es medible Jordan y vale $m(R) = m(T(R))$.*

Demostración: Para el caso de traslaciones no hay nada que demostrar pues la imagen de un dominio fundamental es un dominio fundamental.

Consideremos el caso de una rotación, que puede suponerse respecto al origen de coordenadas. Como rotar la figura α grados equivale a rotar los ejes $-\alpha$ grados, el problema equivale a demostrar que si considero una figura R medible Jordan respecto a los ejes (x, y), también será medible Jordan respecto a otro par de ejes (z, w), coincidiendo ambas medidas.

Llamemos m_1 a la medida respecto a (x, y) y m_2 a la medida respecto a (z, w).

Necesitamos el siguiente:

Lema 2.11. *Dado un dominio fundamental E respecto a los ejes (x, y), es medible respecto a la medida de Jordan m_2 y tenemos: $m_1(E) = m_2(E)$.*

Como un dominio fundamental puede descomponerse en rectángulos y tanto m_1 como m_2 son aditivas (teorema 2.8), basta probar el lema para rectángulos de lados paralelos a los ejes (x, y).

Para un tal rectángulo G de base b y altura h tenemos: $m_1(G) = b{\cdot}h$.

Respecto a la medida m_2, como fue visto en el ejemplo 2, G es medible.

Para calcular $m_2(G)$, lo expresamos como unión y diferencia de triángulos como se ve en la figura (1), donde BF es paralelo al eje w.

De ésta forma queda:

$$G = ABE \cup BFC - EFD \tag{9}$$

Para probar que $m_1(G) = m_2(G)$ basta probar que m_1 y m_2 coinciden para éstos 3 triángulos, en virtud de los teoremas 2.8 y 2.9.

Probémoslo para ABE (para los otros 2 triángulos se prueba igual). Sea N el pie de la altura relativa a la hipotenusa. Como fue visto en el ejemplo 2: $m_1(ABE) = AE \cdot AB/2$.

Para calcular $m_2(ABE)$ descompongamos $ABE = ABN \cup AEN$. Estos 2 triángulos tienen sus catetos paralelos a los ejes (z, w), luego aplicando el ejemplo 2:

$m_2(ABN) = BN{\cdot}NA/2$ y $m_2(AEN) = EN{\cdot}NA/2$. Por aditividad:

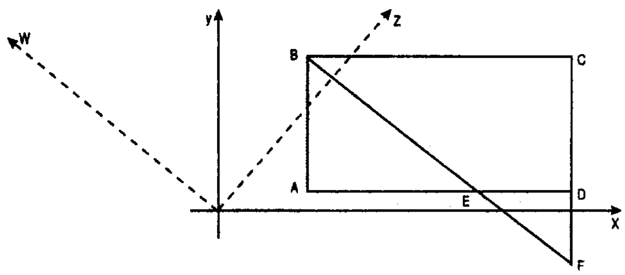

Figura 1

$$m_2(ABE) = NA \cdot (BN + EN)/2 = NA \cdot BE/2.$$

¿Cómo probamos que $m_1(ABE) = m_2(ABE)$?

La igualdad de ambas medidas se reduce por lo ya hecho a: $AE \cdot AB = NA \cdot BE$ y ésta igualdad se demuestra sin apelar a ninguna noción de área: Escrita como $AE/BE = NA/AB$ vemos que se deduce de la semejanza de ABE y NAB: El hecho de que éstos dos triángulos poseen ángulos iguales es trivial, de donde la proporción entre sus lados es, si se quiere, consecuencia del Teorema de Thales, como muestra la Figura (2).

Por lo tanto $m_1(ABE) = m_2(ABE)$, y como lo mismo sale para los otros triángulos en (9) queda: $m_1(G) = m_2(G)$, y luego las medidas coinciden para cualquier dominio fundamental respecto a los ejes (x, y).

$\frac{AE}{BE} = \frac{n}{m} = \frac{AN}{AB}$

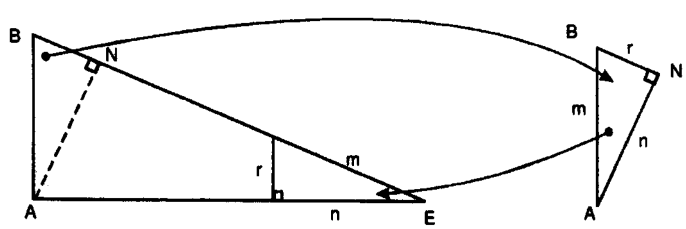

Figura 2

Prosigamos la prueba del teorema 2.10. De ahora en más, dado un dominio fundamental H respecto a m_1 o a m_2, aplicando el lema, denotemos al valor común de ambas medidas $m_{12}(H)$.

Sea R un conjunto medible respecto a m_1.

Sea $\varepsilon > 0$ y sean E y D dominios fundamentales respecto a m_1 contenido y que contiene a R tales que:

$$m_1(R) \geq m_{12}(E) > m_1(R) - \frac{\varepsilon}{4} \tag{10a}$$

$$m_1(R) \leq m_{12}(D) < m_1(R) + \frac{\varepsilon}{4} \tag{10b}$$

Como E y D son medibles según m_2 existe F dominio fundamental según m_2 contenido en E con:

$$m_{12}(E) - \frac{\varepsilon}{4} < m_2(F) \leq m_{12}(E) \tag{11a}$$

y un dominio fundamental L según m_2 que contiene a D con:

$$m_{12}(D) \leq m_2(L) < m_{12}(D) + \frac{\varepsilon}{4} \tag{11b}$$

De (10a), (10b), (11a) y (11b): $0 \leq m_2(L) - m_2(F) < \varepsilon$, como $F \subset R \subset L$ esto prueba que R es medible según m_2.

Además también sale de las fórmulas anteriores que: $0 \leq m_1(R) - m_2(F) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Aplicando la definición de medida interior de Jordan m_2^i tenemos: $m_1(R) = m_2^i(R)$ y como R es medible m_2: $m_1(R) = m_2(R)$.

Esto concluye la prueba para el caso de rotaciones. Faltan sólo las simetrías axiales, pero toda simetría axial puede descomponerse como una respecto a un eje a 45 grados compuesta con una rototraslación.

Luego sólo debe probarse para este caso, en el cual la invariancia de la medida se deduce trivialmente de que ésta simetría axial transforma dominios fundamentales en dominios fundamentales.

En virtud del resultado mencionado al comienzo de ésta sección, se desprende que:

Corolario 2.12. *Si A es un conjunto medible Jordan y B es congruente con A, entonces B también es medible Jordan y vale: $m(A) = m(B)$.*

Nota. Como ya fue mencionado en la introducción, el enunciado de este corolario (para áreas) junto con la aditividad del área (teorema 2.8) fueron usados como principios básicos para el cálculo de áreas a través de los siglos (junto con el método de exhaución). Partiendo de estos y otros principios básicos puede calcularse el área de una figura comparándola con otra de área ya conocida y probando que son equivalentes, es decir que pueden descomponerse en partes 2 a 2 congruentes.

Combinando los principios "el área del todo es mayor (o igual) que la de sus partes" (aquí se funden aditividad y no-negatividad del área) y "dadas 2 figuras sus áreas son o una mayor que la otra o iguales" los griegos introducen el método de exhaución, con el que calculan el área de un círculo aproximándose a éste por polígonos regulares inscritos y circunscritos. En realidad el proceso de asignarle un área consistía para ellos en decir que "un círculo posee igual área que un triángulo cuya base mide como el radio del círculo y su altura lo mismo que la circunferencia rectificada". Esta equivalencia se basaba en que el área de ambas figuras funcionaban como *elementi di separazione di una medesima partizione deflínsieme defle superficie poligonali*, —, sano *limiti di poligoni equivalenti* (U. Amaldi, Sulla teoría della equivalenza, 1925 [Am]), expresando por lo tanto la continuidad de la clase de magnitudes consideradas. Obsérvese la enorme similitud entre el método de exhaución y el de Jordan.

Entre los postulados para la igualdad de figuras (significando con iguales que poseen igual área), Euclides incluye, además de los ya mencionados, el siguiente: "Si a figuras iguales se le extraen figuras iguales, los restos son iguales" (teorema 2.9). Creyendo éste postulado innecesario y deducible de los demás Bolyai quiso probar que "Dadas 2 figuras congruentes con una parte en común, al quitar dicha parte se obtienen 2 figuras equivalentes", pero el procedimiento de subdivisiones sucesivas que ideara en general no termina y se prolonga indefinidamente.

Para polígonos, sin embargo, fue probado por diversos autores a fines del siglo pasado que "Dos polígonos de igual área siempre son equivalentes". O sea: "Dados 2 polígonos, o son equivalentes, o uno de ellos es equivalente a una parte del otro" (una parte propia, es decir que deja algún sub-polígono sin incluir). Mencionemos que el resultado análogo para poliedros no es cierto. (Para consultar sobre éstas cuestiones ver [Am]). □

2bis-Medida de un conjunto según Borel y Lebesgue

En ésta sección daremos una breve idea de las nociones de Medida de Borel y Medida de Lebesgue. Nos interesa la noción de conjunto de medida nula para aplicarla en secciones posteriores.

Como ya fue dicho, la Medida de Jordan se define para cualquier número de dimensiones en forma análoga a la expuesta.

En particular en la recta se obtiene un resultado similar al del ejemplo 3: El conjunto T de puntos racionales del intervalo $[0,1]$ tiene

$m^i(T) = 0$, $m^\theta(T) = 1$ y lo mismo vale para $Y = [0, 1] - T$, puntos irracionales del $[0, 1]$. Basándose en la Teoría de Cardinales Transfinitos de Cantor, por ser T un conjunto numerable y Y uno con la potencia del continuo, E. Borel se ve conducido a definir la Medida de Borel (Leҫons sur la théorie des fonctions, 1898) en la cual logra que ésta diferencia de cardinales se vea reflejada en el valor de la medida. En su construcción, Borel muestra que es natural asignar al conjunto T (ya cualquier otro conjunto numerable) medida nula. Su procedimiento difiere del de Jordan en el hecho de que ahora se consideran los cubrimientos del conjunto mediante una cantidad numerable de intervalos (o de cuadrados en el caso del plano) en vez de tomar sólo una cantidad finita de éstos en cada cubrimiento. Así se logrará medir más conjuntos no sólo por el simple hecho de haber ampliado la clase de "dominios fundamentales" a uniones numerables de intervalos sino porque ésta nueva clase permite una adaptabilidad al conjunto a medir que no existe en el método de Jordan: *Pour la mesure* J (Jordan) *on procéde de la même maniere pour tous les ensembles, ...Au contraire, pour la mesure* B (Borel) *on choisit une infinité dénombrable díntervalles qui sádaptent a Iénsemble donné, cést-a-dire que Ión choisit ces intervalles dápres les renseignements que ron a sur cet ensemble* [B01].

Así en el caso del conjunto T definimos los cubrimientos numerables de la siguiente forma. Numeremos los elementos de T de algún modo: (sabemos que es un conjunto numerable, luego puede ponerse en biyección con los números naturales, o sea escribirse como sucesión) $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Dado $\varepsilon > 0$, cubramos T por los siguientes intervalos: al elemento r_k lo cubrimos por un intervalo centrado en él de longitud $\varepsilon/2^k$, Luego T queda cubierto por una cantidad numerable de intervalos tal que la suma de sus longitudes es: $\sum_{i=1}^{\infty}(\varepsilon/2^i) = \varepsilon$. De aquí concluimos que, como T puede cubrirse por intervalos tales que la suma de sus longitudes es arbitrariamente pequeña, su medida no puede valer otra cosa que 0.

Este es, como dice Borel "El razonamiento intuitivo que da origen a la definición de la medida Borel". Un punto crítico a considerar es que hemos asumido que, dada una cantidad numerable de intervalos, que tienen posiblemente puntos interiores en común, la medida de la unión de todos ellos es menor o igual que la suma de las medidas individuales. Este hecho es de fácil demostración para el caso de un número finito de intervalos, pero en el caso de infinitos intervalos nos vemos obligados a enunciar el siguiente:

Postulado. La medida de un conjunto formado por una infinidad numerable de intervalos sin puntos comunes es igual a la suma de las longitudes de éstos intervalos.

De aquí surge que, en general, la medida de una cantidad numerable de conjuntos medibles disjuntos es igual a la suma de las medidas de éstos. Una medida con ésta propiedad se llama σ-aditiva. A partir de ésta propiedad es evidente que todo conjunto numerable tiene medida nula. La recíproca no es cierta ni siquiera en la recta, como puede verse descomponiendo trivialmente el complemento del conjunto ternario de Cantor en intervalos cuya suma de longitudes es 1, a pesar de lo cual puede verse que el conjunto ternario de Cantor tiene el cardinal del continuo (el conjunto ternario de Cantor es lo que queda del intervalo $[0, 1]$ después de extraerle el tercio central, y los tercios centrales de los intervalos que quedan, y así sucesivamente. El conjunto extraído tiene medida: $1/3+2/9+4/27+\cdots = 1$). De esta forma Borel logra extender su medida a los llamados Conjuntos Borelianos, que son aquellos que pueden obtenerse por aplicación reiterada un número finito o infinito numerable de veces de las operaciones de unión, intersección o complemento a partir de intervalos. Puede verse que todos los conjuntos abiertos (tales que todos sus puntos son interiores) y cerrados (tales que contienen a su frontera) son borelianos.

Es de fundamental importancia dentro de la teoría de la medida, la válidez del *Teorema de Heine-Borel-Lebesgue. Sea E un conjunto cerrado y acotado en E^n y sea ϑ una familia de abiertos que cubren E. Entonces puede extraerse de ϑ una sub-familia finita V tal que E es cubierto por los abiertos de ésta.*

La propiedad establecida por éste teorema se llama *compacidad.*

Consideremos dominios fundamentales con el agregado de que los rectángulos que los forman (siempre una cantidad finita) puedan ser abiertos, cerrados o semiabiertos (que incluyen sólo algunos de sus 4 lados): con el teorema anterior sale fácilmente que:

Teorema 2.13. *Si A es un dominio fundamental y (A_n) es una familia finita o numerable de dominios fundamentales tales que: $A \subset \cup A_n$, entonces:*

$$m(A) \leq \sum m(A_n)$$

(donde m denota la medida de Jordan, o sea el área para dominios fund.)

Lo que muestra como el Teorema de Heine-Borel-Lebesgue es esencial a la hora de mostrar que para uniones numerables valen ciertas propiedades que son triviales en el caso finito.

Medida de Lebesgue de un conjunto acotado en E^n

Daremos la definición para el plano, siendo idéntica en otras dimensiones.

Como trabajaremos con conjuntos acotados puede suponerse sin pérdida de generalidad que el conjunto a medir está contenido en el cuadrado unitario.

Nuevamente, cuando digamos rectángulo, el mismo podrá ser cerrado, abierto o semiabierto.

Retomando la idea de cubrir un conjunto mediante una familia finita o numerable de rectángulos definamos:

Definición 2.14. Se llama *medida superior de Lebesgue* $\mu^*(A)$ del conjunto A al número

$$\inf_{A \subset \cup P_k} m(P_k),$$

donde el ínfimo se toma respecto a todos los cubrimientos de A por medio de familias finitas o numerables de rectángulos.

Definición 2.15. Se llama *medida inferior de Lebesgue* $\mu_*(A)$ del conjunto A al número:

$$1 - \mu^*(I - A)$$

donde I es el cuadrado unitario.

Aplicando el teorema 2.13 (y la definición de supremo) se prueba fácilmente que

Proposición 2.16. *Para todo conjunto A se tiene $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$.*

Definición 2.17. Un conjunto A se dice *Medible Lebesgue* cuando: $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. El valor común $\mu(A)$ de las medidas superior e inferior se llamará *medida de Lebesgue* de A.

Se sigue por lo tanto que un conjunto posee Medida de Lebesque nula, cuando su medida exterior de Lebesgue es cero, o sea que podemos cubrirlo con una familia numerable de rectángulos tal que la suma de las áreas de los mismos sea tan pequeña como se desee (como en el ejemplo de los puntos racionales). Los conjuntos medibles Lebesgue forman una clase más amplia que los medibles Borel, siendo para éstos últimos ambas nociones de medida equivalentes. Además "Dado cualquier conjunto A medible Lebesgue existen 2 borelianos $G_\delta \supset AsupsetF_\sigma$, tales que estos 3 conjuntos tienen igual medida".

Es decir que los conjuntos medibles Lebesgue también son cerrados bajo la aplicación reiterada en número finito o infinito numerable de uniones, intersecciones o complementos, pero, mientras que la aplicación de éstas operaciones a partir de intervalos da por definición la totalidad de los conjuntos borelianos, estas operaciones no permiten agotar la clase de los conjuntos medibles Lebesgue.

El carácter constructivo de la definición de Borel la hace muy útil del punto de vista práctico, mientras que la generalidad de la definición de Lebesgue hace que ésta tenga un gran interés teórico.

Remarquemos que todo conjunto medible Jordan es medible Lebesgue, y ambas medidas coinciden. La recíproca es evidentemente falsa.

Sin embargo, aún en la recta, existen conjuntos acotados no medibles Lebesgue. Los ejemplos que se conocen dependen de la utilización del Axioma de Elección (o alguno de los postulados que le son equivalentes). Las propiedades de éstas medidas pueden consultarse en [KF, RP] y [Ru].

3 Curvas Rectificables, Fractales y Medida de Jordan.

Dada una curva plana veremos que, aún siendo acotada, la misma puede o no tener "longitud finita". Para precisar definamos lo que entendemos por longitud de una curva:

Definición 3.1. Sea α una curva acotada de extremos A y B (los cuales coinciden en el caso de una curva cerrada). Consideremos la familia F de todas las poligonales que van de A a B y están inscriptas en la curva. Cuando existe el número: $\sup_{P\in F} \text{longitud}(P)$, decimos que la curva α es rectificable, y llamamos longitud de α al valor de dicho supremo.

Tomando las poligonales P_δ, las cuales se forman uniendo con segmentos a partir de A puntos sobre la curva cada uno a distancia δ del anterior, y tomando el límite cuando δ tiende a 0, puede verse que para curvas rectificables dicho límite nos da la longitud de la curva. (ver [RP]).

Lebesgue da ([Le3]) una definición equivalente, pero que le sirve para poder definir por analogía el área de una superficie curva (como veremos más adelante), que consiste en la siguiente observación: Si se toma una sucesión de poligonales que tienden uniformemente a una curva α, no necesariamente inscritas, el límite inferior de sus longitudes da un valor s no necesariamente igual a la longitud de la curva (como en la famosa paradoja de que la diagonal de un cuadrado mide el doble del lado), pero siempre se tendrá: $s \leq$ longitud(α). Luego define la longitud de la curva como el ínfimo de todos los límites inferiores de las longitudes de sucesiones de poligonales uniformemente convergentes a la curva.

Una curva será rectificable en particular si es regular, es decir que admite una parametrización con funciones continuas con derivadas parcialmente continuas, y su longitud puede expresarse como la integral del diferencial de arco. Más generalmente, una curva será rectificable si y sólo si cualquiera de sus representaciones analíticas es de variación acotada (criterio de Jordan, ver [RP]).

Otra forma de calcular la longitud de una curva rectificable aparece en los trabajos de Minkowski: Consideremos la superficie S_ε formada por todos los círculos de radio ε centrados en puntos de la curva, la cual es una franja de espesor 2ε alrededor de la misma. Minkowski define ([Mi]) la longitud de la curva como:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \text{area}(S_\varepsilon)/2\varepsilon$$

(Una definición simplificada para curvas con normal en todos sus puntos se encuentra en [Ch]).

Dada una curva, consideremos, como hicimos para la definición de medida de Jordan, un cuadriculado del plano en cuadrados de lado δ y llamemos E_δ a la unión de aquellos cuadrados que tocan a la curva, formado por $N(\delta)$ cuadrados de lado δ. E_δ puede pensarse también como una franja que rodea a la curva, de espesor δ, y si calculamos el valor: $\lim \text{area}(E_\delta)/\delta(\#)$, obtenemos, análogamente a lo hecho por Minkowski, la longitud de la curva.

El límite anterior puede expresarse, usando área $(E_\delta) = N(\delta) \cdot \delta^2$, como:

$\lim\limits_{\delta \to 0} N(\delta) \cdot \delta$, que no es otra cosa que el límite de las longitudes de las poligonales inscritas de lado δ cuando δ tiende a 0 y luego coincide con la primera definición dada. Esto es así si asumimos el hecho intuitivamente evidente de que para δ suficientemente pequeño el valor $N(\delta)$ (cantidad de cuadrados de lado δ necesarios para cubrir la curva) se asemeja a la cantidad de lados del polígono inscrito de lado δ (los 2 valores se relacionan debido a que un cuadrado de lado δ tiene diámetro

$2^{1/2} \cdot \delta)$.

Por otro lado, si α es una curva rectificable el límite (#) será finito y en consecuencia tendremos: $\lim_{\delta \to 0} \text{area}(E_\delta) = \lim_{\delta \to 0} N(\delta) \cdot \delta^2 = 0$, y este límite, como ya fue visto en la sección 2, es la medida exterior de Jordan de α. Es decir que tenemos que:

Teorema 3.2. *Toda curva rectificable tiene medida de Jordan nula. y por lo tanto: Todo dominio cuya frontera es una curva rectificable es medible Jordan.*

Curvas fractales.

Como recién mostramos, escribiendo los correspondientes límites, del hecho de que una curva tenga longitud finita se deduce que su "área" es cero. ¿Podemos obtener resultados similares para (algunas) curvas no rectificables? Para ello precisamos definir la Dimensión de Hausdorff–Besicovitch o Dimensión Fractal de una curva. Para simplificar la notación, usaremos el símbolo $\rightarrow$ para indicar que se está tomando el límite de una expresión cuando la variable δ tiende a 0. Para una curva rectificable $N(\delta) \cdot \delta \rightarrow L_0$ es su longitud.

Por lo tanto si intentamos asociar un área a ésta curva tenemos $N(\delta) \cdot \delta^2 \rightarrow A = 0$. Más aún, la única medida significativa de una curva rectificable es su longitud, el límite de $N(\delta) \cdot \delta^k$ será 0 para todo exponente mayor que 1 e infinito para todo exponente menor que 1.

Similarmente para una superficie suficientemente regular calculamos el área como:

$N(\delta) \cdot \delta^2 \rightarrow A_0$, donde A_0 es el "área" (medida exterior de Jordan) de la superficie. Si intentamos asociar un volumen a ésta superficie cubriéndola con cubos tenemos: $N(\delta) \cdot \delta^3 \rightarrow V = 0$, como era de esperarse. Por último, al menos formalmente, podemos asociar una longitud a la superficie con la fórmula:

$$N(\delta) \cdot \delta \rightarrow L = \infty$$

El único valor útil que obtuvimos para una superficie es su área.

En general, una curva que no sea rectificable cumplirá un rol intermedio entre una curva y una superficie.

Por un lado $N(\delta) \cdot \delta$ diverge por no ser rectificable. Por otro lado (en la mayoría de los casos) la curva no tendrá área por lo cual $N(\delta) \cdot \delta^2$ tenderá a 0. En general existirá un exponente D entre 1 y 2 (que es fácil ver que es único) tal que $N(\delta) \cdot \delta^D$ converja cuando $\delta \rightarrow 0$ a un valor no nulo (por simplicidad suponemos que siempre existe un tal D), donde recordemos que $N(\delta)$ representa la cantidad de cuadrados de lado δ necesarios para cubrir la curva (o de lados del polígono inscripto de lado δ).

Llamaremos a éste exponente D Dimensión de Hausdorff-Besicovitch o Dimensión Fractal de la curva.

En algunos casos puede valer $D = 2$; que serán los casos donde la curva tiene "área".

En realidad la definición formal considera, para cada δ la familia F_δ de todos los cubrimientos finitos tales que están formados por cuadrados de lado no mayor que δ (no necesariamente todos del mismo tamaño). Si un tal cubrimiento está dado por los cuadrados $C_1, C_2, \ldots, C_t$ de lados: $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_t$ todos menores o iguales que δ, el valor a considerar es: $\sum_{i=1}^{t} \delta_i^D$ y se toma el ínfimo de éstos valores sobre todo F_δ; llamémoslo W_δ. Este número pasa a reemplazar al antes considerado $N(\delta) \cdot \delta^D$ ("área D-dimensional" del cubrimiento estándar en cuadrados de lado δ). Finalmente se considera el límite al tender δ a 0 de W_δ, el cual será finito y no nulo cuando D sea la Dimensión Fractal de la curva. En este caso al valor de éste límite se le llama *medida de Hausdorff.*

(D es el primer valor para el que el límite es no nulo, siendo el límite 0 para $d > D$ e infinito para $d < D$).

La dimensión topológica de un conjunto es lo que intuitivamente llamamos dimensión: un segmento tiene dimensión topológica 1, un cuadrado 2, etc. Este concepto es un "invariante topológico", es decir que si aplico una biyección continua a un conjunto, su imagen tendrá la misma dimensión que éste (este es un importantísimo resultado probado por Brouwer). Una consecuencia de esto es que una curva simple, por ser imagen continua biyectiva de un segmento (y luego, de dimensión 1), no puede llenar un área plana (de dimensión 2). Es decir que dado un círculo, por pequeño que sea, una curva simple no puede cubrirlo.

La "Curva de Peano" ([Pe3]), que llena todo un cuadrado, no es una curva simple, y no podría serlo, por este resultado.

La Dimensión Fractal que definimos antes para curvas, puede definirse para conjuntos de más dimensiones, y comparando ambos conceptos de dimensión puede verse que: Dimensión Topológica $(A) \leq$ Dimensión Fractal (A).

Definición 3.3. Una figura se dice fractal si su Dimensión Topológica es estrictamente menor que su Dimensión Fractal.

Para el caso de curvas queda entonces que una curva es fractal si su Dimensión Fractal es mayor que 1.

Ejemplo de Curva Fractal. Frontera de la Isla Triádica de Koch (von Koch, 1904). Para construir la Isla de Koch comenzamos con un triángulo equilátero de perímetro 1. La construcción prosigue dividiendo en tres partes cada lado, quitando el tercio central de cada uno y poniendo en su lugar los dos segmentos de longitud $1/9$ que forman triángulo equilátero con cada segmento extraído. Así obtenemos una curva de $3 \cdot 4 = 12$ lados de longitud $1/9$. La longitud de la misma es $L(1/9) = 12/9 = 4/3$. El paso siguiente consiste en aplicar el mismo procedimiento (en escala de $1 : 3$) a cada uno de los 12 lados (es decir quitarles su tercio central y sustituirlo por un triángulo equilátero), ver figura 3. Nos queda una curva de $N = 3 \cdot 4^2 = 48$ lados cada uno de longitud $\delta = 1/3^3 = 1/27$ y la longitud de la curva es $L(1/27) = 3 \cdot 4^2/3^3 = (4/3)^2$. Continuando éste procedimiento indefinidamente queda definida en el límite de éstas finitas iteraciones la curva frontera de la Isla Triádica de Koch (la intersección de la curva con cada lado del triángulo da el conjunto de Cantor).

La longitud en cada paso de la construcción está dada por: $L(\delta) = (4/3)^n$ donde $\delta = 1/3^{n+1}$ es la longitud de cada lado. Queda entonces $N(|delta) = L(\delta)/\delta = 4^n \cdot 3$.

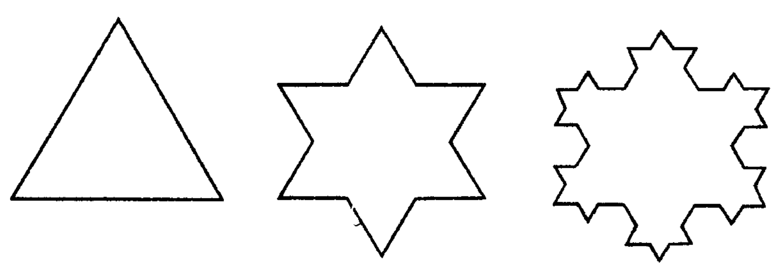

Figura 3

Para determinar la Dimensión Fractal debemos encontrar D tal que: $N(\delta) \cdot \delta^D$ converga a un valor no nulo cuando $\delta \to 0$ (o sea cuando $n \to \infty$). Esto equivale a pedir que: $\lim_{n\to\infty} 4^n \cdot 3/3^{(n+1)D}$ sea finito y no nulo. Sacando el factor constante 3^{1-D} queda: $\lim_{n\to\infty} (4/3^D)^n$, el cual será finito y no nulo si y sólo si: $4/3^D = 1$, o sea $D = \log_3 4 = \ln 4/\ln 3 = 1,2628\ldots$.

Así queda probado que la frontera de la Isla Triádica de Koch es un fractal de dimensión Hausdorff 1,2628.... y luego no es rectificable (por lo ya visto las curvas rectificables son exactamente aquellas de Dim. Hausdorff = 1).

Obsérvese que como $L(\delta) = (4/3)^n$, vemos en forma directa como la longitud es infinita. Por otra parte calculando el área de cada polígono en cada iteración y pasando al límite obtenemos la medida interior de Jordan de la Isla: $m^i(I) = A\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{4}{9} + \ldots\right) = A \cdot \frac{8}{5}$, donde A es el área de triángulo original.

Esta será la medida de Jordan de la Isla pues mostraremos que todo dominio rodeado por una curva de Dimensión Fractal menor que 2 es medible Jordan, o sea que las curvas de Dimensión Fractal menor que 2 tienen medida de Jordan nula.

Teorema 3.4. *Una curva plana tiene medida de Jordan* 0 *si y sólo si su Dimensión Fractal es menor que 2.*

Demostración: Sea α una curva plana con Dimensión Fractal $D < 2$. Es decir que si la cubro con $N(\delta)$ cuadrados de lado δ, $N(\delta) \cdot \delta^D$ converge a un valor no nulo m. Entonces $N(\delta) \cdot \delta^2 = \left(N(\delta) \cdot \delta^D\right) \cdot (\delta^{2-D}) \to m \cdot 0 = 0$, es decir que la medida exterior de Jordan de la curva es 0, y luego su medida de Jordan también . Recíprocamente si tengo una curva α de Dimensión Fractal 2, por definición: $N(\delta) \cdot \delta^2 \to m > 0$, es decir que la medida exterior de Jordan de α es positiva. Cabe aclarar que si además supongo que α es simple, no puede ser medible Jordan, pues su medida interior es necesariamente 0, debido a que por tener dimensión topológica 1 no puede contener a ningún cuadrado.

En un dominio delimitado por una curva fractal con dimensión fractal menor que 2, las áreas aproximadas $A(\delta)$ del dominio, obtenidas tomando los cuadrados de un cuadriculado de lado δ que cortan a la figura, y las longitudes aproximadas $L(\delta)$ de la curva, obtenidas con la poligonal de lado δ inscripta en la curva, satisfacen una relación que depende sólo de la forma y no de el tamaño, es decir que es igual para figuras semejantes. Esta relación sería la contraparte fractal de la relación de Euclides para figuras semejantes: "las áreas son proporcionales a los cuadrados de los perímetros" y es la siguiente: (ver la demostración en [Fe]).

Relación Perímetro-Área: La razón: $\rho_D = [L(\delta)]^{1/D}/[A(\delta)]^{1/2}$ da el mismo valor para 2 dominios semejantes con frontera de dimensión fractal $D < 2$.

Es decir que este valor no depende del tamaño de la figura (pero sí de δ). Para una exposición detallada de la teoría de fractales, ver los libros de Mandelbrot (Fractals: form, chance and dimension; 1977), Feder y Gleick ([Ma], [Fe] y [GI]). Mandelbrot fue quien acuñara el término "fractal" y enfatizó la gran posibilidad de aplicaciones a diferentes disciplinas científicas. La filosofía de Mandelbrot es que en muchos casos la geometría fractal explica mejor el mundo que nos rodea que la de Euclides, debido a que, si se los estudia en detalle, se ve que en realidad costas, nubes, el sistema circulatorio humano o las fluctuaciones del precio del algodón son ejemplos de fractales.

Tanto en los fractales que aparecen en la teoría (como la Isla Triádica de Koch) como en los recién mencionados ejemplos de la práctica, Mandelbrot hace hincapié en la propiedad de autosimilaridad. □

4 Dos ejemplos de dominios no medibles Jordan.

Construiremos dominios cuyas fronteras tengan medida exterior de Jordan positiva (curvas de dimensión fractal 2, con medida de Hausdorff positiva). Esta curva frontera, por ser simple y de dimensión topológica 1, tendrá medida interior de Jordan 0; con lo cual no sólo el dominio será no medible Jordan sino que su curva frontera también.

En términos de las medidas de Borel y Lebesgue sin embargo, tanto la curva como el dominio resultarán medibles. De hecho, ambos son cerrados y por lo tanto borelianos (ver sección 2 bis) y vale el siguiente teorema: (ver [RP]).

Teorema. *En E^N la medida de Borel de un cerrado coincide con su medida exterior de Jordan, y la de un abierto con su medida interior de Jordan.*

Por lo tanto nuestras curvas no medibles Jordan tendrán medida de Borel no nula igual a su medida exterior de Jordan. Dicho valor es también la medida de Lebesgue de la curva pues las medidas de Borel y Lebesgue coincide sobre los borelianos (la segunda es una extensión de la primera).

De ahora en más diremos que una curva con medida exterior de Jordan no nula tiene área, reflejando la no anulación de sus medidas Borel o Lebesgue.

Primer ejemplo (ver [RP]). La curva de Peano-Schoenflies es una curva no-simple (con infinitos puntos múltiples) que llena un cuadrado. Modificando su construcción vamos a obtener una curva simple que tiene área.

Describiremos a continuación una sucesión de poligonales cuyo límite uniforme será nuestra curva. Para comenzar tomemos un cuadrado de lado unitario y dividámoslo en 9 cuadrados iguales de lado $1/3$.

Distanciémoslos $1/3^2$ y formemos la poligonal 1 con una diagonal de cada cuadrado escogidas alternadamente, uniéndolas entre sí mediante segmentos, como muestra la figura 4a. En un segundo paso, dividamos a su vez cada uno de éstos 9 cuadrados en 9 cuadrados de lado $1/3^2$, y separémoslos análogamente una distancia $1/3^4$. Reemplazando cada diagonal que componía la poligonal 1 por una "reproducción en escala 1 : 3" de la poligonall, o por una tal reproducción pero de cabeza (dependiendo de la orientación de la diagonal) obtenemos la poligonal 2 (ver figura 4b).

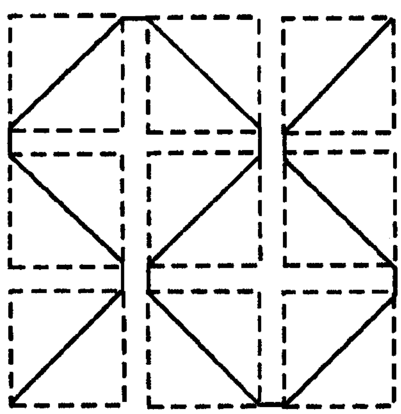

Figura 4a

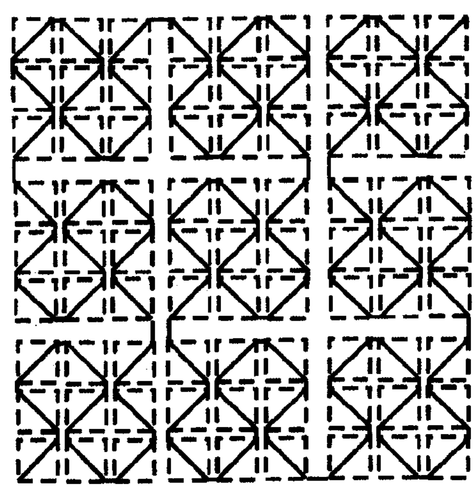

Figura 4b

Prosiguiendo de ésta forma, los cuadrados subsiguientes los separamos $1/3^6$, etc. De esta forma en el límite estas poligonales determinan una curva α, que tiene por extremos 2 vértices de una misma diagonal de un cuadrado cuyo lado, por el proceso de construcción visto, será:

$$1 + (2/3^2) + (2 \cdot 3/3^4) + (2 \cdot 3^2/3^6) + \cdots = 4/3$$

Para formar una curva simple cerrada, unimos los extremos A y B de la curva resultante por una quebrada isóceles APB, con P en la prolongación de la diagonal del cuadrado que no contiene a A y B.

En cada etapa, los cuadrados necesarios para obtener un cubrimiento de α forman una partición del cuadrado original, ~~por~~ lo que el área total del cubrimiento óptimo tiende a 1 a medida que el lado de los cuadrados considerados tiende a 0 (recorriendo las potencias negativas de 3). Vemos entonces que la medida exterior de Jordan de la curva es 1. Como ya se dijo la medida interior de Jordan de la curva es 0 y es medible Borel-Lebesgue con medida 1, es decir que la curva tiene área.

Resulta finalmente que el dominio bordeado por ésta curva y la quebrada APB es no medible Jordan.

Segundo ejemplo (ver [Os]). Este ejemplo se debe a W. Osgood (1903) y por ser la primer curva simple con área conocida suele llamarse a éstas curvas de Osgood en su honor.

Al igual que en el ejemplo anterior ésta curva une los extremos de la diagonal de un cuadrado en el que está contenida, pero la diferencia principal es que consideraremos un cuadrado I de lado 1 y no hará falta "expandirlo": la curva quedará dentro de éste cuadrado.

Llamemos A y B a los extremos de la curva. AB es una diagonal del cuadrado, prolongándola se divide el exterior del cuadrado en dos regiones que llamaremos C y D y pensaremos en ellas como agua y tierra.

Dividamos el cuadrado mediante canales y diques de ancho uniforme en 9 cuadrados iguales, estando los canales conectados con C y los diques con D, como muestra la figura 5a. Las fronteras comunes entre canales y diques (que en la figura aparecen remarcadas), a las que llamaremos puentes, constituyen 8 segmentos que pasarán a ser parte de la curva que estamos construyendo, la cual recorrerá los 9 cuadrados pasando de un extremo al "diametralmente" opuesto de una forma que quedará clara al final de la construcción, y saltando de un cuadrado al otro utilizando los puentes.

Para explicar como recorre la curva los 9 cuadrados procedemos en forma *recursíva*: cada uno de los cuadrados se divide a su vez mediante canales y diques de ancho constante de igual forma a como se dividió el cuadrado inicial en el paso anterior, pero en escala (en realidad la forma es la misma pero el ancho de canales y diques no debe reducirse en escala sino que será especificado más adelante), y cabeza para abajo cuando corresponda, como se ve en la figura 5b. Los puentes que aparecen los anexamos a la curva, quien en su recorrido va alternando cruces diametrales de cada uno de los 81 cuadrados con cruces de los $80 = 8 + 8 \cdot 9$ puentes. De las siguientes iteraciones del procedimiento se verá en que forma realiza la curva los mencionados cruces diametrales.

Los pasos siguientes de la construcción son completamente análogos a los 2 primeros: en cada paso se dividen todos los cuadrados que aparecen en 9 cuadrados mediante nuevos canales y diques, y los puentes (fronteras entre diques y canales) que conectan entre sí a estos cuadrados pasan a ser parte de la curva. Antes de seguir debemos especificar cual es el ancho de los canales y diques que aparecen en cada paso del procedimiento.

Para ello fijemos un número menor que $1/2$, digamos $1/5$, y convengamos que el ancho de los canales y diques en el primer paso debe ser tal que su área total sea $1/5$: es decir que el área total de los canales es $1/10$ y la de los diques también $1/10$. En el segundo paso el ancho se elige de tal forma que el área total de los nuevos canales y diques sea $1/10$ (de nuevo, la mitad de ésta área es canales y la mitad diques). En general, en cada paso el ancho se elige de tal forma que los canales y diques agregados tengan área total igual a la mitad de la de los agregados en el paso previo.

Iterando el procedimiento, en el n-ésimo paso la curva debe cruzar diametralmente cada uno de los 9^n cuadrados para ir de un puente al siguiente y no sabemos como se comporta la curva durante ese cruce. Pero a medida que n tiende a infinito el diámetro de éstos 9^n cuadrados tiende a 0, con lo cual la "zona de incertidumbre" del recorrido de la curva se transforma en una colección de puntos especiales los cuales tienen la característica de que tan cerca de ellos como se desee hay puentes (y son los únicos puntos del plano con ésta característica, salvo por los propios puntos de los puentes): éstos puntos son por lo tanto puntos de acumulación del conjunto formado por todos los puentes.

Nótese que la unión de todos los puentes no es una curva, en particular porque éste conjunto no es un cerrado (topológicamente). Ahora bien, si agregamos a éste conjunto sus puntos de acumulación logramos que sea cerrado, y como éstos son exactamente los puntos especiales de la curva (lo que queda de la "zona de incertidumbre") obtenemos una completa información de cómo está compuesta la curva y de cómo debe recorrerse. El procedimiento mediante el cual completamos la curva se asemeja a la completación de la recta numérica mediante la adjunción de los irracionales.

Se concluye así (ver [Os]) que la curva obtenida es una curva continua (por construcción) simple.

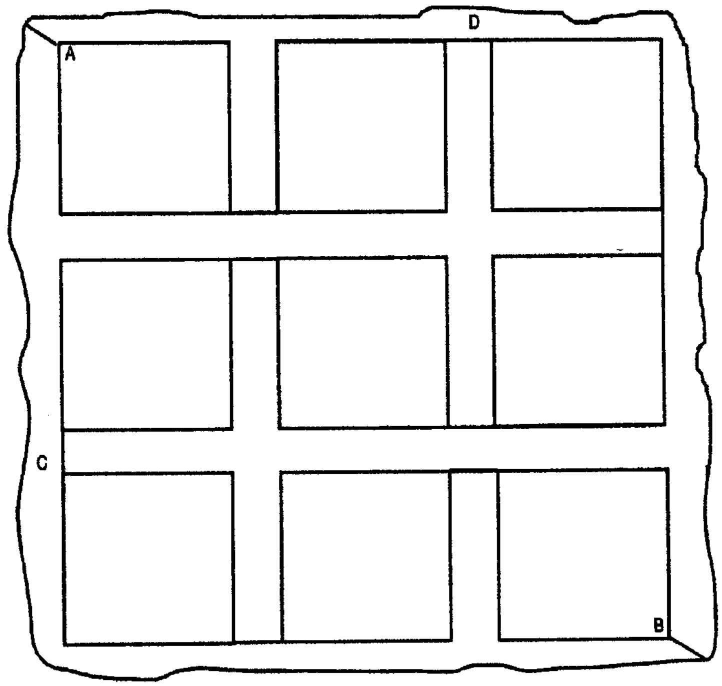

Figura 5a

Llamémosla γ y llamemos A y B a las regiones que son la unión de los infinitos canales y de los infinitos diques, respectivamente. Como para todo dominio fundamental E que contiene a γ, $I-E$ es un dominio fundamental contenido en $A \cup B$, y recíprocamente, tenemos:

$$m^{\theta}(\gamma) + m^{i}(A) + m^{i}(B) = 1 \,.$$

Pero $m^{i}(A)$ y $m^{i}(B)$ podemos calcularlos directamente. Recordando como fueron elegidos los anchos de canales y diques en los distintos pasos tenemos:

$$m^{i}(A) = m^{i}(B) = 1/10 + 1/20 + 1/40 + \cdots = 1/5 \,.$$

Nos queda entonces que $m^{\theta}(\gamma) = 1 - 2/5 = 3/5$, con lo cual hemos obtenido otro ejemplo de curva simple con área. Uniendo los extremos de la curva con una quebrada se tiene un dominio no medible Jordan.

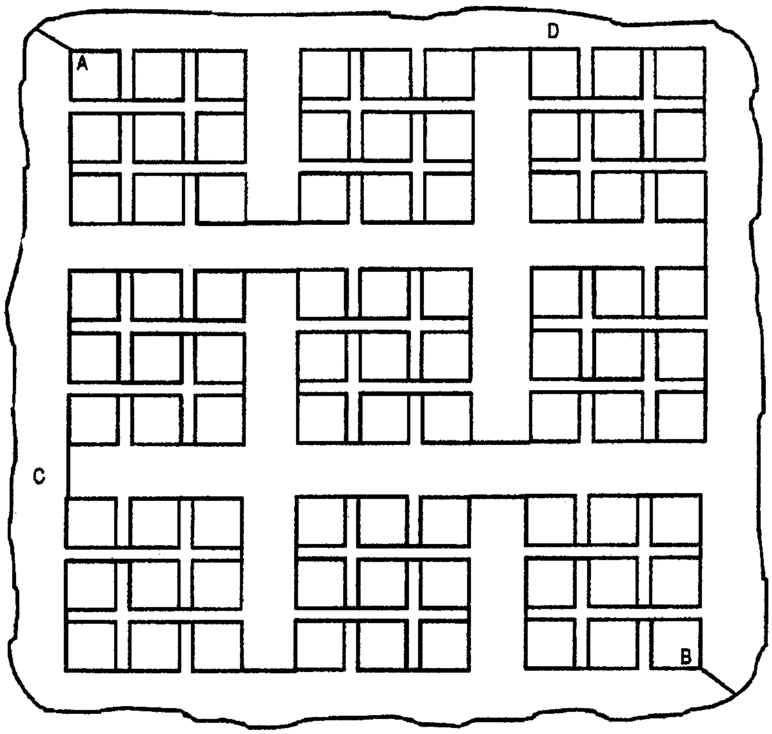

Figura 5b

Estructura de la frontera de un Dominio no medible Jordan.

Las curvas con área, o curvas de Osgood, recién expuestas, escapan un poco a nuestra "intuición geométrica", porque tienen medida de Lebesgue positiva a pesar de no llenar ninguna superficie debido a que tienen dimensión topológica 1. Más aún, vale el resultado más fuerte:

Teorema 4.1. *Sea α una curva simple y C un círculo del plano. Entonces no sólo $C - \alpha = N$ es no vacío, si no que: $\mu(N) > 0$ (μ denota medida de Lebesgue).*

Demostración: Razonando por el absurdo, supongamos que fuera $\mu(N) = 0$. Tomemos un punto cualquiera $x \in N$. Cualquier círculo centrado en x, por tener medida positiva, no puede ser llenado por N, y por lo tanto contiene puntos de α: si tomamos una familia de círculos centrados en x cuyos radios tiendan a 0 vemos entonces que tan cerca de x como se desee hay puntos de α, es decir que x es un punto de acumulación de α. Pero como α es un cerrado debe contener a sus puntos de acumulación, de donde $x \in \alpha$. De ésta contradicción resulta que $\mu(N) > 0$. □

Es decir que dado cualquier círculo del plano, por pequeño que sea, el área con que la curva lo intersecta es una fracción estrictamente menor que 1 del área del círculo. Pero eso no quita que dicha fracción puede tender a 1 a medida que el radio del círculo tiende a 0. De hecho esto es lo que ocurre en (muchos de) los puntos de una curva de Osgood. En general, para cualquier conjunto con medida de Lebesgue positiva, vale el siguiente resultado (que es un caso particular de un teorema de diferenciación para integrales de Lebesgue):

Teorema 4.2. *Sea E un conjunto con $\mu(E) > 0$. Existe un subconjunto N de E con $\mu(N) = 0$ tal que para todo $x \in E - N$ vale:*

$$\lim_{r \to 0} \mu(E \cap C_r)/\mu(C_r) = 1 \tag{12}$$

(donde C_r es el círculo de radio r con centro en x).

Observaciones. Una propiedad que vale en todos los puntos de un conjunto de medida positiva salvo en un subconjunto de medida nula se dice que vale en caso todo punto (c.t.p.). Un punto que verifica la fórmula (12) se llama punto de densidad del conjunto. EL teorema dice entonces: *Casi todos los puntos de un conjunto son puntos de densidad del mismo.* Para ver una prueba de este teorema y su relación con la descomposición de Calderón-Zygmund, ver [St], [GR] y [Ru].

Para casi todo punto de una curva α con área la situación es entonces la siguiente: Para cada r, tenemos (teorema 4.1): $\mu(\alpha \cap C_r)/\mu(C_r) < 1$, pero en el límite éstos cocientes tienden a 1 (teorema 4.2). Como en una curva simple todos sus puntos son puntos frontera, para explicar un poco más éste fenómeno veamos un ejemplo de puntos que son a la vez puntos de la frontera y puntos de densidad de un conjunto. Probemos primero el:

Lema 4.3. *Sea E un dominio cuya frontera es una curva derivable α. Entonces para los puntos de la frontera de E el límite (12) es igual a $1/2$.*

Demostración: Sea w un punto de la curva α. Tomemos un círculo C_r centrado en él y llamemos a_r y b_r a los puntos donde la circunferencia borde de C_r corta a la curva α. La superficie $E \cap C_r$ es bien aproximada si cambiamos el arco de α que la compone por la quebrada ar wb_r, porque las secantes a la curva convergen. Además como por dato la curva es derivable, ambas secantes (por izquierda una, por derecha la otra) tienden a la tangente en w, con lo cual para r suficientemente pequeño el ángulo que forman tiende a un llano, con lo cual el área de $E \cap C_r$ tiende a ser la de un semicírculo, quedando el valor deseado $1/2$ para el límite (12).

(Puede verse análogamente que en un punto donde existen derivadas laterales el límite (12) está dado por el ángulo entre las 2 tangentes, por ejemplo si éstas 2 fueran perpendiculares el límite da $1/4$ o $3/4$ dependiendo de si el dominio E está a uno u otro lado de la curva).

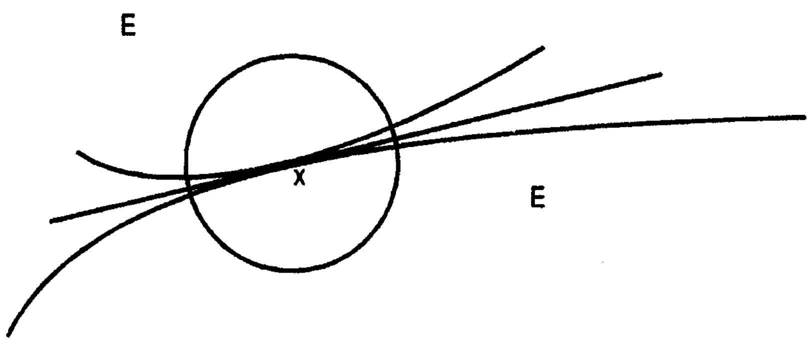

Figura 6

Construyamos ahora el ejemplo buscado tomando 2 curvas derivables, tangentes mutuamente en un punto x, en el cual una es cóncava hacia arriba y la otra hacia abajo. La superficie E que se obtiene removiendo del plano la región comprendida entre ambas curvas (ver figura 6) tiene a x como punto frontera y en él el límite (12) vale, en virtud del lema, $1/2 + 1/2 = 1$, es decir que x es un punto de densidad de E.

Aplicando éstas ideas a la curva de Osgood antes vista, obsérvese que los puntos de los puentes no son puntos de densidad de la curva: para un punto extremo de un puente, las $3/4$ partes de su "vecindad" son canales o diques donde no hay más puntos de la curva, y luego el límite (12) da como mucho $1/4$. Para los puntos de los puentes que no son extremos éste límite es obviamente 0. Por lo tanto (teorema 4.2) el conjunto formado por todos los puentes es un conjunto de medida nula. Es decir que el área que tiene la curva de Osgood la debe pura y exclusivamente a los puntos de acumulación que se adicionaron en la fase final, de hecho aún demoliendo todos los puentes resulta que el conjunto de éstos puntos de acumulación conserva la misma área que la curva: $3/5$. De nuevo aparece la analogía con la recta numérica: los racionales entre 0 y 1 tienen medida nula y sus puntos límite, los irracionales, son los que tienen la totalidad del área del segmento unitario: 1. La única utilidad de los puentes es la de conectar entre sí este conjunto de puntos con medida positiva sin cortarse unos a otros, y permiten así obtener una curva simple de área positiva. □

5 Área de una superficie curva según Minkowski y Lebesgue.

([Mi], [Ch], [RP], [Le2] y [Le3]). Las definiciones de área dadas por ambos pensadores son enteramente similares a sus respectivas definiciones de longitud de curva (sección 3). La definición de Minkowski es la siguiente:

Definición 5.1. Dada una superficie curva S la cubrimos con esferas de radio r centradas en cada punto de la misma y llamamos V_r al volumen del sólido formado. Llamaremos área de S al límite: $\lim_{r\to 0} V_r/2r$.

Esta definición se basa en que para r pequeño, para superficies calculables mediante integrales puede verse que el volumen de una "franja de ancho constante" $2r$ que envuelve a S difiere poco (en un infinitésimo de segundo orden) del valor de la superficie de S multiplicado por el espesor de la franja.

La definición de Lebesgue ataca en forma directa al problema creado por la paradoja de Schwarz. Este último había mostrado cómo construir una serie de triangulaciones de un cilindro (superficies poliédricas de caras triangulares inscritas en el cilindro) que convergen uniformemente a éste pero cuyas áreas no tienden al área del cilindro, incluso hay ejemplos tales que a medida que nos aproximamos al cilindro el área de las triangulaciones diverge (ver [Fe]). Por lo tanto una definición análoga a la definición clásica de longitud de curva es en éste caso inaceptable.

Por eso da Lebesgue su nueva definición para la longitud de curva (sección 3) la cual generaliza al caso de superficies curvas del siguiente modo:

Definición 5.2. Considérese la familia $\mathcal{F}$ de todas las sucesiones de poliedrales que convergen uniformemente a una superficie curva S (no necesariamente inscritas), y para cada tal sucesión $F \in \mathcal{F}$ tomemos el valor $A(F)$ igual al límite inferior de las áreas de las poliedrales en F. De esta forma definimos el área de S como: $A(S) = \inf_{F \in \mathcal{F}}(A(F))$.

Z. de Geocze había dado una definición similar (Comptes Rendus, 1907) pero restringiéndose a las poliedrales inscritas. ¿Porqué el interés de Lebesgue, tanto en el caso de curvas como en el de superficies, por incluir las aproximaciones mediante sucesiones no inscritas de poligonales y poliedrales?

Por un lado ciertas demostraciones le resultaban más fáciles pero por otro lado había un motivo de fondo que es que en la práctica, en experiencias concretas de medición, *un point ne peut etre distingué de ceux qui en sont suffisamment voisins*, ([Le3]) de donde resulta experimentalmente imposible considerar poligonales exactamente inscritas, y sin embargo trabajando con un apropiado orden de precisión las variaciones de los resultados pueden controlarse, por eso Lebesgue opta por una definición que *nous donne des valeurs approchées voisines quand on lápplique en utilisant les points voisins* ("estabilidad").

Criterios para la existencia del área según Lebesgue (finita) de una superficie curva en término de su representación explícita o paramétrica (como el Criterio de Jordan para curvas, sección 3) fueron dados por Tonelli, Radó y Cesari (ver [RP]).

6 Comentarios finales.

En términos de medida de Jordan pueden darse condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integrable Riemann. Además, introduciendo el concepto de función medible Jordan y de particiones admisibles puede definirse la integral de una función en términos de la medida de Jordan. Véanse para más detalle los artículos [Fr] y [G].

También fueron estudiadas caracterizaciones de la medida de Jordan. La caracterización más común la da el teorema: "Una función de conjunto m definida sobre todos los conjuntos medibles Jordan que es: no negativa, σ-aditiva, vale 1 sobre el cuadrado (cubo, hipercubo) unitario, y vale lo mismo sobre cualquier par de conjuntos congruentes (imagen uno del otro por una transformación rígida), es igual a la medida de Jordan".

En el artículo [JL] se prueba una versión más fuerte: El resultado subsiste si se exige a m sólo que sea no-negativa, σ-aditiva y que valga

1 sobre cualquier conjunto congruente al cuadrado (cubo, hipercubo) unitario.

Hoy en día son escasos los artículos que se escriben sobre la medida de Jordan pues la misma está considerada "mainly of historical interest" (ed. comment, Encyclopaedia of Math., 1988), pues es sólo una restricción de la medida de Lebesgue, la cual la ha "opacado con su brillo". Pero no por eso debemos pensar que las ideas detrás de la construcción efectuada por Jordan son hoy obsoletas: en algunos aspectos (como vimos en la sección 2bis) la idea de cubrimientos finitos es insuficiente e inadecuada y se ve superada por la de los cubrimientos infinitos más maleables que propone Borel. Pero esa misma idea de cubrimientos finitos de Jordan es la que, como se vio en la sección 3, luego de unos cuantos años de asimilación, le permitió a los matemáticos llegar a la noción de Dimensión de Hausdorff y de figuras fractales, temas actuales que son objeto de profundas investigaciones.

Es curioso ver como teorías más modernas y refinadas a veces pueden arrojar luz sobre otras que les anteceden. Así, como hicimos al final de la sección 4, resultó fructífero utilizar sin reparos técnicas avanzadas de la teoría de la integral de Lebesgue para intentar mejorar nuestra comprensión de figuras no medibles Jordan (las curvas con área de Osgood). En éste sentido podemos decir que a veces en la matemática se produce un proceso de retroalimentación.

Hay un último motivo que justifica que aún se estudie la medida de Jordan, que es en realidad una observación de carácter universal dentro de la matemática: El estudio de las ideas a través del proceso histórico de creación y generalización es tremendamente instructivo; en muchos casos sólo yendo a las raíces y viendo de cerca el nacimiento de las ideas, ubicadas en su contexto, logra uno captar a fondo el verdadero significado de las mismas. La fraternización de historia y matemática no obedece a fines sólo recreativos o divulgativos sino a la búsqueda de una comprensión más profunda de los temas estudiados.

Agradecimientos

Deseo agradecer a Virginia Balzano por la ayuda en el tipeado de este trabajo y a Juan Pablo Bauer por las ilustraciones.

Referencias

[Am] U. Amaldi, *Sulla teoría del la equivalenza*, Questioni riguardanti le matematiche elementari, F. Enriques (coord.), parte 1, vol. 2, N. Zanichelli Ed., 1925.

[BF] B. Budak, S. Fomín, *Multiple integrals, Field Theory and Series*, Ed. Mir, 1973.

[B01] É. Borel, *Éléments de la théorie des ensembles*, Ed. Albin Michel, 1949.

[B02] ———, *Méthodes et problemes de Théorie des Fonctions*, Gauthier-Villars, 1922.

[B03] ———, *El azar*, Ed. del Tridente, 1945.

[Ca] G. Cantor, *De la puissance des ensembles parfaits de points*, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen inhalts. Springer, 1932.

[Car] C. Carathéodory, *Über das lineare Marβ van Punktmengen - eine Verallgemeinerung des Langenbergriffs*, Gesammelte math. Schriften 4, Munich, Beck.

[Ch] O. Chisini, *Aree, lunghezze e volumi nella Geometria elementare*, en "Questioni...", F. Enriques, parte 1, vol. 2, N. Zanichelli, Ed., 1925.

[Fe] J. Feder, *Fractals*, Plenum Press, 1988.

[Fr] O. Frink Jr., *Jordan measure and Riemann integration*, Ann. Math. **34** (1933), 518–526.

[G] R. Gomes, *A noço de integral basada na medida a Jordan*, Gaz. Mat., Lisboa, **7** (29), (1946).

[Gl] J. Gleick, *Chaos. Making a New Science*, Penguin Books, 1988.

[Go] É. Goursat, *Cours dÁnalyse Mathématique* (Tome 1), Gauthier-Villars, 1927.

[GR] J. García-Cuerva, J. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland. 1985.

[Ha] F. Hausdorff, *Dimension und äußeres Maß*, Math. Ann. **79** (1919), 157–179.

[JL] ZS. Jakab, M. Laczkovich, *A characterization of Jordan an Lebesgue measures*, Colloq. Mathematicum, **XL** (1978), Fasc. 1, 39–52.

[Jo] C. Jordan, "Remarques sur les intégrales définies", Oeuvres, Tome 4, Gauthier-Villars, 1964.

[KF] A. Kolmogórov, S. Fomín, "Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional", Ed. Mir, 1975.

[Le1] H. Lebesgue, *Sur le probleme des aires*, Ouvres sc., Vol. IV.

[Le2] ———, *Sur la définition de Iáire des surfaces*, Ouvres sc., Vol. IV.

[Le3] ———, "Quelques remarques sur la définition de Iáire des surfaces", Ouvres sc., Vol. IV.

[Le4] ———, *Le ons sur Iíntégration et la recherche des fonctions primitives*, Chelsea, 1973.

[M] I. Major, *Nueva prueba de la invariancia de la medida de Jordan bajo transformaciones isométricas*, (en húngaro), Math. Lapok **29** (1977/81), (1-3), 157–160.

[Ma] B, Mandelbrot, *Fractals: form, chance and dimension*, W. H. Freeman, 1977.

[Mi] H. Minkowski, *Über die Begriffe Lange, Oberflache und Volume*, Gesammelte Abhandlungen, Chelsea, 1967.

[Mo] E. Moore, *On certain crinkly curves*, Trans, of the AMS **1** (1900), 72–90.

[Os] W. Osgood, *A Jordan curve of positive area*, Trans. of the AMS **4** (1903), 107–112.

[Pe1] G. Peana, *Sulla definizione dellárea dúna superficie*, Op. Scelte, Vol. 1, Ed. Cremonese, 1957.

[Pe2] ———, *Léssempio di Peana per dimostrare Iínesattezza del la definizione di Serret di area di una superficie curva* (Estrato), Op. Scelte, Vol. 1, Ed. Cremonese, 1957.

[Pe3] ———, *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane*, Op. Scelte, Vol. 1, Ed. Cremonese, 1957.

[Re] J. Rey Pastor, *Introducción a la Matemática Superior*, Bibl. Corona, 1916.

[RP] J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. Trejo, *Análisis Matemático* (Vol 1, 2 Y 3), Ed. Kapelusz, 1969.

[Ru] W. Rudin, *Análisis real y complejo*, McGraw-Hill, 1988.

[St] Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton U. P.

[We] K. Weierstrass, *Über continuirliche functionen eines reellen arguments, die für keinen werth des letzteren einen bestimmten differentialquotienten besitzen*, Math. Werke **11**, (1895), Mayer and Muller.