Miscelánea Matemática **43** (2006) 117–132 SMM

Algoritmo para resolver exactamente sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes enteros

Daniel Gómez-García
Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Coahuila

Humberto Madrid de la Vega
Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas
Universidad Autónoma de Coahuila
hmadrid@cima.uadec.mx

Resumen

En este trabajo se presenta un algoritmo para resolver sistemas de ecuaciones lineales con solución única, cuando sus coeficientes son números enteros. Siendo una variante de la eliminación Gaussiana, posee características didácticas ventajosas sobre la misma. Durante el proceso, que utiliza solo arimética entera, se obtiene el determinante de la matriz de coeficientes del sistema, sin necesidad de cálculos adicionales.

1. Introducción

En tanto la eliminación Gaussiana usa multiplicadores que confunden con frecuencia a los estudiantes y opera con fracciones que les resultan incómodas, en el algoritmo propuesto se usan determinantes enteros de orden dos en un formato que resulta muy fácil de recordar.

El algoritmo propuesto opera sobre una matriz aumentada del sistema para formar una matriz triangular superior entera y de ésta resulta el determinante de la matriz de coeficientes como un subproducto.

En una segunda etapa se modifica el vector del lado derecho multiplicándolo por el determinante mencionado y al resolver este nuevo sistema por sustitución regresiva produce los numeradores correspondientes a la regla de Cramer, los cuales son números enteros por la naturaleza del sistema. Ambas etapas del proceso utilizan exclusivamente aritmética entera.

En la sección siguiente se muestra el algoritmo por medio de ejemplos. Se anotan las características más importantes del mismo en la sección 3 y en la sección 4 se presenta su derivación a partir de la eliminación Gaussiana.

2. Presentación del algoritmo por medio de ejemplos

Se mostrará el algoritmo propuesto mediante varios ejemplos, que se resuelven a continuación.

Ejemplo 1. Sistema de dos ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcr} 5\,x_1 & + & 4\,x_2 & = & 2 \\ 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & = & 1 \end{array}.$$

Solución

• **Primera etapa, de eliminación:**

La intención es generar una matriz triangular superior de elementos enteros, a partir de la matriz aumentada del sistema. Aplicando la eliminación Gaussiana [8, p. 3], se forman las matrices equivalentes

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 3-\dfrac{2}{5}(4) & 1-\dfrac{2}{5}(2) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 2 \\ 0 & \dfrac{7}{5} & \dfrac{1}{5} \end{array}\right].$$

Una manera de convertir estos números fraccionarios en números enteros consiste en multiplicarlos por el denominador de los multiplicadores Gaussianos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5(3)-2(4) & 5(1)-2(2) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 2 \\ 0 & \left|\begin{array}{cc} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{array}\right| & \left|\begin{array}{cc} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}\right| \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{array}\right].$$

La eliminación puede anotarse económicamente en un arreglo tabular, según se muestra:

$$\begin{array}{|cc|c|} \boxed{5} & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ \hline & 7 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{con los cálculos} \quad |A| = \begin{vmatrix} \boxed{5} & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \begin{vmatrix} \boxed{5} & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

El determinante de la matriz de coeficientes se obtiene siempre como un subproducto de la primera etapa.

• **Segunda etapa, de sustitución regresiva:**

La solución de $A\,x = b$ puede obtenerse de $\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{array}\right]$ usando normalmente aritmética fraccionaria; pero como ahora se conoce $|A| = 7$, por la regla de Cramer [9, p. 259] la solución es $x = \dfrac{y}{|A|}$, es decir,

$$A\,x = b, \quad \rightarrow \quad A\,|A|\,x = |A|\,b, \quad \rightarrow \quad A\,y = |A|\,b,$$

y para operar en esta etapa con aritmética entera, basta con encontrar múltiplos de x, $y = |A|\,x$, —los numeradores de la regla de Cramer que como se sabe son enteros cuando la matriz aumentada original es entera— obtenidos por sustitución regresiva en el sistema modificado

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 7(2) \\ 0 & 7 & 7(1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 14 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

resultante de multiplicar el lado derecho de la matriz recién obtenida, por el valor (7) del determinante. En efecto, del último renglón, $y_2 = \dfrac{7}{7} = 1$, y del primero, $y_1 = \dfrac{14 - 4y_2}{5} = \dfrac{14 - 4(1)}{5} = 2$, que ya se ha mencionado, corresponden a los numeradores enteros de la regla de Cramer. La solución racional es:

$$x = \frac{1}{|A|}\,y = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aunque la solución es fraccionaria, ha sido posible expresarla en forma racional, utilizando en todos los cálculos aritmética entera, exclusivamente.

Ejemplo 2. Sistema de tres ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 0 \\ 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Solución

• **Primera etapa, de eliminación:**

Se forman las matrices equivalentes de elementos enteros:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{3} & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & 7 & -1 \\ 0 & -14 & 13 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 33 & 6 \end{array}\right],$$

obtenidas con determinantes de orden dos:

$$\begin{vmatrix} \boxed{3} & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} \boxed{3} & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad \begin{vmatrix} \boxed{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{3} & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -14, \quad \begin{vmatrix} \boxed{3} & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 13, \quad \begin{vmatrix} \boxed{3} & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{-5} & 7 \\ -14 & 13 \end{vmatrix} = 33, \quad \begin{vmatrix} \boxed{-5} & -1 \\ -14 & -4 \end{vmatrix} = 6.$$

El último renglón de la matriz triangular es divisible entre 3, que es justamente el pivote previo al momento de calcular sus elementos. Por lo tanto, dividiendo entre 3 el último renglón, notamos que los valores

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 2 \end{array}\right]$$

actualizados de este tercer renglón corresponden a los determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{-5} & 7 \\ -14 & 13 \end{vmatrix}}{3} = 11,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{-5} & -1 \\ -14 & -4 \end{vmatrix}}{3} = 2.$$

• **Segunda etapa, de sustitución regresiva:**

Se modifica el sistema de la primera etapa, multiplicando la última columna por $|A| = 11$, obteniendo

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 3 & 2 & -1 & 11(1) \\ 0 & -5 & 7 & 11(-1) \\ 0 & 0 & 11 & 11(2) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & -5 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{array}\right],$$

que se resuelve por sustitución regresiva para obtener los numeradores de Cramer: $y_1 = 1$, $y_2 = 5$, $y_3 = 2$, de tal manera que la solución del sistema es $x = \dfrac{1}{11}\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix}$. Como era de esperarse, los numeradores de Cramer son números enteros y la solución es racional.

En el proceso de sustitución, también se ha usado aritmética entera.

Una forma de organizar los cálculos, cuando se hacen con papel y lápiz, consiste en preparar un arreglo tabular compacto que contiene las cuentas de la primera etapa y la columna modificada. La sustitución regresiva se hace directamente para encontrar los numeradores de Cramer y luego la solución:

A			b	$\lvert A\rvert\, b$	
$\boxed{3}$	2	-1	1	11	$y_1 = \dfrac{11-2(5)+1(2)}{3} = 1,\quad x_1 = \dfrac{1}{11}$
1	-1	2	0		
4	-2	3	0		
	$\boxed{-5}$	7	-1	-11	$y_2 = \dfrac{-11-7(2)}{-5} = 5,\quad x_2 = \dfrac{5}{11}$
	-14	13	-4		
		$\lvert A\rvert = 11$	2	22	$y_3 = \dfrac{22}{11} = 2,\quad x_3 = \dfrac{2}{11}$

La denominación de *pivotes,* que se asigna a los valores enmarcados, resulta evidente. Los pivotes están limitados a pertenecer a la diagonal principal y deben tener valores no nulos, $a_{pp} \neq 0$. Si $a_{pp} = 0$, debe intentarse el intercambio de los renglones i con p para llevar a la posición pivotal un elemento $a_{ip} \neq 0,\ i > p$, en cuyo caso debe ajustarse el signo del determinante [8, p. 470]: $|A| = (-1)^q\, a_{nn}$; siendo q el número de intercambios de renglón que se hayan efectuado y $n \times n$ el orden de la matriz A. Si $a_{pp} = 0$ y es imposible intercambiar los renglones, $|A| = 0$.

Omitiendo la escritura de la sustitución regresiva de los numeradores y, el arreglo numérico contiene la información mínima:

A			b	$\lvert A\rvert\, b$	
$\boxed{3}$	2	-1	1	11	$x_1 = \dfrac{1}{11}$
1	-1	2	0		
4	-2	3	0		
	$\boxed{-5}$	7	-1	-11	$x_2 = \dfrac{5}{11}$
	-14	13	-4		
		$\lvert A\rvert = 11$	2	22	$x_3 = \dfrac{2}{11}$

En los numeradores de esta solución se han anotado directamente los resultados de la sustitución regresiva, y.

Los denominadores de la solución comparten el valor de $|A| = 11$.

Ejemplo 3. Sistema de cuatro ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x_1 & + & x_2 & - & 2\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & 1 \\ 3\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 5\,x_1 & & & + & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & -1 \end{array}.$$

Solución

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{2} & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

A partir de ésta, se obtienen matrices equivalentes, cuyos elementos se calculan con determinantes de segundo orden, divididos entre su pivote anterior (excepto en el primer paso. Optativamente, el pivote anterior inicial se define como 1.)

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ 0 & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ 0 & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -8 & 1 \\ 0 & -5 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & -3 & 8 & 6 & -3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 14 \end{vmatrix}}{2} & \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -8 \\ -5 & -8 \end{vmatrix}}{2} & \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}}{2} & \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -8 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}}{2} & \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}}{2} \end{array}\right] =$$

$$
= \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -16 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -15 & 3 \end{array}\right]
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{rrrc|c} 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -16 \\ 2 & -15 \end{vmatrix}}{-1} & \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -5 \end{array}\right].
$$

Los cálculos de las matrices equivalentes anteriores, añadiendo el vector del lado derecho modificado para obtener los numeradores de la regla de Cramer, toman la forma alternativa más compacta:

A				b	$\lvert A\rvert\, b$	
$\boxed{2}$	1	−2	2	1	13	$y_1 = \dfrac{13-(-45)+2(-18)-2(-5)}{2} = 16$
3	1	−1	−1	2		
5	0	2	1	3		
1	−1	3	4	−1		
	$\boxed{-1}$	4	−8	1	13	$y_2 = \dfrac{13-4(-18)+8(-5)}{-1} = -45$
	−5	14	−8	1		
	−3	8	6	−3		
		$\boxed{3}$	−16	2	26	$y_3 = \dfrac{26+16(-5)}{3} = -18$
		2	−15	3		
			$\lvert A\rvert = 13$	−5	−65	$y_4 = \dfrac{-65}{13} = -5$

$$
x = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 16 \\ -45 \\ -18 \\ -5 \end{bmatrix}.
$$

Ejemplo 4. Un sistema fraccionario cuyos coeficientes forman una matriz de Hilbert

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & + & \frac{1}{4}x_4 & = & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{1}{4}x_3 & + & \frac{1}{5}x_4 & = & 0 \\ \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{4}x_2 & + & \frac{1}{5}x_3 & + & \frac{1}{6}x_4 & = & 0 \\ \frac{1}{4}x_1 & + & \frac{1}{5}x_2 & + & \frac{1}{6}x_3 & + & \frac{1}{7}x_4 & = & 0 \end{array}.
$$

Solución

Para operar con el algoritmo, primero se multiplican los renglones por 12, 60, 60 y 420, respectivamente, resultando el arreglo de elementos enteros $A^*x = b^*$:

A^*				b^*	$\lvert A^*\rvert\, b^*$	
$\boxed{12}$	6	4	3	3	9	$x_1 = \dfrac{12}{3} = 4$
30	20	15	12	0		
20	15	12	10	0		
105	84	70	60	0		
	$\boxed{60}$	60	54	-90	-270	$x_2 = \dfrac{-90}{3} = -30$
	60	64	60	-60		
	378	420	405	-315		
		$\boxed{20}$	30	150	450	$x_3 = \dfrac{180}{3} = 60$
		210	324	1260		
		$\lvert A^*\rvert = 3$		-105	-315	$x_4 = \dfrac{-105}{3} = -35$

$$\begin{aligned} |A| &= |H_4| = \frac{3}{12 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 420} \\ |A| &= \frac{1}{6\,048\,000}. \end{aligned}$$

Cuando las incógnitas x tienen valores enteros, pueden obtenerse del lado derecho b, sin necesidad de usar su valor modificado $|A|b$.

3. Características del algoritmo

Como se ha podido apreciar en los ejemplos, el algoritmo forma una matriz triangular superior a partir de la matriz aumentada asociada al sistema, por medio de operaciones con aritmética entera que involucran el cálculo de determinantes de orden dos. En la sustitución regresiva se mantiene la aritmética entera para evaluar la solución que coincide con la de Cramer.

- En comparación con los multiplicadores asociados a la eliminación Gaussiana que les representan dificultades a los estudiantes al no recordar claramente su estructura y a las incómodas operaciones con números fraccionarios, los determinantes propios del cálculo con el algoritmo propuesto involucran a cuatro elementos que están localizados en los renglones y columnas del elemento pivote y del elemento a modificar, dentro de un formato que resulta nemotécnico.
- La forma tabular para resolver sistemas de ecuaciones lineales con papel y lápiz representa una posibilidad muy cómoda y sencilla y

a diferencia de la eliminación Gaussiana resulta conveniente para resolver a mano, auxiliándose de una calculadora.

- El proceso es perfectamente general: para resolver cualesquier sistema sólo es necesario realizar las operaciones tipificadas en los casos de dos o de tres ecuaciones.

- Durante la etapa de eliminación el algoritmo obtiene —sin ningún esfuerzo adicional— el determinante de la matriz de coeficientes $|A|$. Si este valor resulta nulo, el sistema no posee solución única y el proceso de cálculo se interrumpe en ese momento.

- Además, el algoritmo representa una opción viable y sencilla para evaluar determinantes enteros de orden moderado mediante el cálculo de determinantes enteros de orden dos.

- El algoritmo es aplicable a otros tópicos de Álgebra Lineal: cálculo de A^{-1}, generación de matrices con orden y determinante entero dados, construcción de una matriz entera A tal que A^{-1} también sea entera (esta aplicación se relaciona con las descritas en [1, pp. 215–218] y [6], pero es más general), generación de una matriz entera con eigenvalores enteros dados y eigenvectores enteros. Ver [4].

- El algoritmo puede generalizarse para tratar con sistemas de m ecuaciones y n variables. En particular, permite evaluar el rango de una matriz en una forma entera algo similar a la descrita en [1, pp. 175–177] y [2], pero que opera con números más pequeños.

- La codificación del algoritmo en cualquier lenguaje computacional es simple.

Por sus ventajas didácticas, el algoritmo ha sido muy bien acogido en el aula, donde se ha enseñado desde que uno de los autores [3] lo desarrolló en 1976. Existe una tesis de maestría [7] que da cuenta de su aceptación y de sus circunstancias didácticas, observadas en un estudio amplio en las aulas.

4. Justificación matemática del algoritmo

Por conveniencia, se definen

$$a_{00}^{(0)} = 1, \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

y se denotan las matrices equivalentes:

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}^{(1)}} & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}^{(1)}} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & \boxed{a_{22}^{(2)}} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{bmatrix},$$

y así sucesivamente.

Para mayor claridad se han enmarcado los *elementos pivotales.*

4.1. Primera etapa: eliminación

Con el fin de comparar las eliminaciones Gaussiana y del algoritmo propuesto, se ha preparado el Cuadro 1 que muestra en forma reducida un ejemplo de ambas aplicadas a la misma matriz, que denominaremos B y A, respectivamente. Se usará la notación: $B^{(p)} = \left(b_{ij}^{(p)}\right)$ y $A^{(p)} = \left(a_{ij}^{(p)}\right)$, donde los índices varían en contexto.

En el ejemplo se aprecian algunas relaciones entre las dos eliminaciones, como la que existe entre sus valores

$$\left. b_{ij}^{(1)} = \frac{a_{ij}^{(1)}}{a_{00}^{(0)}}, \quad b_{ij}^{(2)} = \frac{a_{ij}^{(2)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad b_{ij}^{(3)} = \frac{a_{ij}^{(3)}}{a_{22}^{(2)}}, \quad b_{ij}^{(4)} = \frac{a_{ij}^{(4)}}{a_{33}^{(3)}} \right\} \boxed{b_{ij}^{(p)} = \frac{a_{ij}^{(p)}}{a_{p-1,p-1}^{(p-1)}}} \tag{1a}$$

y la que guardan sus formas de evaluar los determinantes. Para referirnos a ellos usaremos la notación siguiente

$$\delta_{22}^{(2)} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 19, \quad \delta_{33}^{(3)} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18, \quad \delta_{34}^{(3)} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 16,$$

Cuadro 1: Eliminaciones Gaussiana y del algoritmo para $B = A$. Observe que: $\left(b_{ij}^{(1)}\right) \times a_{00}^{(0)} = \left(a_{ij}^{(1)}\right), \quad \ldots, \quad \left(b_{ij}^{(4)}\right) \times a_{33}^{(3)} = \left(a_{ij}^{(4)}\right)$.

B					A			
$\boxed{7}$	3	1	4		$\boxed{\mathbf{7}}$	3	1	4
3	4	2	1	$\times a_{00}^{(0)} =$	3	4	2	1
1	2	2	1		1	2	2	1
1	1	2	2		1	1	2	2
	$\boxed{2{,}7143}$	1,5714	−0,7143			$\boxed{\mathbf{19}}$	11	−5
	1,5714	1,8571	0,4286	$\times a_{11}^{(1)} =$		11	13	3
	0,5714	1,8571	1,4286			4	13	10
		$\boxed{0{,}9474}$	0,8421	$\times a_{22}^{(2)} =$			$\boxed{\mathbf{18}}$	16
		1,5263	1,5789				29	30
			0,2222	$\times a_{33}^{(3)} =$				$\boxed{\mathbf{4}}$

donde: $a_{00}^{(0)} = \mathbf{1}, \quad a_{11}^{(1)} = \mathbf{7}, \quad a_{22}^{(2)} = \mathbf{19}, \quad a_{33}^{(3)} = \mathbf{18}, \quad a_{44}^{(4)} = \mathbf{4}.$

$$\delta_{43}^{(3)} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 29, \quad \delta_{44}^{(4)} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 = |A|.$$

Los cálculos con eliminación Gaussiana mediante productos que involucran a la diagonal principal de la matriz triangular [5, p. 178], son contrastados luego con los resultados del algoritmo:

$$\underbrace{\begin{array}{ll} \delta_{11}^{(1)} = 7 = a_{11}^{(1)}, & \delta_{22}^{(2)} = 7(2{,}7143) = 19 = a_{22}^{(2)} \\ \delta_{33}^{(3)} = 7(2{,}7143)(0{,}9474) = 18 = a_{33}^{(3)}, & \delta_{34}^{(3)} = 7(2{,}7143)(0{,}8421) = 16 = a_{34}^{(3)} \\ \delta_{43}^{(3)} = 7(2{,}7143)(1{,}5263) = 29 = a_{43}^{(3)}, & \delta_{44}^{(4)} = 7(2{,}7143)(0{,}9474)(0{,}2222) = 4 = a_{44}^{(4)} \end{array}}$$

$$\boxed{\delta_{ij}^{(p)} = a_{ij}^{(p)}} \tag{1b}$$

De los resultados (1a) y (1b), surgen las dos conjeturas siguientes:

Conjetura 1: Cada tabla correspondiente a la eliminación Gaussiana es igual al cociente de la correspondiente tabla del algoritmo dividida entre el pivote anterior del mismo.

Conjetura 2: Cada uno de los resultados intermedios obtenidos con el algoritmo es el determinante (entero) de una submatriz de la matriz original.

Las expresiones de la eliminación Gaussiana, cuando no es necesario intercambiar renglones, tienen la forma:

$$p = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad i, j > p:$$
$$b_{ij}^{(p+1)} = b_{ij}^{(p)} - \frac{b_{ip}^{(p)}\, b_{pj}^{(p)}}{b_{pp}^{(p)}}, \qquad b_{ip}^{(p)} = 0$$

Para probar la primera conjetura se sustituye (1a) en las ecuaciones anteriores:

$$\frac{a_{ij}^{(p+1)}}{a_{pp}^{(p)}} = \frac{a_{ij}^{(p)}}{a_{p-1,p-1}^{(p-1)}} - \frac{\dfrac{a_{ip}^{(p)}}{a_{p-1,p-1}^{(p-1)}}\,\dfrac{a_{pj}^{(p)}}{a_{p-1,p-1}^{(p-1)}}}{\dfrac{a_{pp}^{(p)}}{a_{p-1,p-1}^{(p-1)}}}, \qquad \frac{a_{ip}^{(p)}}{a_{p-1,p-1}^{(p-1)}} = 0$$

resultando las expresiones

$$a_{ij}^{(p+1)} = \frac{a_{pp}^{(p)}\, a_{ij}^{(p)} - a_{ip}^{(p)}\, a_{pj}^{(p)}}{a_{p-1,p-1}^{(p-1)}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{pp}^{(p)} & a_{pj}^{(p)} \\ a_{ip}^{(p)} & a_{ij}^{(p)} \end{vmatrix}}{a_{p-1,p-1}^{(p-1)}}, \qquad a_{ip}^{(p)} = 0$$

que como corresponden justamente al algoritmo propuesto, se ha verificado la primera conjetura. El vector del lado derecho de $A\,x = b$ se transforma de la misma forma.

Para demostrar la segunda conjetura vamos a tomar del texto de un influyente autor [10, pp. 203–204], expresiones de la eliminación Gaussiana que allí aparecen con los números (19.11), (19.12) y (19.14). Con una notación que resulta más apropiada a nuestros fines, pueden disponerse en la forma siguiente

$$p = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad i, j > p:$$
$$b_{ij}^{(p+1)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & a_{pj} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} & a_{ij} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix}} = \frac{\delta_{ij}^{(p+1)}}{b_{11}^{(1)}\, b_{22}^{(2)} \cdots b_{pp}^{(p)}}.$$

El denominador es el *determinante del menor principal* (o simplemente, *menor principal*) de orden p que es igual al producto de los elementos de la diagonal principal correspondientes a la matriz triangular superior obtenida al realizar eliminación Gaussiana [5, p. 178] sobre B. Entonces, el numerador anterior es el determinante de orden $p+1$ siguiente

$$p = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad i, j > p:$$

$$\delta_{ij}^{(p+1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & a_{pj} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} & a_{ij} \end{vmatrix} = b_{11}^{(1)}\, b_{22}^{(2)} \cdots b_{pp}^{(p)} \cdot b_{ij}^{(p+1)}. \tag{2a}$$

Combinando (2a) con el cambio de variable (1a), se obtienen los resultados intermedios del algoritmo:

• Determinantes de segundo orden $(\,p = 1, \quad i, j > 1\,)$.

$$\delta_{ij}^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} = b_{11}^{(1)} \cdot b_{ij}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)}}{a_{00}^{(0)}} \cdot \frac{a_{ij}^{(2)}}{a_{11}^{(1)}} = a_{ij}^{(2)}. \tag{2b}$$

• Determinantes de tercer orden $(\,p = 2, \quad i, j > 2\,)$.

$$\delta_{ij}^{(3)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} \end{vmatrix} = b_{11}^{(1)}\, b_{22}^{(2)} \cdot b_{ij}^{(3)} = \frac{a_{11}^{(1)}}{a_{00}^{(0)}}\, \frac{a_{22}^{(2)}}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{a_{ij}^{(3)}}{a_{22}^{(2)}} = a_{ij}^{(3)}. \tag{2c}$$

• Para determinantes de orden n $(\,p = n-1, \quad i, j > n-1\,)$, es necesario verificar

$$\delta_{ij}^{(n)} = b_{11}^{(1)}\, b_{22}^{(2)} \cdots b_{n-1}^{(n-1)}\, b_{ij}^{(n)} = \frac{a_{11}^{(1)}}{a_{00}^{(0)}}\, \frac{a_{22}^{(2)}}{a_{11}^{(1)}} \cdots \frac{a_{n-1}^{(n-1)}}{a_{n-2,n-2}^{(n-2)}} \cdot \frac{a_{ij}^{(n)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} = a_{ij}^{(n)}$$

que para $i = j = n$ produce el determinante de la matriz de coeficientes

$$\delta_{nn}^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| = a_{nn}^{(n)}. \tag{2d}$$

Así concluye la demostración de la conjetura 2, ya que las ecuaciones (2) implican que:

Todos los valores calculados durante la etapa de eliminación del algoritmo son determinantes enteros.

4.2. Segunda etapa del algoritmo

La solución del sistema formado con elementos enteros

$$A\,x \;=\; b, \tag{3a}$$

cuya solución generalmente es fraccionaria, puede expresarse en forma racional mediante la regla de Cramer

$$x \;=\; \frac{y}{|A|} \tag{3b}$$

donde y es un vector de números enteros y $|A|$ es un número entero. Sustituyendo (3b) en (3a), se tiene $A\,\dfrac{y}{|A|} = b$, de donde surge el sistema modificado:

$$A\,y \;=\; |A|\,b. \tag{3c}$$

La aplicación de la primera etapa del algoritmo permite disponer de las matrices triangulares de (3a) y de (3c), toda vez que $a_{nn} = |A|$:

$$\begin{array}{rcl}
\left[\, A \,\middle|\, b \,\right] & \sim & \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \\
\left[\, A \,\middle|\, |A|\,b \,\right] & \sim & \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & |A|\,b_1 \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} & |A|\,b_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn} & |A|\,b_n \end{array}\right].
\end{array} \tag{3d}$$

Se ha omitido la escritura de los índices de los elementos y de los ceros inferiores de las matrices triangulares.

Usaremos la segunda matriz de (3d) para aplicar la sustitución regresiva. Del último renglón se obtiene el número entero

$$y_n \;=\; \frac{|A|\,b_n}{a_{nn}} = \frac{a_{nn}\,b_n}{a_{nn}} = b_n, \tag{4a}$$

y se continúa con la sustitución regresiva en los otros renglones:

Para $i = n-1, n-2, \ldots, 1$, se obtienen los enteros siguientes

$$y_i \;=\; \frac{|A|\,b_i - a_{i,i+1}\,y_{i+1} - a_{i,i+2}\,y_{i+2} - \cdots - a_{in}\,y_n}{a_{ii}}. \tag{4b}$$

Las expresiones (4) constituyen la sustitución regresiva del algoritmo. La solución racional está dada por la expresión (3b).

En resumen, con este algoritmo se obtiene la solución, cuando es única, del sistema de elementos enteros $A\,x = b$, operando con aritmética entera sobre $[A|b]$ en las dos etapas siguientes:

Eliminación. *Se produce una matriz triangular superior con elementos enteros utilizando determinantes de segundo orden, divididos entre el pivote anterior correspondiente*

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

$|A| = a_{nn}$ *es el determinante de la matriz de coeficientes y los elementos restantes son determinantes enteros de submatrices pertenecientes a la matriz original* $[A|b]$.

Sustitución regresiva. *A partir del sistema modificado*

$$\left[\begin{array}{c|c} A & |A|\,b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & |A|\,b_1 \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} & |A|\,b_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn} & |A|\,b_n \end{array}\right]$$

se obtiene el vector entero, y, *mediante sustitución regresiva.*

Solución racional $x = \dfrac{y}{|A|}$. *Como la solución es única, coincide con la de Cramer.*

Referencias

[1] D. Carlson, Ch. Johnson, D. Lay, A. Porter, Editores. "Linear algebra gems assets for undergraduate mathematics". *The Mathematical Association of America, MAA Notes No. 59*, Washington., 2002.

[2] L. Gerstein. *A new algorithm for computing the rank of a matrix.* American Mathematical Monthly **95.** (1988) 950–952.

[3] D. Gómez. *DGO algoritmo para obtener la solución exacta de sistemas de ecuaciones lineales.* Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro. Folletos técnicos **1.** (1985) 1–18.

[4] D. Gómez y H. Madrid. *Álgebra lineal con números enteros.* Educación Matemática **3**, No. 3. (1991) 82–100.

[5] S. Grossman. "Álgebra lineal", 4a Ed. *McGraw-Hill/Interamericana de México*, México., 1999.

[6] R. Hanson. *Integer matrices whose inverses contain only integers.* College Mathematics Journal **13.** (1982) 18–21.

[7] J. Mellado. “Aplicación del algoritmo DGO para la solución de ecuaciones simultáneas en educación superior”. Tesis de Maestría: Facultad de Ciencias de la Educación y Humanidades, *Universidad Autónoma de Coahuila.*, 1993.

[8] C. Meyer. “Matrix analysis and applied linear algebra”. *SIAM*, Philadelphia., 2000.

[9] G. Strang. “Introduction to linear algebra”, 3a Ed. *Wellesley-Cambridge Press*, Wellesley MA., 2005.

[10] J. Wilkinson. “The algebraic eigenvalue problem”. *Oxford University Press*, Clarendon Press Oxford., 1965.