Miscelánea Matemática **44** (2007) 79–82 SMM

Sobre la infinidad de los números primos: un enfoque topológico

Marianito Rocha Rodrigo
Instituto Tecnológico Autónomo de México
Río Hondo # 1
01080 México, D.F.
México
mrocha@itam.mx

Un resultado bien conocido en la teoría elemental de números, usualmente atribuido a Euclides, dice que hay un número infinito de primos. Existen varias demostraciones de este resultado [1, 3] pero en esta nota mostraremos en detalle el enfoque ingenioso de Furstenberg [2], que utiliza conocimientos básicos de topología, por ejemplo, espacios topológicos, conjuntos abiertos y conjuntos cerrados.

Sea X un conjunto no vacío. Una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X es una *topología* en X si y sólo si $\mathcal{T}$ satisface los siguientes axiomas:

1. El conjunto vacío $\emptyset$ pertenece a $\mathcal{T}$.
2. La unión de cualquier número de conjuntos en $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.
3. La intersección de un número finito de conjuntos en $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.

Los elementos de $\mathcal{T}$ se les llaman *conjuntos abiertos*, y el par $(X, \mathcal{T})$ se dice que es un *espacio topológico.*

Ejemplo 1. Cada una de las colecciones

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$$

es una topología sobre $X = \{a, b, c\}$. Sin embargo, $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ no es porque $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{T}_3$.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un subconjunto de X se dice que es *cerrado* si y sólo si su complemento pertenece a $\mathcal{T}$, es decir, su complemento es un conjunto abierto.

Ejemplo 2. En el espacio topológico $(X, \mathcal{T}_1)$ del ejemplo anterior, el subconjunto $E_1 = \{b, c\}$ es cerrado mientras el subconjunto $E_2 = \{b\}$ no lo es.

Puede demostrarse que la intersección de cualquier número de conjuntos cerrados es cerrado, y que la unión de un número finito de conjuntos cerrados es cerrado.

Para probar que el conjunto $\mathbb{P}$ de números primos es infinito, necesitamos hallar un espacio topológico apropiado. Tomamos $X = \mathbb{Z}$, el conjunto de los enteros. Para cualesquiera dos enteros a y b, con b positivo, sea

$$N_{a,b} \equiv \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\} = \{a, a \pm b, a \pm 2b, \ldots\}.$$

Definamos un conjunto $E \subseteq \mathbb{Z}$ como *abierto* si es vacío, o para cada $a \in E$ existe algún entero positivo b tal que $N_{a,b} \subseteq E$. Denotemos por $\mathcal{T}$ la colección de todo conjunto abierto como se acaba de definir.

Lema 3. *El par $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ es un espacio topológico.*

Demostración. Primero notemos que $\emptyset \in \mathcal{T}$ por definición. Sea $\{E_i : i \in I\}$ una colección de conjuntos abiertos en $\mathcal{T}$, y sea $a \in \bigcup_{i \in I} E_i$. Entonces $a \in E_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$. Puesto que E_{i_0} es abierto, existe un entero positivo b tal que $N_{a,b} \subseteq E_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} E_i$. Por lo tanto, $\bigcup_{i \in I} E_i$ también es abierto.

Supongamos ahora que $E_1, E_2 \in \mathcal{T}$ y que $a \in (E_1 \cap E_2)$. Entonces existen enteros positivos b_1 y b_2 tales que $N_{a,b_1} \subseteq E_1$ y $N_{a,b_2} \subseteq E_2$, respectivamente. Queremos demostrar que $N_{a,b_1 b_2} \subseteq (E_1 \cap E_2)$. Si $x \in N_{a,b_1 b_2}$, entonces para algún $n \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$x = a + n(b_1 b_2) = a + (nb_2)b_1 = a + (nb_1)b_2$$

y por lo tanto $x \in N_{a,b_1}$ y $x \in N_{a,b_2}$. Se sigue que $x \in E_1$ y $x \in E_2$, o $x \in (E_1 \cap E_2)$. De ahí, $E_1 \cap E_2$ también pertenece a $\mathcal{T}$.

Lema 4. *El conjunto $N_{a,b}$ es ambos abierto y cerrado.*

Demostración. El conjunto $N_{a,b}$ no es vacío puesto que $a \in N_{a,b}$. Sea $x \in N_{a,b}$. Se sigue que $x = a + nb$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Demostraremos que

$N_{x,b} \subseteq N_{a,b}$. Para cualquier $y \in N_{x,b}$ tenemos que (para algún entero m)

$$y = x + mb = (a + nb) + mb = a + (m + n)b$$

y esto implica que $y \in N_{a,b}$. Entonces, $N_{a,b}$ es un conjunto abierto.

No es difícil ver que

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b}.$$

Cada $N_{a+i,b}$ es abierto como ya se ha demostrado, y por lo tanto la unión de estos conjuntos es abierto. Entonces, el conjunto del lado izquierdo es cerrado.

Lema 5. *Cualquier conjunto abierto no vacío es infinito.*

Demostración. La conclusión es una consecuencia directa de la definición de un conjunto abierto E ya que $N_{a,b}$ es infinito y $N_{a,b} \subseteq E$.

Lema 6. *Se cumple que*

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}. \tag{1}$$

Demostración. Cada $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ tiene un divisor primo p', es decir, $x = mp'$ para algún entero m. Esto implica que $x \in N_{0,p'}$, o que $x \in \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$. Entonces, $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} \subseteq \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$. Un argumento semejante prueba que $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p} \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$.

Teorema 7. *El conjunto $\mathbb{P}$ es infinito.*

Demostración. Si $\mathbb{P}$ fuera finito, entonces el lado izquierdo de (1) sería cerrado puesto que es una unión finita de conjuntos cerrados (cada $N_{0,p}$ es cerrado por el Lema 4). Se sigue que $\{-1, 1\}$ es abierto. Pero esto es una contradicción ya que por el Lema 5 todo conjunto abierto no vacío tiene que ser infinito. Por lo tanto, hay una infinidad de números primos.

Agradecimiento

Quiero agradecer al Dr. Guillermo Grabinsky por sus comentarios y sugerencias.

Referencias

[1] M. Aigner and G.M. Ziegler, Proofs from The Book, Springer-Verlag, 1998.

[2] H. Furstenberg, *On the infinitude of primes*, Amer. Math. Monthly **62** (1955), p. 353.

[3] P. Ribenboim, The Little Big Book of Primes, Springer-Verlag, 1991.