RESEÑA DEL LIBRO:

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS.

Por M. Braun. Applied Mathematical Sciences 15, Springer Verlag, 1975

Por: Jorge IZE*

Al dar un curso introductorio, el profesor se enfrenta siempre con el problema de encontrar un libro de texto afín a sus propios gustos sobre la materia. En la mayoría de los casos tal libro no existe y se mezclan libros, apuntes, lecturas y demás indagaciones con mucho beneficio y satisfacción para el mismo profesor. En cambio el alumno, en general de recién ingreso, dedica parte de su tiempo al difícil pero necesario ejercicio de consulta de varios textos, tratando de comparar resultados y notaciones de cada uno de ellos. Un posible remedio es el de distribuir apuntes con el inconveniente de una mala letra, una presentación deficiente, una fuerte inversión de tiempo y demás contingencias. Por otra parte, independientemente de la bondad del estudio complementario fuera de las aulas, el alumno de los primeros semestres de una carrera tiene la necesidad psicológica de asegurarse en un texto impreso de la veracidad de lo expuesto en clase. Ante estas contradicciones no les quedaría teóricamente más a los profesores que el producir sus propios textos, trabajo para el

---

* Investigador de tiempo completo del IIMAS y profesor de asignatura de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

cual no todos tienen, tenemos, el gusto la aptitud y el tiempo; o esperar el milagro de toparse con el libro que uno hubiera querido escribir pero que nunca se atrevió a hacerlo.

Todo este preámbulo para relatar mi sorpresa y subsecuente entusiasmo al "descubrir", hace un par de años, el libro de Braun, lo cual me llevó a escribir esta reseña a pesar del éxito de este libro, con varias ediciones y por lo menos dos versiones, y de los muy pertinentes comentarios de Jerry Bona en el Bulletin of the A.M.S. de enero de 1978.

Antes de entrar en detalles quisiera precisar lo que entiendo por un curso introductorio, en este caso a las ecuaciones diferenciales; quedarán así más claras las razones, totalmente personales, de apreciar el libro de Braun y, evidentemente, el lector tiene todo el derecho en no estar de acuerdo con ellas. Para mí, un curso de esta índole debe ser a la vez simple y no superficial, de ninguna manera debe limitarse a una preparación a cursos más avanzados ni a un conjunto de tecnicas que el alumno aplica sin entender. Tal curso no debe presuponer matemáticas avanzadas ni conocimientos extensos en los campos de aplicación: En este caso son prerequisitos suficientes un buen manejo del cálculo en una variable, algunas nociones de álgebra lineal y de números complejos que se pueden adquirir sobre la marcha, algún barniz de Física como la ley de Newton y algo de sentido común.

A partir de estas bases el curso debe dar un panorama amplio de los rasgos importantes de la teoría y de sus usos haciendole sentir al alumno que la materia no es una parte fósil de las matemáticas.

Claramente no se puede cambiar totalmente el material básico de un primer curso en ecuaciones diferenciales: El libro debe cubrir ecuaciones de primer orden, ecuaciones lineales de segundo orden, algo de sistemas y algunos temas al gusto del autor. Ahora bien, en la gran mayoría de los textos introductorios, el autor, investigador respetado, impone su enfoque particular aun en el material básico dando al lector una vista parcial del tema. Es así que el "teórico" se concentrará en todos los teoremas de existencia y unicidad conocidos, en espacios vectoriales y matrices fundamentales sin ir mucho más lejos ya que el tratamiento matemático riguroso se vuelve más difícil, mientras que el "aplicado" dedicará mucho espacio a técnicas de resolución, en general analíticas y esencialmente el método de series poco útil para ecuaciones regulares y requiriendo de una comprensión matemática más profunda en el caso de ecuaciones singulares. En ambos casos los ejemplos o son meramente ejercicios de cálculo y las aplicaciones, cuando las hay, se limitan a lo trillado: crecimiento exponencial, paracaidista, resortes y circuitos, o requieren de extensos conocimientos de Física.

Por lo tanto, el libro ideal debe presentar el mismo material pero introduciendo los conceptos de manera natural y sólo cuando sean necesarios, haciendo un balance entre lo teórico y lo aplicado y, en la medida de lo posible, encontrando aplicaciones nuevas y fáciles de entender destacando la actividad de creación de modelos matemáticos con sus aciertos y sus fallas.

¿Cómo se las ingenia Braun para cumplir con este programa utópico y subjetivo?

Las características generales del libro de Braun son: un estilo muy agradable, un rítmo razonablemente lento con explicaciones extensas de los conceptos nuevos y, sobre todo, una colección de ejemplos, tanto en el texto como en los problemas, que integran una magnífica ilustración del proceso de construcción de modelos matemáticos. En ese sentido Braun va mucho más alla de lo que se puede encontrar en textos similares ya que, como lo veremos más adelante, no se limita a plantear el modelo y resolver las ecuaciones, sino que compara los resultados con los datos experimentales, critíca y corrige el modelo según las necesidades, enseñándole al lector una actitud sana frente a esta rama de las matemáticas.

En el primer capítulo del libro, el material clásico sobre ecuaciones de primer orden, ecuaciones lineales o separables, factores integrantes, es tratado de manera sencilla pero con un rigor matemático rara vez visto a este nivel. Los ejemplos ilustrativos de cada una de estas tecnicas son presentados de manera novedosa: El problema de decaimiento radioactivo es expuesto con ejemplos concretos de determinar fechas con carbono radioactivo y con la prueba de falsificación de pinturas de Jan Vermeer La historia de las pinturas falsas y las controversias entre expertos en arte se lee como una novela y la parte matemática, resuelta en 1967 por científicos de la Universidad de Carnegie Mellon, es la siguiente: En las pinturas antiguas se usaba un pigmento a base de plomo blanco radioactivo de media vida de 22 años. En el mineral este plomo se encuentra en equilibrio con radio 226 de media vida de 1600 años pero, en el momento de la extracción, los procesos químicos remueven la mayor parte del radio destruyendo el equilibrio.

Entonces si $x(t)$ y $y(t)$ son las cantidades, en un gramo de plomo ordinario, de radio que queda y de plomo blanco respectivamente, tendremos:

$$\frac{dx}{dt} = -\mu x \qquad x(t_0) = x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y + \mu x \qquad y(t_0) = y_0$$

cuya solución es:

$$x(t) = e^{-\mu(t-t_0)} x_0$$

$$y(t) - e^{-\lambda(t-t_0)} y_0 + \frac{\mu x_0}{\lambda-\mu}(e^{-\mu(t-t_0)} - e^{-\lambda(t-t_0)}) .$$

Ahora bien, como x_0 es muy pequeño y μ es tan pequeño que, sobre un periodo de 300 años, el nivel de radio permanece casi constante, podemos aproximar la segunda ecuación por:

$$y \simeq e^{-\ (t-t_0)} y_0 + \frac{\mu x_0}{\lambda} (1-e^{-\lambda(t-t_0)})$$

con el resultado:

$$t-t_0 \simeq \frac{1}{\lambda} \operatorname{Log} \left(\frac{\lambda y_0 - \mu x_0}{\lambda y(t) - \mu x_0} \right)$$

Teóricamente el problema queda resuelto ya que $\lambda y(t)$ es el número de desintegraciones por unidad de tiempo del plomo en la pintura en su estado actual μx_0 es prácticamente $\mu x(t)$ el número de desintegraciones por unidad de tiempo del radio en la pintura y λy_0 sería el número de desintegraciones en un mineral recién procesado. Desafortunadamente λy_0 varía según las minas desde 0.18 hasta 140. Sin quedarse ahí, Braun explica que, $t-t_0$ siendo una función creciente de λy_0, se puede expresar λy_0 en función de $t-t_0$ y, suponiendo la pintura auténtica, con $t-t_0$ igual a 300 años, se logra dar una estimación sobre λy_0 En el caso de la pintura "Discípulos de Emaus", certificada por expertos y vendida en 170000 dólares, se calcula que λy_0 es casi 100000 desintegraciones por minuto, mucho más de lo que podría uno esperar aún con fuertes errores en las mediciones, probando la falsificación.

Más adelante, Braun cambia el clásico ejemplo del paracaidista por una discusión interesante sobre la caída en el mar de barriles con desechos radioactivos y, en el problema de poblaciones, el autor no se limita a la ley de Malthus o a la curva logística sino que dá además unos datos experimentales sorprendentes y aplica críticamente el modelo a la rapidez con la cual se adoptan nuevos inventos tecnológicos.

Después de demostrar la imposibilidad de resolver exactamente la mayoría de las ecuaciones diferenciales, Braun prueba el teorema de Picard recalcando la importancia de ese resultado en esos casos y aprovecha el esquema de aproximación para estudiar el método de Newton, ecuaciones en diferencias finitas y varios métodos numéricos incluyendo el análisis de error, lo cual es bastante poco usual en esta clase de libros. Tengo que mencionar al respecto el ejemplo, muy útil actualmente, de la ecuación en diferencias finitas resultando del cálculo de intereses sobre préstamos bancarios.

En el segundo capítulo, Braun estudia las ecuaciones lineales de segundo orden; la parte matemática: álgebra del espacio de soluciones, propiedades del wronskiano, reducción de orden y variación de parámetros es clásica y fundamentada en el teorema de existencia-unicidad cuya prueba es dejada para el siguiente capítulo sobre sistemas. Acto seguido, Braun trata las ecuaciones con coeficientes constantes derivando la ecuación característica al proporner soluciones exponenciales; por razones didácticas, prefiero un método análogo al completar cuadrados para polinomios de segundo grado:
Dándose uno cuenta que:

$$\left(x'' + \frac{b}{a}x'\right) e^{\frac{b}{2a}t} = \left(e^{\frac{b}{2a}t}x\right)'' - \frac{b^2}{4a^2}x$$

la ecuación:

$$ax'' + bx' + cx = 0$$

se transforma en:

$$v'' - \alpha v = 0$$

para $v = e^{\frac{b}{2a}t}x$ y con $\alpha = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Esta última ecuación es fácil de resolver según los valores de α, evitando de ese modo una discusión un poco pesada sobre funciones complejas, reducción de orden y soluciones propuestas de manera arbitraria.

En cuanto a los ejemplos, además de los clásicos resortes y circuitos electricos, Braun explica el trabajo de Von Karman sobre vórtices en relación con las oscilaciones de un puente excitado por el viento y expone un modelo médico interpretando las pruebas de tolerancia a la glucosa por diabéticos donde se observan oscilaciones de relajación. Quizás hubiera sido pertinente incluir algunos ejemplos de fricción sólida o con fuerzas discontínuas y un estudio más profundo del retratc fase del péndulo completo.

La segunda parte del capítulo consiste en una breve sección sobre soluciones en series para ecuaciones singulares y una corta introducción a los métodos del cálculo operacional. La parte dedicada a series es un justo balance entre las tendencias a demostrar todos los criterios de convergencia y a poner demasiado énfasis en las funciones especiales, mientras que la reservada a la transformada de Laplace, sin ejemplos, podría dejarse en un primer curso cómo material opcional.

El capítulo tres es quizás el más matemático; trata de sistemas y desarrolla toda el álgebra lineal necesaria: Espacios vectoriales, independencia lineal, matrices, determinantes, valores propios, exponenciales y sus aplicaciones a sistemas. Para el lector que ya está familiarizado con este material se tratará solamente de un repaso rápido y deberá complementarlo con ejemplos aunque sean los clásicos: circuitos acoplados, en particular transformadores, péndulos compuestos, oscilaciones en tanques de agua, rotaciones de sólidos, reacciones químicas u otros sistemas de Volterra que son buenas ilustraciones de los fenómenos de resonancia.

En el cuarto capítulo, seguramente uno de los mejores, Braun expone la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, material poco usual en textos introductorios pero intuitivamente fácil de entender y donde se siente el impacto de la teoría. La teoría de estabilidad lineal, desarrollada con buen rigor, es aplicada de manera viva al "porque" de las guerras con una interesante discusión de los ingredientes y las conclusiones del modelo. Del mismo modo, para sistemas autónomos nolineales, el autor estudia estabilidad, plano fase y propiedades de las orbitas, clasifica los puntos de equilibrio y justifica el teorema de Poincaré-Bendixson. Los ejemplos son sumamente interesantes: El principio del nicho ecológico o sea como dos especies no pueden vivir del mismo modo sin la desaparición de la más débil, el cómo se desencadenan las epidemias y un modelo de gonorrea con sus respectivas conclusiones para las políticas de salud. El problema de las relaciones presas-predadores de Volterra vale la pena relatarse: En 1925, el biólogo italiano D'Ancona se dió cuenta que, en las estadísticas de pesca, la proporción de tiburones y demás predadores había aumentado durante la primera guerra mundial debido a una actividad pesquera reducida. Al no poder explicar el fenómeno, D'Ancona pidió ayuda al matemático Volterra y éste propuso el siguiente modelo:

Si x(t) es el número de pescados buenos o presas y y(t) es el número de predadores, tendriamos, en ausencia de pesca:

$$\dot{x}(t) = ax - bxy$$
$$\dot{y}(t) = -cy + dxy \quad :$$

Si no hay predadores, las presas se desarrollan exponencialmente, pero, en presencia de ellos, sus bajas son proporcionales al número de encuentros entre las dos especies. Del mismo modo, los predadores, sin comida, desaparecen según la ley de Malthus y crecen conforme a la abundancia de presas.

Es entonces fácil ver que la expresión:

$$y^{a}\, x^{c}\, e^{-by}\, e^{-dx}$$

permanece constante y que las orbitas son periódicas alrededor del punto de equilibrio (c/d, a/b). Ahora bien, como los datos experimentales son promedios, al calcular la integral de $\dot{x}/x$ sobre un período, se encuentra que los valores promedios de x y z son justamente c/d y a/b.

Al introducir la perturbación representada por la pesca, a es cambiado por a-ε y c por c+ε. Entonces, si ε disminuye, el promedio de presas disminuye mientras que el de predadores aumenta. Este fenómeno, el principio de Volterra, se comprueba muy a menudo: por ejemplo, al rociar con insecticidas dos especies presas-predadores, el efecto es contrario al buscado ya que la especie nociva, las presas, aumenta en lugar de disminuir. Braun prosigue relatando cómo se puede responder a las criticas de los ecólogos modificando el modelo con términos de competencia interna o con caza poca eficiente. Además invita a los lectores a seguir adaptando los modelos a otras situaciones, por ejemplo a distintas políticas de vacunación, emprendiendo así un magnífico aprendizaje de la investigación. Dentro de estos ejercicios, hay uno, sobre las conversaciones de paz en Paris, que demuestra el peligro de tener demasiada fé en estos modelos ya que, en ciertas aplicaciones, las hipótesis de los modelos dependen de las ideas políticas y prejuicios del autor y llevan a cualquier tipo de resultados, en particular las que uno espera.

El último capítulo del libro es, en mi opinión, el más débil: Es una introducción al método de separación de variables y a series de Fourier para tratar algunos casos particulares de ecuaciones en derivadas parciales. No tiene ejemplos y suena a un pegote final. Es evidente que las ecuaciones en derivadas parciales no se reducen a una serie de trucos muy utiles pero que dejan al estudiante con el sabor amargo de haber sido defraudado; este proceder puede ser válido en un curso de métodos matemáticos pero no en un curso de parciales ni en un apéndice de un curso de ecuaciones ordinarias ya que, para entender las razones matemáticas de estos métodos, es necesario, a mi juicio, tener un conocimiento un poco más detallado de análisis funcional de operadores en espacios de Hilbert y de análisis espectral; de otro modo se está usando un instrumento sin entenderlo.

En conclusión, el balance final es totalmente positivo: las escasas debilidades del libro de Braun,por ejemplo sus más de 700 páginas que resultan ser demasiado para un semestre e implican una selección, son ampliamente compensadas por sus cualidades. Es un texto muy completo, ofrece desde una inteligente teoría hasta programas de computadora, muestra un amplio panorama y responde en gran medida a ese deseo del libro ideal que expresaba al principio de esta reseña. En pocas palabras, este libro, o su versión abreviada donde muchos de los defectos que he señalado parecen haber sido corregidos, debería figurar en el acervo de toda biblioteca y todo profesor, interesado en dar un curso de ecuaciones, o todo otro lector deberían consultar con provecho.

Finalmente queda claro que el libro está escrito para lectores norteamericanos con las consiguientes peculiaridades; sería por lo tanto deseable que una eventual traducción al Castellano sea la suficiente libre para adaptarse a nuestro medio. Un último deseo: espero tener algún día la misma sorpresa con un libro sobre ecuaciones en derivadas parciales; el problema ahí parece ser aún más complicado: la teoría ha cambiado mucho en las últimos veinte años y las aplicaciones simples y originales son más difíciles de encontrar.