Miscelánea Matemática **57** (2013) 1–13 SMM

Relaciones entre lógica y topología: Un espacio compacto, Hausdorff y totalmente disconexo

José Alfredo Amor[†][*]

1. Introducción[1]

Los teoremas de correctud y de completud son considerados los resultados fundamentales de la lógica de primer orden, pues ellos establecen la equivalencia entre la noción de derivabilidad formal ($\vdash$) y la de consecuencia lógica ($\models$), esto es, entre la sintaxis y la semántica de un lenguaje formal. En sus versiones originales, estos teoremas establecen que toda fórmula que es teorema, es universalmente válida (correctud: «Si $\vdash \alpha$ entonces $\models \alpha$») y que toda fórmula universalmente válida, es teorema (completud: «Si $\models \alpha$ entonces $\vdash \alpha$»). Mientras que la correctud era un resultado conocido desde principios de los años veinte del

[*]Nota de la editora (Atocha Aliseda): Este artículo es una publicación póstuma de quien fuera nuestro querido amigo y colega José Alfredo Amor Montaño (1946–2011). A partir de dos dictámenes (*Miscelánea Matemática* quedó en espera de la versión final) y después de discusiones con algunos colegas sobre la estructura y contenido de este trabajo, preparé una versión que fuera lo más fiel al trabajo original, a la vez que atendiera las observaciones de los dictaminadores y que pudiera ser leída por un público lo más amplio posible dentro la comunidad matemática. Para tal efecto, preparé un apéndice (parcialmente tomando partes del material original y agregando otras más) con preliminares de topología y de lógica, presentando nociones muy básicas para el letrado en estas áreas pero desconocidas para el resto. La introducción corrió a cuenta mía, así como algunas notas y aclaraciones, casi todas ellas agregadas como pie de página. Agradezco a Carlos Bosch y a Ana Meda por su entusiasmo en ver este texto publicado en la revista, por su invitación a que yo lo editara y por su paciencia con mis tiempos. Asimismo mi reconocimiento y gratitud a Carlos Velarde por su minuciosa revisión y contribución con aclaraciones al texto original, así como con observaciones sobre mi edición al texto, sobre todo en la parte de topología.

[1]N. E. Esta sección está basada en [**1**], [**2**] y en [**3**].

siglo XX, la prueba de completud la ofrece Kurt Gödel en su tesis de doctorado en el año 1930. Como corolario del teorema de completud, Gödel prueba otro resultado, a saber, el teorema de compacidad, el cual establece lo siguiente: «Para que un conjunto infinito numerable de fórmulas sea satisfacible (tenga un modelo), es necesario y suficiente que cada subconjunto finito suyo sea satisfacible (tenga un modelo)».

Como es usual en el quehacer matemático, resulta atractivo tanto reformular teoremas como generalizarlos y demostrarlos de manera distinta. El teorema de compacidad extendido a lenguajes no numerables lo presenta Analoty Malcev en 1941 y Alan Robinson lo usa posteriormente en su desarrollo del análisis no estándar[2]. Por su parte, Leon Henkin ofrece en 1949 otra versión del teorema de completud extendida a consecuencias lógicas y deducciones formales (Si $\Sigma \models \alpha$ entonces $\Sigma \vdash \alpha$), aunque lo que prueba es una formulación equivalente donde relaciona las nociones de consistencia y satisfacibilidad, a saber: «Si S es un conjunto consistente, entonces S es satisfacible (tiene un modelo)» y da una prueba semántica constructiva que sentó las bases de la teoría de modelos como la conocemos hoy en día. La formulación de Henkin es más general que la original de Gödel y tiene la ventaja de que puede extenderse a lenguajes de cualquier cardinalidad e incluso de orden superior. Además, su prueba es más accesible. En este nuevo contexto, el teorema de compacidad se reformula como sigue: «Si un conjunto S es finitamente satisfacible (todo subconjunto finito de S es satisfacible), entonces S es satisfacible».

Esta versión del teorema de compacidad puede igualmente probarse como corolario del teorema de completud, pero lo novedoso de esta reformulación es que puede también probarse sin hacer uso de completud y mas aún, las pruebas de estos dos teoremas resultan ser del mismo estilo. Así, la demostración semántica del teorema de compacidad hace que se independice, por decirlo de alguna forma, del teorema de completud y con ello goce de un estatus superior al de corolario. Sin embargo, a pesar de que hay diversas presentaciones, aplicaciones y pruebas del teorema de compacidad, es difícil encontrarlo en libros de lógica como un teorema fundamental a la par con el de completud, aún cuando se aprecia que en su papel de teorema, es un resultado fundamental: «Es importante contar con una prueba independiente del de completud, porque en una parte considerable de la teoría de modelos, el teorema de compacidad es básico, pero el de completud no.» [**7**, p. 179]. Para José Alfredo Amor, el teorema de compacidad «puede considerarse, desde el punto de vista semántico, el teorema fundamental

[2] N. E.: *cf.* [**5**] y [**7**].

de la lógica matemática» [**2**, p. iii]. Este autor dedicó gran parte de su investigación a explorar la relación entre el teorema de compacidad y el teorema de completud, pero también se interesó en sus relaciones con otras áreas de la matemática y en aplicaciones en la propia lógica, en la teoría de conjuntos, en el álgebra, desde luego en la topología y en problemas como el de colorear mapas infinitos con cuatro colores o el lema de König que involucra a ramas infinitas en árboles de altura infinita *cf.* [**3**].

En el presente artículo, el interés se centra en el aspecto topológico del teorema de compacidad. En el lenguaje de la lógica matemática la palabra *compacidad* se importa de la topología, en donde lo que este teorema afirma es que cierto espacio topológico es compacto[3]. El resultado principal de este artículo es justamente mostrar el hecho de que el espacio de Stone definido con nociones lógicas semánticas sea compacto, es equivalente al teorema de compacidad para la lógica matemática de primer orden. Asimismo, mostramos que este espacio topológico es además Hausdorff y totalmente disconexo[4].

El artículo está dividido en tres partes. Seguida de esta introducción, la segunda parte contiene algunas nociones y resultados que relacionan a la lógica con la topología, como lo son el espacio topológico compacto y el propio teorema de compacidad. Asimismo, se presenta un espacio de Stone para el lenguaje de primer orden, además de un lema y una proposición, todo ello como antesala a la sección 3, donde se presenta el resultado principal y su demostración. Con la intención de hacer este artículo lo más accesible posible a un público educado en matemáticas pero no necesariamente familiarizado ni con la topología ni con la lógica, se ofrece al final un apéndice, mismo que está dividido en dos partes. La primera de ellas presenta algunos resultados básicos de topología y la segunda presenta algunos resultados básicos sobre lógica con explicaciones y demostraciones pertinentes para el lector no versado en estas materias.

[3]N. E.: Para aquellos lectores familiarizados con la topología, mencionamos que la prueba del teorema de compacidad puede hacerse usando el teorema de Tychonoff sobre productos topológicos (el teorema de Tychonoff afirma que el producto de toda colección de espacios topológicos compactos, es compacto).

[4]N. E.: En la literatura (e. g. [**8**]) se usa el término *totalmente separado* en lugar del término totalmente disconexo, el cual se aplica si todas las componentes de (X, τ) son conjuntos singulares. Estos conceptos son equivalentes cuando (X, τ) es Hausdorff y compacto (*cf.* [**8**, lema 29.6, p. 211]), por lo que para este artículo es indistinto que se use uno u otro término.

2. Lógica y topología

Lo primero que hay que conocer para apreciar el aspecto topológico del teorema de compacidad en la lógica de primer orden, es precisamente la caracterización de un espacio topológico compacto. Asimismo, presentamos la caracterización de un espacio de Stone para el lenguaje de la lógica de primer orden (L) y otro par de resultados clave para darle un sentido topológico a nuestras nociones lógicas[5] y así preparar el camino para la formulación de la equivalencia entre el teorema de compacidad para L y que el espacio de Stone para L sea compacto, objeto de la siguiente sección.

Proposición 1 (Espacio topológico compacto)**.** *Un espacio topológico (X, τ) es compacto sii toda colección $\{c_v\}$ de cerrados básicos de X que posee la propiedad de intersección finita, posee ella misma una intersección no vacía.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que (X, τ) es un espacio topológico compacto. Sea $\{c_v\}$ una clase cualquiera de cerrados básicos de X que posee la pif. Consideramos la clase $\{d_v\}$, tal que $d_v = X \setminus c_v$. Esta es una clase de abiertos de X y afirmamos que ninguna familia finita $\{d_i\}_{i=1}^n$ de $\{d_v\}$, puede cubrir a X (pues en caso contrario $X = \cup_{i=1}^n d_i$ y entonces $\emptyset = X \setminus X = X \setminus \cup_{i=1}^n d_i = \cap_{i=1}^n (X \setminus d_i) = \cap_{i=1}^n c_i \neq \emptyset !$) por ello y dado que X es compacto, $\{d_v\}$ no puede ser una cubierta de X, es decir $\cup_v d_v \neq X$, de donde $X \setminus \cup_v d_v = \cap_v (X \setminus d_v) = \cap_v c_v \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$) Supongamos que toda clase de cerrados básicos de X que cumple la pif, posee ella misma una intersección no vacía. Sea $\{G_v\}$ una cubierta de abiertos para X. Veamos que existe una subcubierta finita de $\{G_v\}$ para X. Tomando $c_v = X \setminus G_v$, tenemos una familia de cerrados $\{c_v\}$ donde $\cap_v c_v = \cap_v (X \setminus G_v) = X \setminus \cup_v G_v = X \setminus X = \emptyset$.

Consideremos ahora F una base para los cerrados de X. Para cada v existe $F_v \subseteq F$ tal que $c_v = \cap F_v$. Sea $G = \cup_v F_v$ entonces como $\cap G = \cap_v c_v = \emptyset$, G no cumple la pif por lo que hay una colección finita de cerrados básicos $d_1, \ldots, d_n \in G$ tal que $\cap_{i=1}^n d_i = \emptyset$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe v_i tal que $d_i \in F_{v_i}$. Entonces $\cap_{i=1}^n c_{v_i} \subseteq \cap_{i=1}^n d_i = \emptyset$. Así, $\cup_{i=1}^n G_{v_i} = \cup_{i=1}^n (X \setminus c_{v_i}) = X \setminus \cap_{i=1}^n c_{v_i} = X \setminus \emptyset = X$, entonces $\{G_{v_i}\}_{i=1}^n$ es una subcubierta finita de $\{G_v\}$ para X y X es compacto. □

Teorema 2 (de compacidad)**.** *Para cualquier lenguaje de primer orden L y para cualquier conjunto de enunciados Σ de L, si todos los subcon-*

[5] N. E.: Para las definiciones de los conceptos contenidos en las proposiciones que siguen, consulte el apéndice.

juntos finitos de Σ son satisfacibles (tienen un modelo), entonces Σ es satisfacible (tiene un modelo)[6].

En su versión sintáctica, este resultado es conocido como lema de finitud[7].

El espacio de Stone para L

Sea un lenguaje formal de primer orden L y sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las teorías completas y satisfacibles de L. Es decir:

$$\mathcal{S} = \{\mathrm{Teo}(A) \mid A \text{ estructura de } L\}.$$

Llamamos a los elementos $\mathrm{Teo}(A) \in \mathcal{S}$, los *puntos* de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S} \subseteq P(L)$ donde $P(L)$ denota el conjunto potencia del conjunto de todos los enunciados del lenguaje L.

Para cada enunciado $\varphi \in L$, consideramos el conjunto $[\varphi]$ de todas las teorías $\mathrm{Teo}(A)$ tales que φ es verdadero en A o equivalentemente, que φ pertenece a $\mathrm{Teo}(A)$. Es decir:

$$[\varphi] = \{\mathrm{Teo}(A) \in \mathcal{S} \mid \varphi \in \mathrm{Teo}(A)\}.$$

Obsérvese que si $T = \mathrm{Teo}(A)$, entonces: $T \in [\varphi]$ sii $\varphi \in T$. Esto es inmediato a partir de la definición de $[\varphi]$, pues si $\mathrm{Teo}(A) \in \mathcal{S}$, entonces $\mathrm{Teo}(A) \in [\varphi]$ sii $\varphi \in \mathrm{Teo}(A)$.

Lema 3. *Para todo enunciado φ del lenguaje L, $\mathcal{S} \setminus [\varphi] = [\neg\varphi]$.*

Demostración. Sea $\mathrm{Teo}(A) \in \mathcal{S}$. Entonces se cumple que: $\mathrm{Teo}(A) \notin [\varphi]$ sii $\varphi \notin \mathrm{Teo}(A)$ sii $\neg\varphi \in \mathrm{Teo}(A)$ sii $\mathrm{Teo}(A) \in [\neg\varphi]$. □

Proposición 4. *El conjunto $D = \{[\varphi] \mid \varphi$ es enunciado de $L\}$ es una base para cerrados y una base para abiertos de una topología sobre $\mathcal{S}$.*

Demostración. Usando la proposición 6, vemos que D es base de cerrados, porque:

i) $\cap D = \emptyset$, pues $\cap D \subseteq [\varphi] \cap [\neg\varphi] = [\varphi \wedge \neg\varphi] = \emptyset$.

ii) Dados cualesquiera $[\varphi]$, $[\psi] \in D$, $[\varphi] \cup [\psi] = [\varphi \vee \psi] = \cap\{[\varphi \vee \psi]\}$.

---

[6] Para formulaciones equivalentes, su demostración y aplicaciones del teorema de compacidad, véase [**3**, cap. 1 y 2].

[7] N. E.: Lema de finitud: $\Sigma \vdash_S \varphi$ si y solo si hay $\Gamma \subseteq \Sigma$, Γ finito, tal que $\Gamma \vdash_S \varphi$, donde S es un sistema axiomático y $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de fórmulas.

iii) $\mathcal{S} \in D$, pues $\mathcal{S} = [\varphi \vee \neg\varphi]$ para cualquier enunciado φ.

Por otro lado, usando la proposición 7 vemos que D es base de abiertos, porque:

i) $\cup D = \mathcal{S}$, pues $\mathcal{S} = [\varphi \vee \neg\varphi] = [\varphi] \cup [\neg\varphi] \subseteq \cup D$ y obviamente $\cup D \subseteq \mathcal{S}$.

ii) Si $[\varphi], [\psi] \in D$, $[\varphi] \cap [\psi] = [\varphi \wedge \psi] = \cup\{[\varphi \wedge \psi]\}$. □

Nótese que de hecho todos los $[\varphi]$ son cerriabiertos (tanto abiertos como cerrados), pues $\mathcal{S} \setminus [\varphi] = [\neg\varphi]$. El conjunto $\mathcal{S}$ con la topología τ dada por esta proposición, se llama el espacio de Stone para el lenguaje L.

N. E.: Este artículo puede verse como un magnífico e importante ejemplo de construcción de un espacio de Stone, en este caso para el lenguaje de primer orden con igualdad. Con más frecuencia, sin embargo, encontramos este concepto asociado a las álgebras booleanas[8].

Proposición 5. *$\langle \mathcal{S}, \tau \rangle$ es un espacio Hausdorff y totalmente disconexo[9].*

Demostración. Si $T, Q \in \mathcal{S}$, con $T \neq Q$, entonces hay un enunciado $\varphi \in T \setminus Q$, tal que $T \in [\varphi]$ y $Q \notin [\varphi]$, de donde $T \in [\varphi]$, $Q \in \mathcal{S} \setminus [\varphi]$ y $[\varphi]$ y $\mathcal{S} \setminus [\varphi]$ son abiertos. □

3. Teorema de compacidad y espacio de Stone compacto: equivalencia

Teorema. *El teorema de compacidad para L es equivalente a que el espacio de Stone $\langle \mathcal{S}, \tau \rangle$ para L, sea compacto.*

---

[8]N. E.: De acuerdo a la Wikipedia (en su entrada: "Stone's representation theorem for Boolean algebras" (mi traducción)): «Una de las versiones más simples del teorema de representación de Stone (para álgebras Booleanas) afirma que toda álgebra Booleana es isomorfa al álgebra de subconjuntos cerriabiertos ("clopen", aquellos que son tanto cerrados como abiertos) de su espacio de Stone $S(B)$.»

«Toda álgebra Booleana B tiene asociado un espacio topológico, denotado por $S(B)$ y al que llamamos su espacio de Stone. Los puntos en $S(B)$ son los ultrafiltros sobre B o de manera equivalente, los homomorfismos que van de B al álgebra Booleana de dos elementos.» Más adelante, veremos cuáles son los conceptos correspondientes en la lógica de primer orden.

[9]Ver nota 4.

Demostración. $\Rightarrow$) Usaremos la proposición 1: Sea $C = \{[\varphi]_v\}$ una colección de cerrados básicos de $\langle \mathcal{S}, \tau \rangle$ que posea la pif (*cf.* def. A.6). Considero $T = \{\varphi/[\varphi] \in C\}$. Entonces para cualquier subcolección finita $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de T, $[\varphi_1] \cap \cdots \cap [\varphi_k] \neq \emptyset$. Es decir, existe $\text{Teo}(A) \in [\varphi_1] \cap \cdots \cap [\varphi_k]$, de donde existe A tal que A es modelo de φ_i para toda $i = 1, \ldots, k$. Esto significa que cualquier subconjunto finito de T es satisfacible (tiene modelo). Entonces por el teorema de compacidad para L, T es satisfacible, digamos por un modelo B. Es decir, B es modelo de φ para toda $\varphi \in T$, de donde $\text{Teo}(B) \in [\varphi]$ para toda $\varphi \in T$, es decir, para toda φ tal que $[\varphi] \in C$, o sea que $\text{Teo}(B) \in \cap_v [\varphi]_v \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$) Suponemos que $\langle \mathcal{S}, \tau \rangle$ es compacto en el sentido de la proposición 1. Sea Σ un conjunto de enunciados de L tal que todo subconjunto finito es satisfacible. Considero $C = \{[\varphi]/\varphi \in \Sigma\}$.

Entonces para cualquier subcolección finita $[\varphi_1], \ldots, [\varphi_k]$ de C, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ tiene un modelo, digamos A. Es decir, A es modelo de φ_i para toda $i = 1, \ldots, k$ de donde $\text{Teo}(A) \in [\varphi_i]$ para toda $i = 1, \ldots, k$, o sea $\text{Teo}(A) \in [\varphi_1] \cap \cdots \cap [\varphi_k] \neq \emptyset$. Así pues, C cumple la pif (*cf.* def. A.6), por lo que $\cap C \neq \emptyset$ y hay una $\text{Teo}(B) \in \cap C$ de modo que $\text{Teo}(B) \in [\varphi]$ para todo $\varphi \in \Sigma$ o sea que B es modelo de φ para todo $\varphi \in \Sigma$, de donde B es un modelo de Σ. □

Corolario. *El espacio de Stone $\langle \mathcal{S}, \tau \rangle$ para L es compacto, Hausdorff y totalmente disconexo*[10].

El espacio de Stone $\langle \mathcal{S}, t \rangle$ es compacto por el teorema anterior y es de Hausdorff y totalmente disconexo por la proposición 5.

A. Apéndice

A.1. Preliminares de topología

Definición A.1 (Espacio topológico (X, τ))**.** Sea X un conjunto no vacío. Una clase τ de subconjuntos de X es una *topología* para X sii

i) La unión de cualquier número de elementos de τ, pertenece a τ.

ii) La intersección de cualquier número finito de elementos de τ, pertenece a τ.

iii) X y $\emptyset \in \tau$.

Al par (X, τ) se le denomina *espacio topológico.*

[10] Ver nota 4.

A los elementos de τ, se les denomina (conjuntos) *abiertos*. Un subconjunto C de X es cerrado si su complemento $X \setminus C$ es abierto. Sin embargo, nótese que un conjunto que no es abierto no es necesariamente cerrado y viceversa, un conjunto que no es cerrado no es necesariamente abierto. De esta manera, hay algunos conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez (e.g. $\emptyset$) y otros que no son ni uno ni lo otro.

Definición A.2 (Cubiertas)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $Y \subseteq X$ y sea $G = \{G_v\}$ un conjunto de subconjuntos de X, tal que $Y \subset \cup_v G_v$.

i) G es una *cubierta* de Y.

ii) Si todos los G_v son abiertos de τ, entonces G es una *cubierta abierta* de Y.

iii) Si además algún subconjunto finito de G es también una cubierta de Y, es decir, si $\{G_1, \ldots, G_n\} \subseteq G$, con n finito y tal que $Y \subseteq G_1 \cup \cdots \cup G_n$, entonces se dice que G es reductible a una *cubierta finita*.

Definición A.3 (Conjunto compacto)**.** Un conjunto $Y \subseteq X$ de un espacio topológico (X, τ) es *compacto* si toda cubierta abierta de Y es reductible a una cubierta finita.

Definición A.4 (Base para los cerrados)**.** Sea F el conjunto de los cerrados de un espacio topológico (X, τ). Decimos que un conjunto $D \subseteq F$ es una *base para los cerrados* de X sii todo cerrado C de X es intersección de elementos de D.

Proposición 6. *Sea $D \subseteq P(X)$, con $X \neq \emptyset$. D es una base para el conjunto de los cerrados de alguna topología de X sii*

i) $\bigcap D = \emptyset$.

ii) Dados cualesquiera $b, c \in D, b \cup c$ es intersección de elementos de D. Es decir, hay $B \neq \emptyset$, $B \subseteq D$, tal que $b \cup c = \bigcap B$.

iii) $X \in D$.

Definición A.5 (Base para los abiertos)**.** Si (X, τ) es un espacio topológico, un conjunto $B \subseteq \tau$, es una *base para los abiertos* de X, sii todo abierto $G \in \tau$ es unión de elementos de B.

Proposición 7. *Sea $D \subseteq P(X)$. D es base para alguna topología de X sii* *i)* $\bigcup D = X$.

ii) *Dados cualesquiera* $b, c \in D$, $b \cap c$ *es la unión de elementos de* D. *Es decir, hay* $H \subseteq D$, *tal que* $b \cap c = \bigcup H$.

Definición A.6 (Propiedad de intersección finita (pif))**.** Una clase $\{G_v\}$ de conjuntos, posee la *propiedad de intersección finita (pif)* sii toda subclase finita $\{G_{v_1}, \ldots, G_{v_n}\}$ de $\{G_v\}$ tiene intersección no vacía. Es decir $G_{v_1} \cap \cdots \cap G_{v_n} \neq \emptyset$.

Definición A.7 (Espacio de Hausdorff)**.** Un espacio topológico (X, τ) es *Hausdorff* sii para cada par de puntos $p, q \in X$, hay G, H abiertos ajenos, tales que $p \in G$ y $q \in H$.

Definición A.8 (Espacio totalmente disconexo)**.** Un espacio topológico (X, τ) es *totalmente disconexo*[11] sii para cada par de puntos $p, q \in X$, hay G, H abiertos ajenos cuya unión es X y tales que $p \in G$ y $q \in H$.

A.2. Preliminares de lógica

Definición A.9 (Lenguaje formal)**.** Un *lenguaje formal*[12] de primer orden con igualdad, denotado por L, está definido recursivamente a partir de dos tipos de símbolos.

1. Los símbolos lógicos que incluyen los conectivos: *no* ($\neg$), *y* ($\wedge$), *o* ($\vee$), *si ... entonces ...* ($\Rightarrow$), *si y solo si* ($\Leftrightarrow$); los cuantificadores: *para todo* ($\forall$) y *existe* ($\exists$); así como el símbolo de igualdad ($=$).

2. Los símbolos propios de cada lenguaje: símbolos de constante, símbolos de predicado y símbolos de función.

Un enunciado φ de L es una fórmula tal que todas sus variables (si las hay) están cuantificadas. Con Σ denotamos conjuntos de enunciados de un lenguaje L.

La semántica relaciona a los lenguajes formales con una interpretación para ellos. En nuestro caso, esta interpretación es un sistema constituido por un conjunto no vacío llamado universo de interpretación, además de las relaciones, operaciones y objetos distinguidos del conjunto[13]. El sistema completo se denomina *estructura conjuntis-*

[11] Ver nota 4.

[12] Esta definición puede verse en cualquier texto básico de lógica (e. g., [**5**, **9**]). También en estos textos puede verse la definición recursiva de fórmula.

[13] Los objetos se denominan distinguidos porque juegan un papel especial en la interpretación. Por ejemplo, el número cero juega el papel de elemento neutro de la suma en el universo de los números enteros.

ta algebraico-relacional o simplemente *estructura*[14]. Cada lenguaje de primer orden L determina a la clase de todas las estructuras que son interpretaciones para ese lenguaje. Cada símbolo del lenguaje debe tener un significado preciso en la estructura.

Definición A.10 (Interpretaciones)**.** Cada constante individual se interpreta como un elemento del conjunto universo. Cada predicado de aridad n[15] se interpreta como una relación $n-$aria entre elementos del universo. Cada símbolo funcional de aridad m se interpreta como una operación $m-$aria sobre el universo. Los símbolos lógicos: conectivos, cuantificadores e igualdad, tienen la interpretación clásica[16].

Definición A.11 (Verdad y modelo)**.** Cuando un enunciado φ es verdadero en una interpretación para su lenguaje, decimos que la interpretación es un *modelo* del enunciado. Un *modelo* para un conjunto Σ de enunciados es una interpretación para el lenguaje, respecto a la cual todos los enunciados del conjunto son verdaderos[17].

N. E.: Antes de proseguir, consideramos necesaria una aclaración terminológica. Los términos interpretación, estructura y modelo se usan de manera —más o menos— indistinta en la lógica de primer orden. Dado un lenguaje L, los modelos son estructuras (conjuntistas algebraico-relacionales), mismas que a su vez representan interpretaciones de un lenguaje L.

Definición A.12 (Fórmula lógicamente válida)**.** Una fórmula φ es *lógicamente válida* (universalmente válida) sii φ es verdadera en todas las interpretaciones del lenguaje L o lo que es lo mismo: Una φ fórmula es lógicamente válida sii toda estructura en el lenguaje L es modelo suyo.

Por ejemplo, en el lenguaje de la teoría de grupos, los enunciados que son los axiomas de grupo, tienen como modelo a cualquier estructura que sea un grupo. En el lenguaje de la aritmética, los axiomas de Peano tienen como modelo a la estructura de los números naturales $(\mathbb{N}, 0, s, <, +, *)$[18].

---

[14]Una estructura algebraico-relacional es una cuarteta $\mathbf{A} = \langle A, R, O, C\rangle$ donde A es un conjunto no vacío, R es un conjunto de relaciones sobre A, O es un conjunto de operaciones sobre A y C es un conjunto de elementos (distinguidos) de A.

[15]La aridad es un número entero positivo asociado al símbolo de predicado en el lenguaje y que indica el número de argumentos de la relación que lo interpreta.

[16]Por ejemplo, La interpretación clásica y natural para el símbolo de igualdad es la de relación identidad (*cf.* [**6**, p. 103]). Para una presentación detallada de la interpretación de los lenguajes de primer orden, referimos al autor a [**6**, p. 87].

[17]Las definiciones de verdad y modelo, pueden consultarse en [**5**] o en [**9**, cap. 2].

[18]Para más detalles, véase [**5**, p. 202].

En la lógica, se presenta la noción fundamental de *consecuencia lógica deductiva*: una fórmula φ es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Σ, si para cualquier interpretación, en caso de que todas las fórmulas del conjunto Σ sean verdaderas, entonces la fórmula φ es verdadera. Esta relación semántica se denota como $\Sigma \models \varphi$ y se lee: *φ es consecuencia de Σ ó Σ implica lógicamente a φ*. Obsérvese que esto significa que es imposible que haya una interpretación respecto a la cual todas las fórmulas del conjunto de fórmulas Σ sean verdaderas y la fórmula φ sea falsa; o bien, es imposible que haya un modelo de Σ que no sea modelo de φ[19].

Definición A.13 (Consecuencia lógica)**.** Si Σ es un conjunto de enunciados y φ es un enunciado, decimos que φ *es consecuencia de* Σ sii todos los modelos de Σ son modelos de φ. Esto lo denotamos como $\Sigma \models \varphi$.

Definición A.14 (Teoría)**.** Una *teoría* en un lenguaje L es un conjunto de enunciados Σ de ese lenguaje, cerrado bajo consecuencia lógica. Es decir: Si $\Sigma \models \varphi$ entonces $\varphi \in \Sigma$.

Proposición 8. *Los siguientes conjuntos de enunciados son teorías:*

a) Si A es una estructura del lenguaje L, entonces la teoría de A, denotada por $\mathrm{Teo}(A) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es un enunciado verdadero en } A\}$*, es una teoría.*

b) Si Σ es un conjunto de enunciados del lenguaje L, entonces el conjunto de consecuencias de Σ, denotado por

$$\mathrm{Cn}(\Sigma) = \{\varphi \mid \varphi \textit{ es un enunciado y } \Sigma \models \varphi\},$$

es una teoría. Obsérvese que $\Sigma \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma)$.

Demostración.

a) Supongamos que $\mathrm{Teo}(A) \models \alpha$. Entonces todo modelo de $\mathrm{Teo}(A)$ es modelo de α. Como es obvio que A es modelo de $\mathrm{Teo}(A)$, entonces A es modelo de α por lo que $\alpha \in \mathrm{Teo}(A)$ y $\mathrm{Teo}(A)$ es una teoría.

[19] N. E.: En el artículo original, el autor denota la noción de consecuencia lógica deductiva como $\Sigma \vdash \varphi$. Esta notación la continúa usando en las definiciones y proposiciones subsiguientes. En esta versión sin embargo, he preferido utilizar el símbolo semántico de consecuencia lógica $\models$ en lugar de $\vdash$ porque este último símbolo usualmente se identifica con la noción sintáctica de derivabilidad formal, lo cual se presta a confusiones. Además, queda la posibilidad de que la notación del artículo original fuera simplemente un error tipográfico.

b) Supongamos que $\mathrm{Cn}(\Sigma) \models \alpha$. Sea A un modelo de Σ, entonces A es modelo de $\mathrm{Cn}(\Sigma)$ (por definición de consecuencia). De aquí por la suposición, A es modelo de α y entonces $\Sigma \models \alpha$, de donde $\alpha \in \mathrm{Cn}(\Sigma)$ y $\mathrm{Cn}(\Sigma)$ es una teoría. $\square$

Definición A.15 (Teoría satisfacible y completa)**.**

a) Una teoría T es *satisfacible* sii T tiene un modelo. Es decir, una interpretación para su lenguaje L donde todos los enunciados de T son verdaderos.

b) Una teoría T es *completa* sii para cualquier enunciado φ de su lenguaje $L : \varphi \in T$ ó $\neg\varphi \in T$. Equivalentemente, para cualquier enunciado φ de su lenguaje $L : T \models \varphi$ ó $T \models \neg\varphi$.

Proposición 9.

1. *Para cualquier estructura A, la teoría* $\mathrm{Teo}(A)$ *es satisfacible y completa.*

   Es satisfacible pues por definición de $\mathrm{Teo}(A)$*, la estructura A es modelo suyo. Es completa pues cualquier enunciado del lenguaje para hablar de A, es verdadero en A o su negación es verdadera en A.*

2. *Para cualquier conjunto de enunciados φ, la teoría* $\mathrm{Cn}(\Sigma)$ *es satisfacible sii Σ es satisfacible.*

   Esto es inmediato de las definiciones de satisfacible, $\mathrm{Cn}(\Sigma)$ *y de consecuencia.*

3. *Si Σ es el conjunto de los axiomas de orden total denso sin extremos, un modelo de Σ es $(\mathbb{Q}, <)$ y* $\mathrm{Cn}(\Sigma)$ *es una teoría completa*[20]*.*

4. *Si Σ es el conjunto de los axiomas de la aritmética, entonces* $\mathrm{Cn}(\Sigma)$ *es satisfacible pero incompleta*[21]*.*

5. *Si T es una teoría* satisfacible y completa*, entonces $T = \mathrm{Teo}(A)$ para algún A modelo de T.*

   Esto es fácil de ver pues si A es modelo de T, claramente $T \subseteq$ $\mathrm{Teo}(A)$*. Por otro lado, si $\alpha \in \mathrm{Teo}(A)$ y $\alpha \notin T$ entonces $\neg\alpha \in T$ por ser completa y entonces $\neg\alpha \in \mathrm{Teo}(A)$ de donde tanto α como $\neg\alpha$ serían verdaderas en A ¡contradicción!*

---

[20] En este caso, el único símbolo particular del lenguaje es $<$. Para una demostración, véase [**5**, p. 159].

[21] En este otro caso, los símbolos particulares del lenguaje son $0, s, <, +, *$. Esta es una versión del teorema de incompletud de la aritmética de Gödel. Para una demostración, véase [**5**, cap. 3].

Bibliografía

1. A. Aliseda, *Reseña del libro: J. A. Amor "Los Teoremas de Compacidad y de Completud"*, CRITICA, Vol. XXXI. No. 93, Facultad de Ciencias, UNAM, 1999.
2. J. A. Amor, *Compacidad en la Lógica de Primer Orden y su Relación con el Teorema de Completud*, 1.ª ed., Coordinación de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias, UNAM, 1999.
3. ______, *Compacidad en la Lógica de Primer Orden y su Relación con el Teorema de Completud*, 2.ª ed., Coordinación de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias, UNAM, 2006.
4. J. Bell y A. Slomson, *Models and ultraproducts*, Dover, 2006.
5. H. Enderton, *Una introducción Matemática a la lógica*, 2.ª ed., Ed. IIF-UNAM, 2004.
6. L. T. F. Gamut, *Introducción a la lógica*, Editorial Eudeba, Argentina, 2002.
7. M. Manzano, *Teoría de modelos*, Alianza Universidad Textos, Madrid, España, 1989.
8. E. Mendelson, *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.
9. ______, *Introduction to mathematical logic*, 3.ª ed., Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1987.