LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

¿ COMO SURGE ?

Por: Rafael Fernández Flores *

RESUMEN

La mayoría de los textos sobre ecuaciones diferenciales introducen la transformada de Laplace como el operador:

$$\mathcal{L}\{y(x)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, y(t)dt$$

y prueban que posee ciertas propiedades que lo hacen útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes; sin embargo, raras veces se indica de donde surge este operador. En este trabajo se procede a la inversa: se busca un operador que cumpla ciertas condiciones y se procede a construirlo.

I PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de orden n

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, y^{(n-2)} + \dots \quad a_0 y = f(x)$$

se puede escribir en términos del operador lineal

$$L_n = D^n + a_{n-1}\, D^{n-1} + \qquad . a_0$$

como:

$$L_n\ (y) = f(x)$$

Una técnica para resolver esta ecuación diferencial consiste en encontrar, si es que existe, el operador inverso L_n^{-1}

Esta técnica se conoce como método de la función de Green,

* Departamentos de Física, Química y Matemáticas de la ENEP-C

pues L_n^{-1} viene dado por:

$$L_n^{-1} = \int_{x_0}^{x} dt\ G(x,t)$$

Siendo G(x,t) la función de Green asociada al operador L_n

Esta técnica completamente general -no es exclusiva de - ecuaciones con coeficientes constantes- que nos permite apreciar el valor de poseer un formalismo de operadores para las ecuaciones diferenciales lineales tiene ----- sin embargo una desventaja: G(x,t) depende de la forma de L_n y hay que calcularla para cada caso.

Lo anterior nos hace pensar si no será posible para el caso de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, encontrar un operador lineal $\mathcal{L}$ invertible que ayude a resolver la ecuación y cuya inversa -- $\mathcal{L}^{-1}$ se pueda calcular sin depender explícitamente de la forma de L_n

Una forma de lograrlo sería obtener un operador lineal $\mathcal{L}$ invertible, que al aplicar a L_n [y] nos diera como resultado una función F_n de $\mathcal{L}\{y\}$ pues entonces

$$\mathcal{L}\{L_n\ [y]\} = \mathcal{L}\{f(x)\} = F_n\ [\mathcal{L}\{y\}]$$

lo que permite encontrar a y como:

$$y = \mathcal{L}^{-1}\ \{F^{-1}\ [\mathcal{L}\{f(x)\}]\ \}$$

II. SOLUCION DEL PROBLEMA

Empecemos por hacer notar que si tal operador existe deberá satisfacer una relación entre

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}\} \quad y \quad \mathcal{L}\{y\}$$

para que sea posible reducir $\mathcal{L}\{L_n\ |y|\}$ a $F[\mathcal{L}\{y\}]$

Para obtener la relación entre $\mathcal{L}\{y^n\}$ y $\mathcal{L}\{y\}$

basta con conocer la relación entre $\mathcal{L}\{y'\}$ y $\mathcal{L}\{y\}$

ya que por una aplicación repetida obtendremos la relación mencionada.

Proponemos una regla simple y vemos si existe algún -- operador que la satisfaga. La relación más simple es la de proporcionalidad, i.e

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\ \mathcal{L}\{y\} + A \qquad (1)$$

Aunque A es una constante, en principio arbitraria, encontramos conveniente (por la aplicación que más adelante se quiere hacer de $\mathcal{L}$) fijarla como
$-\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = -y_{0+}$ entonces podemos reescribir la rela-- ción (1) como:

$$\mathcal{L}\{y'\} - s\,\mathcal{L}\{y\} = -y_{0+}$$

como se ha supuesto que debe ser lineal

$$\mathcal{L}\{y' - s\ y\} = -y_{0+}$$

es decir: $\mathcal{L}\{L_1\ (y)\} = \ y_{0+}$

donde desde luego $L_1 = D^1\ \ s\ D^0$

observando que:

$$y_{0+} = \lim_{x \to 0+} y(x) = \lim_{x \to 0+} L_1^{-1}\left[L_1\ (y)\right]$$

Se ocurre que $\mathcal{L}$ debe ser $\lim\limits_{x \to 0^+} L_1^{\ 1}$ Lo que resta para encontrar la forma explícita de $\mathcal{L}$ es encontrar $L_1^{\ 1}$
Para esto observamos que una solución de $L_1\ [\ y\ ] = g(x)$
es $y = e^{sx}\int e^{sx} g(x)\,dx$

que podemos escribir como:

$$y = e^{sx} \int_{\infty}^{x} e^{-st} g(t)dt$$

pues sólo cuando $t \to \infty$ la $\int e^{-st} g(t)$ se anula para $g(t)$ arbitraria.Para las condiciones sobre la convergencia de esta integral véase por ejemplo: Kreider, et al. Introducción al Análisis Lineal.

$$. \quad y = L_1^{-1}\left[L_1 [y]\right] = e^{sx} \int_{\infty}^{x} e^{st} g(t)dt = L_1^{1}\left[g(x)\right]$$

$$\therefore \quad L_1^{-1} = e^{-sx} \int_{\infty}^{x} dt \; e^{-st}$$

como $\mathcal{L} = -\lim_{x \to 0} L_1^{-1}$ tendremos $\mathcal{L}\{y\} = \int_0^{\infty} e^{-st} y(t)dt$

que es la fórmula que queremos obtener

BIBLIOGRAFIA:

Boyce, Diprima. Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. LIMUSA-WILEY.(1971)

Ince, Ordinary. Differential Equations. Dover(1956)

Kreider, Kuller, Ostberg, Perkins. Introducción al Análisis Lineal. Fondo Educativo Interamericano. (1971)

Sneddon. The use of Integral Transforms.(1974)

Wolf. K.B. Integral Transforms in Science and Engineering. Plenum.(1979)