Miscelánea Matemática **76** (2023) 21-43 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7603

Representaciones de los números naturales positivos

Josefina Álvarez
jalvarez@nmsu.edu
y
Larry Hughes
Departamento de Matemáticas
New Mexico State University
lorenz.hughes@gmail.com

1. Introducción

Recordemos que en [11] vimos cómo un número natural positivo se representa unívocamente en cualquier sistema posicional con base $b > 1$. En particular, para $b = 2$, la representación es una serie de ceros y unos. Con vista a las representaciones que consideraremos aquí, podemos pensar que dada la sucesión $\{2^{j-1}\}_{j\geq 1}$ escribimos al número natural positivo n como

$$n = \sum_{j\geq 1} \varepsilon_j 2^{j-1}$$

donde $\varepsilon_j = \varepsilon_{j,n}$ es igual a cero o uno y la sucesión $\{\varepsilon_j\}_{j\geq 1}$ es eventualmente cero. Esto significa que hay un número natural positivo $N = N_n$ tal que $\varepsilon_j = 0$ para $j > N$.

¿Qué pasará, nos preguntamos, si en lugar de $\{2^{j-1}\}_{j\geq 1}$ usamos cualquier sucesión $\{v_j\}_{j\geq 1}$ de números naturales positivos? ¿Cuándo podremos asegurar que tal representación existe? Veremos que el responder a estas preguntas involucra la formulación de resultados de gran belleza y simplicidad, donde sucesiones bien conocidas juegan un papel central.

Nuestra exposición está motivada, en parte, por algunos de los temas presentados en el capítulo 8, secciones 13 y 14, del libro de Ross Honsberger [19]. Hemos usado material proveniente de muchas fuentes, la mayoría de ellas originales. Además, hemos incluido demostraciones

Palabras clave: Sucesiones completas, criterio de Brown, representaciones usando números primos, representaciones usando números de Fibonacci, la representación de Zeckendorf, el teorema de Zeckendorf.

no proporcionadas en esas fuentes, asegurándonos que todas las demostraciones son presentadas con detalle. Exceptuando los teoremas 6 y 7, para los cuales no sabemos de ninguna referencia, muy poco en este artículo es nuestro trabajo original. Creemos que nuestra contribución está en la forma en que los temas han sido motivados, en su organización, y en los comentarios que incluimos.

2. Sucesiones completas

En todo lo que sigue, los términos de las sucesiones a considerar siempre serán números naturales positivos, así que ya no lo mencionaremos más. También los números que representaremos y cualquier parámetro que necesitemos fijar, serán números naturales positivos. Por lo tanto, solo lo diremos cuando la redacción lo haga necesario, en cuyo caso omitiremos la positividad.

Comenzamos con una definición.

Definición 2.1. Dada una sucesión no decreciente $V = \{v_j\}_{j\geq 1}$, decimos que V es completa si para cada número natural n hay una sucesión $\{\varepsilon_j\}_{j\geq 1}$ con $\varepsilon_j = \varepsilon_{j,n}$ igual a cero o uno, tal que $\{\varepsilon_j\}_{j\geq 1}$ es eventualmente cero y

$$n = \sum_{j\geq 1} \varepsilon_j v_j. \tag{1}$$

La definición de sucesión completa se debe a Verner Emil Hoggatt y Charles King. Apareció, sin suponer que la sucesión fuera no decreciente, en la sección de problemas de *The American Mathematical Monthly* en 1960 [18].

Debería de ser claro que la completitud de una sucesión es independiente del orden en que se escriben sus términos. En principio, podría pensarse que dada cualquier sucesión, es posible reordenar sus términos en orden no decreciente. Sin embargo, este no es siempre el caso, como puede verse en la sucesión $1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$ Puesto que el ser la sucesión no decreciente será importante más tarde, supondremos eso desde el principio. Es decir, cuando hablamos de una sucesión completa, siempre vamos a suponer que la sucesión es no decreciente. Entonces, para poder representar al número $n = 1$, el primer término de tal sucesión debe de ser igual a uno. Además, cuando recorremos la sucesión eligiendo términos para representar un número dado n, podemos ignorar todo término $v_j > n$. Si n resulta ser igual a v_k para algún $k = 2, 3, \ldots$, entonces v_k es la representación de n. Cuando $n = v_k - 1$, si es posible representar n usando algunos de los términos $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ necesitamos

$$v_1 + \cdots + v_{k-1} \geq v_k - 1. \tag{2}$$

John L. Brown, Jr. demostró en 1961, en un artículo también publicado en *The American Mathematical Monthly* [12], que las condiciones $v_1 = 1$ y (2) caracterizan a las sucesiones completas. Concretamente, la caracterización de Brown, conocida como el criterio de Brown, dice lo siguiente:

Teorema 2.2. *Una sucesión no decreciente $V = \{v_j\}_{j\geq 1}$ es completa si y solo si*

1. $v_1 = 1$ *y*
2. $v_1 + \cdots + v_{k-1} \geq v_k - 1$ *para todo* $k = 2, 3, \ldots$

La demostración debida a Brown de su criterio, se basa en el siguiente resultado:

Lema 2.3. *Sea $V = \{v_j\}_{j\geq 1}$ una sucesión. Si $v_1 = 1$ y*

$$v_1 + \cdots + v_{k-1} \geq v_k - 1$$

para todo $k = 2, 3, \ldots$, entonces para cada $1 \leq n < 1 + \sum_{j=1}^{k} v_j$ con $k \geq 2$ fijo, existen $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1,n}, \ldots, \varepsilon_k = \varepsilon_{k,n}$ iguales a uno o cero tales que

$$n = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j v_j. \tag{3}$$

Demostración. Usamos inducción en k. Cuando $k = 1$, es decir cuando $n = v_1 = 1$, el resultado es cierto. Si es cierto cuando $1 \leq n < 1 + \sum_{j=1}^{k} v_j$ para un valor fijo de k, supongamos que $1 \leq n < 1 + \sum_{j=1}^{k+1} v_j$. De acuerdo a la hipótesis inductiva, solo necesitamos considerar n en el rango $1 + \sum_{j=1}^{k} v_j \leq n < 1 + \sum_{j=1}^{k+1} v_j$. Es decir,

$$n - v_{k+1} \geq 1 + \sum_{j=1}^{k} v_j - v_{k+1} \geq 0$$

usando la condición impuesta en el enunciado .

Si $n = v_{k+1}$ no hay nada que hacer. Si no, $1 \leq n - v_{k+1} < 1 + \sum_{j=1}^{k} v_j$ y entonces la hipótesis inductiva se aplica a $n - v_{k+1}$. O sea que existen $\gamma_1 = \gamma_{1,n}, \ldots, \gamma_k = \gamma_{k,n}$ iguales a cero o uno tales que

$$n - v_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j v_j.$$

Por lo tanto $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, 1 dan una representación de n como

$$n = v_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \gamma_j v_j.$$

Esto prueba el lema. $\square$

A continuación probamos el criterio de Brown.

Demostración. El lema muestra que las condiciones 1) y 2) son suficientes para la completitud de V. Mostremos que también son necesarias.

Si v_1 no es igual a uno, $n = 1$ no puede ser representado. Supongamos que para cierto $k_0 = 2, 3, \dots$ tenemos

$$v_1 + \cdots + v_{k_0-1} + 1 < v_{k_0}.$$

Entonces

$$v_{k_0} > v_{k_0} - 1 > v_1 + \cdots + v_{k_0-1}$$

lo cual muestra que $v_{k_0} - 1$ no puede ser representado usando la sucesión V. Es decir, V no es completa.

Esto concluye la prueba del teorema. □

En el lema 2.3 y el teorema 2.2, hemos construido representaciones de la forma (3). Debería de ser claro que tomando $\varepsilon_j = 0$ para todo $j > k$, podemos escribir la representación en la forma equivalente (1).

Ejemplo 2.4. Aquí reunimos algunos ejemplos sencillos.

1. Consideremos la sucesión $V = \{v_j\}_{j\geq 1}$ con $v_j = 1$ para todo $j = 1, 2, \dots$ Esta sucesión es trivialmente completa, puesto que cada n puede escribirse en la forma

$$n = \sum_{j\geq 1} \varepsilon_j v_j,$$

dada cualquier sucesión $\{\varepsilon_j\}_{j\geq 1}$ que tiene exactamente n términos iguales a uno con el resto de los términos iguales a cero. Este ejemplo muestra que la representación (1) no es única, en general.

Por supuesto, la sucesión satisface el criterio de Brown porque $v_1 = 1$ y

$$\sum_{j=1}^{k-1} v_j = k - 1 > v_k - 1$$

para todo $k = 2, 3, \dots$

Debería de ser claro que el quitar cualquier número de términos de la sucesión, resulta en otra sucesión que también es completa.

2. Sea V la sucesión $\{2^{j-1}\}_{j\geq 1}$. Probamos en [11] que V es completa y que la representación de cada número natural es única. Esta representación es llamada de base 2 o binaria. Las condiciones del criterio de Brown son satisfechas, puesto que $v_1 = 2^0 = 1$ y

$$\sum_{j=1}^{k-1} v_j = \sum_{j=0}^{k-2} 2^j = 2^{k-1} - 1 = v_k - 1$$

para todo $k = 2, 3, \dots$

3. Más generalmente, podríamos considerar la sucesión $V = \{b^{j-1}\}_{j\geq 1}$ para $b \geq 2$ fijo. Desafortunadamente, como
$$\sum_{j=0}^{k-2} b^j = \frac{b^{k-1}-1}{b-1} < b^{k-1} - 1$$
cuando $b \neq 2$, la sucesión no es completa para $b \geq 3$.

El resultado siguiente es una consecuencia interesante del criterio de Brown.

Corolario 2.5. *[12, p. 558] Si $V = \{v_k\}_{k\geq 1}$ es una sucesión completa, entonces*
$$v_k \leq 2^{k-1}$$
para todo $k = 1, 2, \ldots$

Demostración. Usamos inducción en k.

Como $v_1 = 1$, la afirmación es cierta para $k = 1$. Suponiendo que $v_j \leq 2^{j-1}$ para $j \leq k$ con $k \geq 1$ fijo, probemos la afirmación para $k+1$. En efecto,
$$v_{k+1} \underset{(i)}{\leq} v_1 + \cdots + v_k + 1 \leq \sum_{j=0}^{k-1} 2^j + 1 \underset{(ii)}{=} 2^k,$$
donde hemos usado el criterio de Brown en (i), mientras que (ii) se prueba con un argumento inductivo muy simple.

Esto concluye la prueba del corolario. □

Este corolario 2.5 muestra que la sucesión completa $\{2^{j-1}\}_{j\geq 1}$ es, término a término, una cota superior para todas las sucesiones completas. A continuación probamos dos resultados para los cuales no sabemos de ninguna referencia.

Teorema 2.6. *Sea $V = \{v_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión completa. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Cada número natural tiene una representación única en términos de V.*
2. *$V = \{2^{k-1}\}_{k\geq 1}$.*

Demostración. Que 2) implica 1) está probado en la sección 3 de [11].

En cuanto a la recíproca, supongamos que $V \neq \{2^{k-1}\}_{k\geq 1}$. Sea K el primer número natural k para el cual $v_k < 2^{k-1}$. Como $v_1 = 1 = 2^{1-1}$, K tiene que ser mayor o igual a 2.

Por la manera en que hemos elegido K, $v_k = 2^{k-1}$ para $k = 1, 2, \ldots, K-1$ y

$$\sum_{k=1}^{K-1} v_k = \sum_{k=1}^{K-1} 2^{k-1} = 2^{K-1} - 1.$$

Sea $\mathbb{A}$ el conjunto de los números naturales n tales que

$$n = \sum_{k=1}^{K-1} \varepsilon_k v_k \tag{4}$$

donde ε_k es cero o uno. Entonces

$$\mathbb{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 2^{K-1} - 1\}.$$

Como $v_K \le 2^{K-1} - 1$, en particular v_K está en $\mathbb{A}$ y, por lo tanto, tiene al menos dos representaciones, una como en (4) y otra dada por sí mismo.

Esto completa la prueba del teorema. □

Teorema 2.7. *Sea $V = \{v_k\}_{k\ge1}$ una sucesión completa. Si $V \neq \left\{2^{k-1}\right\}_{k\ge1}$ entonces el conjunto $\mathbb{B}$ formado por los números naturales sin representación única en términos de V, es infinito.*

Demostración. Consideramos dos casos.

Si V es eventualmente constante, es decir si existe $K \ge 1$ tal que $v_k = v_K$ para $k \ge K$, entonces

$$\{n : n \text{ es un múltiplo de } v_K\} \subseteq \mathbb{B}.$$

Por lo tanto $\mathbb{B}$ es infinito.

Si V no es eventualmente constante, entonces tiene una subsucesión $\left\{v_{k_j}\right\}_{j\ge1}$ que es creciente. Además, como $V \neq \left\{2^{k-1}\right\}_{k\ge1}$, de acuerdo con el teorema 2.6, hay un número natural N que tiene al menos dos representaciones. Por lo tanto, aquellos números naturales de la forma $N + v_{k_j}$ para $v_{k_j} > N$ pertenecen a $\mathbb{B}$, lo cual muestra que $\mathbb{B}$ es infinito.

Esto completa la prueba del teorema. □

Concluimos esta sección con una condición suficiente de completitud.

Proposición 2.8. *[19, p. 127] Si $V = \{v_j\}_{j\ge1}$ es una sucesión no decreciente con $v_1 = 1$ y*

$$v_j \le 2v_{j-1} \tag{5}$$

para todo $j = 2, 3, \ldots,$ entonces la sucesión V es completa.

Demostración. Es suficiente probar que V satisface 2) en el teorema 2.2. Esto lo haremos por inducción en k.

Si $k = 2$,

$$v_2 \le 2v_1 = v_1 + 1.$$

Suponiendo que la condición se cumple para un cierto $k \geq 2$,

$$v_{k+1} \leq 2v_k = v_k + v_k \leq 1 + v_1 + \cdots + v_{k-1} + v_k.$$

Entonces la proposición está probada. □

Las sucesiones en 1) y 2) del ejemplo 2.4 satisfacen (5).

En la sección que sigue, donde estudiamos un primer ejemplo importante de completitud, usaremos esta condición y también mostraremos que no siempre es necesaria.

3. La sucesión de los números primos

Comenzamos por enunciar el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.1. *La sucesión*

$$P = 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, \ldots$$

de los números primos precedidos por el número 1*, es completa.*

La sucesión P es la sucesión A008578 en la *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) (* [1]; véase también [7])[1].

Observemos que en el contexto en el que estamos trabajando, el primer término de la sucesión P debe de ser 1. Al comienzo del siglo veinte se consideró que 1 es primo. En la actualidad, no se considera a 1 ni primo ni compuesto [1].

La prueba del teorema 3.1 usa el postulado de Bertrand, que dice lo siguiente:

Teorema 3.2. *Para cada $n \geq 2$, siempre hay un número primo entre n y $2n$.*

Este resultado fue conjeturado en 1845 por Joseph Louis François Bertrand, quien lo comprobó para todo $n < 3\,000\,000$. La primera demostración fue dada en 1852 por Pafnuty Lvovich Chebyshev. En 1919 Srinivasa Ramanujan dio una prueba menos complicada usando propiedades de la función gamma. Paul Erdös, apenas un adolescente, publicó en 1932 una prueba considerablemente más fácil usando propiedades de los números combinatorios centrales $\binom{2n}{n}$. Esencialmente, esta es la demostración que se usa hoy en día (véase, por ejemplo, [17, teo. 418] y también [8]).

La sucesión A060715 en *OEIS* [2] da el número de números primos entre n y $2n$ para $n = 1, 2, \ldots$ Los primeros términos son

$$0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 6, \ldots$$

[1]Cada sucesión en el archivo *OEIS* está acompañada por comentarios interesantes sobre propiedades debidas a diferentes autores.

Corolario 3.3. *Para cada $k = 1, 2, \ldots$, si p_k es el k-ésimo término en la sucesión P, entonces $p_k \leq 2^{k-1}$.*

Demostración. La prueba de esta afirmación usa inducción en k.

Es cierta, por comprobación directa, para $k = 1, 2, 3$. Supongamos que $p_k \leq 2^{k-1}$ para $k \geq 3$ fijo. Necesitamos probar que $p_{k+1} \leq 2^k$. De acuerdo con el postulado de Bertrand, hay un número primo p entre 2^{k-1} y 2^k. O bien $p_{k+1} \leq 2^{k-1}$, en cuyo caso no hay nada más que hacer, o $p_{k+1} > 2^{k-1}$. No puede ser que $p_{k+1} > p$, porque si esto fuera cierto, no habría un número primo entre 2^{k-1} y p. Por lo tanto, si $p_{k+1} > 2^{k-1}$ tenemos $2^{k-1} < p_{k+1} \leq p < 2^k$.

Es decir, la prueba del corolario está completa. □

Observemos que el postulado de Bertrand nos ha permitido probar que la sucesión P satisface el corolario 2.5, sin tener que probar antes que es completa.

Ahora estamos listos para demostrar el teorema 3.1.

Demostración. Probaremos que P cumple con las hipótesis de la proposición 2.8. Como $p_1 = 1$, nos basta con verificar la condición (5).

Usando el postulado de Bertrand, para cada $k = 3, 4, \ldots$ existe un número primo p entre p_{k-1} y $2p_{k-1}$. Por lo tanto

$$p_{k-1} < p_k \leq p < 2p_{k-1}.$$

Para $k = 2$, $2 = p_2 = 2p_1$. Es decir tenemos (5), lo cual concluye la prueba del teorema. □

Como consecuencia del teorema 2.6, las representaciones que usan la sucesión P no pueden ser siempre únicas. Esto se puede ver directamente.

$$\begin{aligned}
8 &= 1 + 7 = 1 + 2 + 5 = 3 + 5, \\
11 &= 1 + 2 + 3 + 5 = 1 + 3 + 7 = 1 + 2 + 3 + 5 = 11, \\
12 &= 1 + 11 = 2 + 3 + 7 = 5 + 7, \\
21 &= 1 + 3 + 17 = 1 + 7 + 13 = 2 + 3 + 5 + 11,
\end{aligned}$$

etcétera.

Modificando la demostración del postulado de Bertrand en el libro de Hardy y Wright, puede probarse que dado cualquier número natural j existe N_j tal que para todo $n \geq N_j$ hay j números primos entre n y $2n$. En particular, para $j = 2$ es $N_2 = 6$ [19, p. 128]. Es decir, para $n \geq 6$, siempre hay dos números primos entre n y $2n$. Por lo tanto, para $k \geq 4$, o sea para los primos $p_k \geq 7$,

$$p_k < p_{k+1} < p_{k+2} < 2p_k. \tag{6}$$

Sea p_l un número primo mayor o igual que 11. Es decir, $l \geq 6$. Observemos que para $k+1=6$, las desigualdades (6) se reducen a

$$7 < 11 < 13 < 14,$$

mientras que (6) no se cumple si $l < 6$.

Sea $V = \{v_k\}_{k\geq 1}$ la sucesión definida como

$$v_k = \begin{cases} p_k & \text{si} \quad 1 \leq k \leq l-1 \\ p_{k+1} & \text{si} \quad k \geq l \end{cases}.$$

Esta es la sucesión que se obtiene cuando se elimina p_l en la sucesión P. Como V aún satisface el postulado de Bertrand y $v_1 = 1$, la prueba del teorema 3.1 puede usarse con la sucesión V, que entonces es completa.

Con la misma justificación, si eliminamos cualquier número de términos ≥ 11, la sucesión que queda es completa, si nunca eliminamos dos términos consecutivos.

Así tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.4. *Si eliminamos en la sucesión P cualquier número de términos no consecutivos mayores o iguales que* 11*, la sucesión que resulta todavía es completa.*

Es decir que la sucesión P es completa en un sentido muy fuerte.

Sea $V = \{v_k\}_{k\geq 1}$ la subsucesión de P definida como $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, y para cada $k = 3, 4, \ldots$, v_k es igual al número primo más pequeño que es mayor que 2^{k-2}. La sucesión V es completa [3]. Sin embargo, V no satisface (5), lo cual muestra que la condición (5) no es necesaria.

Para probar esto, es conveniente usar la sucesión $X = \{x_k\}_{k\geq 2}$, donde $x_k = v_k - 2^{k-2}$ para $k = 2, 3, \ldots$, porque así podremos trabajar con números mucho más pequeños.

La sucesión V es *OEIS A*203074 [3] y la sucesión X es *OEIS A*013597 [4]. La siguiente tabla muestra unos pocos términos de $\{2^{k-2}\}_{k\geq 2}$, V y X:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^{k-2}		1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
v_k	1	2	3	5	11	17	37	67	131	257	521	1031
x_k		1	1	1	3	1	5	3	3	1	9	7

(7)

Para que la sucesión V satisfaga la condición (5) necesitamos $v_k \leq 2v_{k-1}$ para todo $k = 2, 3, \ldots$, o

$$2^{k-2} + x_k \leq 2\left(2^{k-3} + x_{k-1}\right) = 2^{k-2} + 2x_{k-1}$$

para todo $k = 3, 4, \ldots$ Es decir, (5) es equivalente a

$$x_k \leq 2x_{k-1}$$

para todo $k = 3, 4, \ldots$, lo cual no es cierto. En efecto, (7) muestra $x_5 > 2x_4$, $x_7 > 2x_6$, $x_{11} > 2x_{10}$. Además, en la lista de los primeros 5 000 términos de X [5], se pueden identificar pares (x_{k-1}, x_k), que no satisfacen (5), incluyendo

$$(x_{4996}, x_{4997}) = (87, 197) .$$

Por lo tanto ni X ni V satisfacen (5).

Así concluimos con nuestro primer ejemplo importante. En la sección que sigue comenzaremos a desarrollar nuestro segundo, y último, ejemplo importante.

4. La sucesión de los números de Fibonacci, primera parte

Definidos recursivamente como $f_1 = f_2 = 1$ y $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ para $k = 3, 4, \ldots$, estos números ya eran conocidos en la India en tiempos muy antiguos [23], [22]. Más tarde, aparecieron como la solución de un problema sobre la reproducción de conejos incluido en *Liber Abaci* [14], un libro de álgebra publicado en 1202. Su autor, Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci o hijo de Bonaccio, fue un hombre muy interesado en la matemática, quien tuvo la oportunidad de visitar Egipto, Siria y Grecia, reuniendo conocimiento matemático. *Liber Abaci* fue, por siglos, la fuente de la cual otros autores obtuvieron material para sus trabajos en aritmética y álgebra. En 1220, Fibonacci publicó *Practica Geometricæ*, conteniendo todo el conocimiento de geometría y trigonometría aprendido en sus viajes. De acuerdo con el historiador Florian Cajori [13, p. 123], «Leonardo muestra en sus escritos, considerable destreza, cierta originalidad y un rigor euclidiano». En las numerosas referencias de Cajori a la obra de Fibonacci, nunca se menciona el problema de los conejos o los números que dan la respuesta. Martin Gardner, en [16], lamenta la ironía de ver a Leonardo, quien produjo valiosas contribuciones a la matemática, recordado principalmente porque en el siglo diecinueve, un experto en la teoría de números, Édouard Lucas, dio el nombre de Fibonacci a «una sucesión numérica que aparece en *Liber Abaci* en relación con un problema trivial» [16, p. 153]. Sea como sea, tanto matemáticos profesionales como aficionados, aún sienten la atracción de las muchas características extraordinarias de esos números, hasta el punto que hay publicaciones dedicadas a ellos, por ejemplo la revista *Fibonacci Quarterly*.

La sucesión de los números de Fibonacci, o sucesión de Fibonacci, es *OEIS A*000045 [6]. He aquí una lista de los primeros términos:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$$

Teorema 4.1. *Si $F = \{f_j\}_{j\geq 1}$ es la sucesión de Fibonacci,*

1. *la sucesión F es completa,*
2. *eliminando un término cualquiera, la sucesión que resulta es aún completa y*
3. *el eliminar dos términos cualesquiera produce una sucesión que no es completa.*

Aunque podríamos demostrar este teorema directamente, usando un razonamiento similar podemos probar varios resultados generales, de los cuales la demostración del teorema 4.1 será una consecuencia sencilla. Este enfoque también nos permitirá formular una caracterización interesante de la sucesión F.

5. Algunos resultados generales sobre completitud

He aquí el primero de ellos.

Teorema 5.1. *[12, teo. 2] Sea $W = \{w_j\}_{j\geq 1}$ una sucesión completa. Entonces, la sucesión que resulta después de eliminar un término cualquiera es completa, si y solo si*

1. *$w_2 = 1$ y*
2. *$w_1 + \cdots + w_{k-1} \geq w_{k+1} - 1$ para toda $k = 2, 3, \ldots$*

Demostración. Sea $V = \{v_j\}_{j\geq 1}$ la sucesión que resulta después de eliminar w_l en W, para cierto $l = 1, 2, \ldots$ fijo. Es decir,

$$v_j = \begin{cases} w_j & \text{si} \quad 1 \leq j \leq l-1 \\ w_{j+1} & \text{si} \quad j \geq l \end{cases},$$

donde se entiende que la primera condición se ignora cuando $l = 1$.

De acuerdo con el teorema 2.2, será suficiente que probemos que 1) y 2) son equivalentes a

a): $v_1 = 1$ y
b): $v_1 + \cdots + v_{k-1} \geq v_k - 1$ para todo $k = 2, 3, \ldots$

Supongamos que las condiciones 1) y 2) son ciertas. Independientemente del valor de l, $v_1 = 1$.

Si $l = 1$ y $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k-1} v_j &= \sum_{j=1}^{k-1} w_{j+1} = \sum_{j=2}^{k} w_j \geq \sum_{j=1}^{k-1} w_j \\ &\geq w_{k+1} - 1 = v_k - 1. \end{aligned}$$

Si $l \geq 2$ y $k \leq l$,

$$\sum_{j=1}^{k-1} v_j = \sum_{j=1}^{k-1} w_j \geq w_{k+1} - 1$$

mientras que si $k \leq l - 1$,

$$w_{k+1} - 1 \geq w_k - 1 = v_k - 1$$

y si $k = l$,

$$w_{k+1} - 1 = v_k - 1.$$

Por lo tanto, en ambos casos,

$$\sum_{j=1}^{k-1} v_j \geq v_k - 1.$$

Si $k > l \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k-1} v_j &= \sum_{j=1}^{l-1} v_j + v_l + \sum_{j=l+1}^{k-1} v_j = \sum_{j=1}^{l-1} w_j + w_{l+1} + \sum_{j=l+1}^{k} w_{j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{l-1} w_j + w_{l+1} + \sum_{j=l+2}^{k} w_j \\
&\geq \sum_{j=1}^{l-1} w_j + w_l + \sum_{j=l+1}^{k-1} w_j \geq w_{k+1} - 1 \\
&= v_k - 1.
\end{aligned}$$

Es decir, las condiciones a) y b) se cumplen.

Recíprocamente, si 1) no se cumple, eliminando w_1 tenemos una sucesión con $v_1 = w_2 > 1$. Es decir, la condición a) no es cierta. Si $w_1 + \cdots + w_{k_0 - 1} < w_{k_0+1} - 1$ para cierto $k_0 = 2, 3, \ldots$, fijo, elegimos $l = k_0$.

Puesto que

$$\sum_{j=1}^{k_0-1} v_j = \sum_{j=1}^{k_0-1} w_j < w_{k_0+1} - 1 = v_{k_0} - 1,$$

la condición b) no se cumple para $k = k_0$.

La prueba del teorema está completa. □

Teorema 5.2. *[12, teo. 3] Sea $W = \{w_j\}_{j \geq 1}$ una sucesión completa. Si*

$$w_1 + \cdots + w_{k-1} \leq w_{k+1} - 1 \tag{8}$$

para todo $k = 2, 3, \ldots$, el eliminar dos términos cualesquiera produce una sucesión que no es completa.

Demostración. Sean w_s y w_r, con $s < r$, los dos términos que se eliminan. Nos queda entonces una sucesión $V = \{v_j\}_{j\leq 1}$ donde v_j se define como

$$v_j = \begin{cases} w_j & \text{if} \quad 1 \leq j \leq s-1 \\ w_{j+1} & \text{if} \quad s \leq j \leq r-2 \\ w_{j+2} & \text{if} \quad j \geq r-1 \end{cases}.$$

Dependiendo de los valores de s y r, algunas de estas condiciones deberán ignorarse.

Veamos que V no satisface el criterio de Brown.

Si $s = 1$ y $r = 2$, usando (8) resulta $v_1 = w_3 \geq 2$, lo cual contradice la condición 1) en el criterio de Brown.

Si $s = 1$ y $r > 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{r-2} v_j &= \sum_{j=1}^{r-2} w_{j+1} = \sum_{j=2}^{r-1} w_j < \sum_{j=1}^{r-1} w_j \leq w_{r+1} - 1 \\ &= v_{r-1} - 1, \end{aligned}$$

lo cual contradice la condición 2) en el criterio de Brown.

Finalmente, si $1 < s < r$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{r-2} v_j &= \sum_{j=1}^{s-1} v_j + \sum_{j=s}^{r-2} v_j = \sum_{j=1}^{s-1} w_j + \sum_{j=s}^{r-2} w_{j+1} \\ &= \sum_{j=1}^{s-1} w_j + \sum_{j=s+1}^{r-1} w_j < \sum_{j=1}^{r-1} w_j \leq w_{r+1} - 1 = v_{r-1} - 1, \end{aligned}$$

lo cual muestra que V no satisface 2) en el criterio de Brown.

Esto concluye la prueba del teorema. □

El resultado que sigue muestra que la condición suficiente (8) de no completitud es también necesaria para una cierta clase de sucesiones completas.

Teorema 5.3. *Sea $W = \{w_j\}_{j\geq 1}$ una sucesión completa tal que*

1. *eliminando un término cualquiera se obtiene una sucesión que es completa y*
2. *$w_{j+1} > w_j$ para todo $j = 2, 3, \dots$*

Entonces, eliminando dos términos cualesquiera queda una sucesión que no es completa si y solo si la condición (8) se verifica para todo $k = 2, 3, \dots$

Demostración. La hipótesis 1) implica que $w_1 = w_2 = 1$.

El teorema 5.2 muestra que la condición es suficiente, así que nos queda por probar que es necesaria. Supongamos que (8) no se cumple.

Es decir, existe $k_0 \geq 2$ tal que

$$w_1 + \cdots + w_{k_0-1} > w_{k_0+1} - 1. \tag{9}$$

Observemos que k_0 debe de ser > 2, porque si $k_0 = 2$, (9) resulta $1 = w_1 > w_3 - 1$ o $w_3 < 2$, lo cual contradice 2).

Si eliminamos en W los términos w_1 y w_{k_0} nos queda la sucesión $V = \{v_j\}_{j\leq 1}$

$$v_j = \begin{cases} w_{j+1} & \text{si} \quad 1 \leq j \leq k_0 - 2 \\ w_{j+2} & \text{si} \quad j \geq k_0 - 1 \end{cases}.$$

Probaremos que V es completa mostrando que V satisface las dos condiciones del criterio de Brown. Como $v_1 = w_2 = 1$, la primera condición se cumple. En cuanto a la segunda, si $k < k_0 - 1$,

$$\sum_{j=1}^{k-1} v_j \geq v_k - 1 \tag{10}$$

porque los términos $v_1 = w_2, \ldots, v_{k-1} = w_k, v_k = w_{k+1}$ son los primeros k términos de la sucesión completa producida eliminando w_1 en W.

Si $k = k_0 - 1$,

$$\sum_{j=1}^{k_0-2} v_j + 1 = \sum_{j=1}^{k_0-2} w_{j+1} + 1 = \sum_{j=2}^{k_0-1} w_j + 1 \underset{(i)}{=} \sum_{j=1}^{k_0-1} w_j > w_{k_0+1} = v_{k_0-1}, \tag{11}$$

donde usamos en (i) que $w_1 = 1$.

Si $k > k_0 - 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k-1} v_j + 1 &= \sum_{j=1}^{k_0-2} v_j + \sum_{j=k_0-1}^{k-1} v_j + 1 = \sum_{j=1}^{k_0-2} w_{j+1} + \sum_{j=k_0-1}^{k-1} w_{j+2} + 1 \\ &= \sum_{j=2}^{k_0-1} w_j + \sum_{j=k_0+1}^{k+1} w_j + 1 > \sum_{j=2}^{k_0-1} w_j + \sum_{j=k_0}^{k} w_j + 1. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k-1} v_j + 1 &= \sum_{j=2}^{k_0-1} w_j + \sum_{j=k_0+1}^{k+1} w_j + 1 \geq \sum_{j=2}^{k_0-1} w_j + 1 + \sum_{j=k_0}^{k} w_j + 1 \\ \underset{(ii)}{=} \sum_{j=1}^{k} w_j + 1 &\geq w_{k+2} = v_k, \end{aligned} \tag{12}$$

donde usamos en (ii) que $w_1 = 1$.

Las estimaciones (10), (11) y (12) muestran que la sucesión V satisface la segunda condición en el criterio de Brown. Por lo tanto V es completa, lo cual concluye la prueba del teorema. □

6. La sucesión de los números de Fibonacci, segunda parte

Estamos casi listos para probar el teorema 4.1. El último ingrediente que necesitamos es el siguiente resultado:

Lema 6.1. *Si $F = \{f_j\}_{j\geq 1}$ es la sucesión de Fibonacci,*

$$\sum_{j=1}^{k-1} f_j = f_{k+1} - 1$$

para todo $k = 2, 3, \ldots$

Demostración. Cuando $k = 2$ la identidad es $f_1 = f_3 - 1$ o $f_1 + f_2 = f_3$, la cual es cierta, por definición. Suponiendo que es cierta para un valor fijo de $k = 2, 3, \ldots$, la probaremos para $k + 1$.

$$\sum_{j=1}^{k} f_j = \sum_{j=1}^{k-1} f_j + f_k = f_{k+1} - 1 + f_k = f_{k+2} - 1, \tag{13}$$

lo cual concluye la prueba del lema. □

Y ahora sí, estamos listos para demostrar el teorema 4.1.

Demostración. La sucesión F satisface $f_1 = 1$ y, de acuerdo con el lema 6.1, también satisface la segunda condición del criterio de Brown. Por lo tanto, F es completa. Al eliminar un término cualquiera obtenemos una sucesión que es completa porque las condiciones en el teorema 5.1 se cumplen. Finalmente, si eliminamos dos términos cualesquiera, la sucesión que queda no es completa porque las condiciones en el teorema 5.3 se cumplen. Así, el teorema 4.1 está probado. □

El útimo resultado en esta sección es una caracterización de la sucesión F.

Teorema 6.2. *[12, teo. 5] Sea $V = \{v_j\}_{j\geq 1}$ una sucesión completa que satisface las siguientes propiedades:*

1. *No más de dos términos son iguales.*
2. *La sucesión sigue siendo completa después de eliminar uno cualquiera de sus términos.*
3. *Después de eliminar dos términos cualesquiera la sucesión no es completa.*

Entonces $V = F$.

Demostración. Como V es completa, las condiciones 1) y 2) implican que $v_1 = v_2 = 1$. La condición 2) y el teorema 5.1 implican que

$$\sum_{j=1}^{k-1} v_j \geq v_{k+1} - 1$$

para todo $k = 2, 3, \dots$

Puesto que V tiene exactamente dos términos iguales y V es no decreciente, debe de ser $v_{j+1} > v_j$ para todo $j = 2, 3, \dots$ Es decir, la condición 3) y el teorema 5.3 implican

$$\sum_{j=1}^{k-1} v_j \leq v_{k+1} - 1$$

para todo $k = 2, 3, \dots$

Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{k-1} v_j = v_{k+1} - 1 \tag{14}$$

para todo $k = 2, 3, \dots$ y también

$$\sum_{j=1}^{k-2} v_j = v_k - 1 \tag{15}$$

para todo $k = 3, 4, \dots$

Restando (15) de (14) obtenemos

$$v_{k-1} = v_{k+1} - v_k$$

para todo $k = 3, 4, \dots$, lo cual, conjuntamente con $v_1 = v_2 = 1$ implican $V = F$.

Esto concluye la demostración del teorema. $\square$

De acuerdo con el teorema 2.6, no todo número natural tiene una única representación como suma de números de Fibonacci. Esto puede verse directamente.

$$\begin{aligned}
4 &= 3 + 1 = 2 + 1 + 1, \\
6 &= 5 + 1 = 3 + 2 + 1, \\
15 &= 13 + 2 = 8 + 5 = 8 + 3 + 2 + 1 + 1, \\
17 &= 13 + 3 + 1 = 13 + 2 + 1 + 1 = 8 + 5 + 3 + 1,
\end{aligned}$$

etcétera.

Sin embargo, podemos ver que entre estas representaciones hay una «especial»,

$$\begin{aligned} 4 &= 3+1, \\ 6 &= 5+1, \\ 15 &= 13+2, \\ 17 &= 13+3+1, \end{aligned}$$

que no usa números de Fibonacci consecutivos.

La siguiente, y última, sección, está dedicada a investigar tales representaciones.

7. La representación de Zeckendorf

Comenzamos con una definición.

Definición 7.1. Sea $F = \{f_j\}_{j\geq 1}$ la sucesión de Fibonacci. Dado un número natural n, una representación

$$n = \sum_{j=1}^{k} f_{l_j}$$

se llama representación de Zeckendorf si $l_1 \geq 2$ y $l_{j+1} > l_j + 1$ para todo $j = 1, \ldots, k$.

Es decir, no se usan números de Fibonacci consecutivos y, en particular, se descarta f_1.

El interés de las representaciones de Zeckendorf es que siempre existen y son únicas. En efecto,

Teorema 7.2. *Dado un número natural n, hay una y solo una representación de Zeckendorf de n.*

Este resultado fue publicado en 1972, en francés, por Édouard Zeckendorf [24], un médico belga aficionado a la matemática, quien dice en su artículo que obtuvo el resultado en 1939. El resultado había sido publicado en holandés por Gerrit C. Lekkerkerker en 1952 [21]. Zeckendorf supo de la demostración de Lekkerkerker durante una visita a Amsterdam, cuando fue alentado a publicar su resultado, lo cual Zeckendorf hizo al retornar a Bélgica. El resultado está bien establecido como el teorema de Zeckendorf.

Presentaremos la prueba debida a Zeckendorf con todo detalle, para lo cual necesitamos los siguientes resultados:

Lema 7.3. *Los números de Fibonacci satisfacen las identidades*

$$\sum_{j=1}^{s} f_{2j-1} = f_{2s}, \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{s} f_{2j} = f_{2s+1} - 1 \tag{17}$$

para cada $s = 1, 2, \dots,$ *fijo.*

Demostración. Probamos las dos identidades usando inducción en s.

Ambas son ciertas para $s = 1$. Suponiendo que son ciertas para un valor fijo de $s = 2, 3, \dots,$ las probaremos para $s + 1$.

$$\sum_{j=1}^{s+1} f_{2j-1} = f_{2s} + f_{2s+1},$$

lo cual es igual a $f_{2s+2} = f_{2(s+1)}$. Por lo tanto, la identidad (16) está probada.

$$\sum_{j=1}^{s+1} f_{2j} = f_{2s+1} - 1 + f_{2(s+1)} = f_{2s+1} + f_{2s+2} - 1 = f_{2(s+1)+1} - 1.$$

Es decir, la identidad (17) también está probada.

Esto completa la prueba del lema. □

Lema 7.4. *Supongamos que una suma de números de Fibonacci* $f_{l_1} + f_{l_2} + \cdots + f_{l_s}$ *satisface la definición 7.1. Entonces,*

$$f_{l_s} \underset{(i)}{\leq} \sum_{j=1}^{s} f_{l_j} \underset{(ii)}{\leq} f_{l_s+1}. \tag{18}$$

Demostración. Como los números de Fibonacci son positivos, la desigualdad (i) en (18) claramente se cumple.

Para probar que la desigualdad (ii) se cumple, consideraremos dos casos, que l_s es impar y que l_s es par.

Si $l_s = 2r - 1$ para $r \geq 2$ fijo,

$$\sum_{j=1}^{s} f_{l_j} \leq \sum_{j=2}^{r} f_{2j-1}$$

porque las representaciones de Zeckendorf no incluyen f_1 ni permiten números de Fibonacci consecutivos. Usando (16) en el lema 7.3,

$$\sum_{j=2}^{r} f_{2j-1} - 1 = f_{2r} - 1 = f_{l_s+1} - 1 < f_{l_s+1}.$$

Si $l_s = 2r$ para $r \geq 1$ fijo, también se tiene

$$\sum_{j=1}^{s} f_{l_j} \leq \sum_{j=1}^{r} f_{2j}$$

por la misma razón que antes. Si ahora usamos (17) en el lema 7.3,

$$\sum_{j=1}^{r} f_{2j} = f_{2r+1} - 1 = f_{l_s+1} - 1 < f_{l_s+1}.$$

Esto concluye la prueba del lema. □

Observemos que dado un número natural n, hay un único k mayor o igual que 2 tal que $f_k \leq n < f_{k+1}$. Esto se cumple porque $f_2 = 1$ y los números de Fibonacci forman una sucesión estrictamente creciente.

Ahora sí estamos listos para probar el teorema 7.2.

Demostración. Consideramos primero la existencia.

Cuando $n = 1, 2, 3$, $n = f_2, f_3, f_4$, respectivamente. Si una representación de Zenckendorf existe cuando $n < f_k$ para $k = 4, 5, \ldots,$ fijo, probaremos que también existe cuando $n < f_{k+1}$. Es decir, vamos a usar inducción en el índice k. Puesto que la existencia de la representación es clara cuando $n = f_k$, podemos suponer que $f_k < n < f_{k+1}$. Entonces,

$$n - f_k < f_{k+1} - f_k = f_{k-1} < f_k.$$

Por la hipótesis inductiva, $n - f_k$ tiene una representación de Zeckendorf, $\sum_{j=1}^{s} f_{l_j}$. Como $n - f_k < f_{k-1}$, debe de ser $l_s \leq k - 2$. Por lo tanto,

$$n = f_k + \sum_{j=1}^{s} f_{l_j}$$

es una representación de Zeckendorf para n.

Probamos ahora la unicidad de la representación, usando otra vez inducción.

Si $n = 1$, $n = f_2$ y si $n = 2$, $n = f_3$. Además, estas son las únicas representaciones. Supongamos que la representación de Zeckendorf es única para todo $n < f_k$ con $k \geq 3$ fijo. Probaremos que la representación también es única para todo $n < f_{k+1}$, para lo cual podemos suponer que $f_k \leq n < f_{k+1}$.

Si hubieran dos representaciones,

$$n = \sum_{j=1}^{s} f_{l_j} = \sum_{j=1}^{r} f_{h_j},$$

el lema 7.4 y la observación que lo sigue, implican que $f_k = f_{l_s} = f_{h_r}$.

Si $n = f_k$, entonces f_k es la única representación de n. Si $n > f_k$,

$$n - f_k < f_{k+1} - f_k = f_{k-1} < f_k.$$

Además,

$$n - f_k = \sum_{j=1}^{s-1} f_{l_j} = \sum_{j=1}^{r-1} f_{h_j}.$$

La hipótesis inductiva nos dice que $n - f_k$ tiene una única representación de Zeckendorf.

Por lo tanto, $s - 1 = r - 1$ y $l_j = h_j$ para $j = 1, \ldots, s - 1$.

Esto completa la demostración del teorema. □

Observemos que el eliminar la condición $l_1 \geq 2$ en la definición 7.1, trivialmente destruye la unicidad de la representación.

La prueba del teorema 7.2 muestra que el término mayor en la representación de un número natural n siempre es el mayor número de Fibonacci menor o igual que n. Es también así como se construye la representación de un número natural, usando potencias de 2.

Una aplicación interesante del teorema 7.2 es que los números de Fibonacci pueden usarse para codificar números naturales. En este contexto, el primer número de Fibonacci, $f_1 = 1$, es eliminado de la lista, que entonces se escribe de derecha a izquierda

$\ldots$	f_{13}	f_{12}	f_{11}	f_{10}	f_9	f_8	f_7	f_6	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1
$\ldots$	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1

A continuación mostramos algunos ejemplos de la codificación de Fibonacci, usando la representación de Zeckendorf:

Ejemplo 7.5.

$$\begin{aligned} 21 &\to (1000000)_F \\ 24 &= 21 + 3 \to (1000100)_F \\ 38 &= 34 + 3 + 1 \to (10000101)_F \\ 150 &= 144 + 5 + 1 \to (10000001001)_F \\ 378 &= 377 + 1 \to (1000000000001)_F. \end{aligned}$$

En la codificación de Fibonacci, la sucesión 11 no puede aparecer, lo cual es una diferencia fundamental entre la codificación de Fibonacci y la codificación en base 2. La transmisión de una representación de Zeckendorf se hace en reversa. Es decir, comienza con el dígito menos significativo. El agregar un 1 después del dígito más significativo, produce la sucesión $\ldots 011$, donde el último 1 se interpreta como una coma concluyendo la transmisión [15, p. 2], [9].

Peter Fenwick dice en [15, p. 2]: «El interés de las representaciones de Zeckendorf va más allá de satisfacer meramente una curiosidad intelectual. Estas representaciones son importantes en la teoría de códigos, lo cual ha sido mostrado en los trabajos de Apostólico y Fraenkel y de Fraenkel y Klein…» Por cierto, los artículos mencionados en este párrafo, son las referencias [1] y [4] en el artículo de Fenwick.

La regla de «llevar» en la suma y en la multiplicación de números decimales, se aplica sin cambios a las representaciones binarias, resultando en una aritmética simple. Este no es el caso de la codificación de Fibonacci, la cual tiene asociada una aritmética considerablemente más compleja.

Ejemplo 7.6. Reunimos aquí varios ejemplos mostrando cómo calcular una suma de Zeckendorf. Para simplificar la notación, escribiremos las representaciones sin paréntesis o subíndices.

1. $100000000000100 + 10000001 = 1000010000101$.

   Esta es la situación más sencilla, que no requiere el «llevar».
2. $10000100 + 100$.

   Simplemente sumando estas dos sucesiones, se tiene 10000200, lo cual no es un resultado permitido. Afirmamos que el trozo $\ldots 00200 \ldots$ puede ser reemplazado con $\ldots 01001 \ldots$ sin cambiar el valor. En efecto, en general,

   $$f_j = f_{j-1} + f_{j-2} = f_{j+1} - f_j + f_{j-2}$$

   o

   $$2f_j = f_{j+1} + f_{j-2}.$$

   En nuestro ejemplo,

   $$2f_3 = f_4 + f_1$$

   lo cual permite escribir la suma como 10001001.
3. $10000100 + 1000$.

   Si sumamos estas dos sucesiones obtenemos 10001100, mostrando la presencia de dos números de Fibonacci consecutivos. Podemos resolver el problema escribiendo $f_4 + f_3 = f_5$, lo cual da 10010000.

Cada uno de los ejemplos 2) y 3) presenta solamente un problema a resolver, que aparece en una posición conveniente. Esto no siempre ocurre, como podemos ver en el ejemplo

$$1010 + 1001.$$

El caso general es explicado con todo detalle en [15], no solo para la suma, sino también para todas las operaciones básicas. Algoritmos eficientes son discutidos en [10].

Para concluir, mencionamos que Donald Knuth ha definido en [20] una multiplicación, que llama «multiplicación círculo», como la operación

$$m \circ n = \sum_{b=1}^{r} \sum_{c=1}^{s} f_{j_b + k_c},$$

donde $m = f_{j_1} + \cdots + f_{j_q}$ y $n = f_{k_1} + \cdots + f_{k_r}$ son las representaciones de Zeckendorf. Knuth prueba que esta multiplicación es asociativa, y al hacer esto, explica en detalle cómo sumar representaciones de Zeckendorf.

Bibliografía

[1] «On-line encyclopedia of integer sequences», http://oeis.org/A008578.
[2] «On-line encyclopedia of integer sequences», http://oeis.org/A060715.
[3] «On-line encyclopedia of integer sequences», http://oeis.org/A203074.
[4] «On-line encyclopedia of integer sequences», http://oeis.org/A013597.
[5] «On-line encyclopedia of integer sequences», http://oeis.org/A013597/b013597.txt.
[6] «On-line encyclopedia of integer sequences», http://oeis.org/A000045.
[7] «Wikipedia», https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_prime_numbers.
[8] «Wikipedia», https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_of_Bertrand's_postulate.
[9] «Wikipedia», https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_coding.
[10] C. Ahlbach, J. Usatine, C. Frougny y N. Pippenger, «Efficient algorithms for Zeckendorf arithmetic», Julio 18, 2012, https://arxiv.org/pdf/1207.4497.pdf.
[11] J. Álvarez y L. Hughes, «La paridad de un número natural», *Miscelánea Matemática*, núm. 74, 2022, 25–38, https://miscelaneamatematica.org/Doi/432.
[12] J. L. Brown Jr., «Note on complete sequences of integers», *Amer. Math. Monthly*, vol. 68, núm. 6, 1961, 557–560, https://doi.org/10.2307/2311150.
[13] F. Cajori, *A history of mathematics*, 5.ª ed., Chelsea Publishing Company, 1991, reimpresión, American Mathematical Society, 2000.
[14] L. de Pisa, *Fibonacci's liber abaci: A translation into modern english of the book of calculation*, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer, 2002, Laurence E. Siegler (traductor).
[15] P. Fenwick, «Zeckendorf integer arithmetic», 2003, https:/www.cs.auckland.ac.n/\protect\char126\relaxpeter-f/FTPfiles/2003Zeckendorf.pdf.
[16] M. Gardner, *Mathematical circus*, The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1996.
[17] G. H. Hardy y E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 5.ª ed., The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.
[18] V. E. Hoggatt y C. King, «Problema e 1424», *Amer. Math. Monthly*, vol. 67, núm. 6, 1960, 593, https://doi.org/10.2307/2309189.
[19] R. Honsberger, *Mathematical gems iii*, The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1985.
[20] D. E. Knuth, «Fibonacci multiplication», *Appl. Math. Lett.*, vol. 1, núm. 1, 1988, 57–60, https://www.cs.umb.edu/\protect\char126\relaxrvetro/vetroBioComp/compression/FIBO/KnuthFibb.pdf.
[21] C. G. Lekkerkerker, «Voorstelling van natuurlijke getallen door een som van getallen van Fibonacci», *Simon Stevin*, vol. 29, 1952, 190–195.
[22] T. C. Scott y P. Marketos, «On the origin of the fibonacci sequence», http://www-history,mcs,st-andrews.ac.uk/Publications/fibonacci.pdf.

[23] P. Singh, «The so called fibonacci numbers in ancient and medieval india», *Historia Mathematica*, vol. 12, núm. 3, 1985, 229–244.

[24] E. Zeckendorf, «Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de fibonacci ou des nombres de lucas», *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, vol. 41, núm. 3-4, 1972, 179–182.