Leonhard Euler, de las cortes a las academias

César Guevara Bravo y Rafael Martínez Enríquez
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Exterior
Cd. Universitaria
04510 México, D.F. México
jcgb@hp.fciencias.unam.mx

Del siglo XVIII –al igual que de otros periodos previos–, lo que más se recuerda son sus guerras, la creación de imperios o la disolución de reinos, la música, el arte y, por supuesto, la ciencia. En el ámbito de la ciencia, una de las características del siglo XVIII es haber superado en gran medida las supersticiones y los frenos dogmáticos que sobrevivían desde la antigüedad y la edad media. Además, éste es el primer siglo en donde se exhibe una ciencia con plena división de especializaciones, producto de la explosión cuantitativa de los conocimientos vinculados con cada disciplina. Es decir, hasta el siglo XVI, las matemáticas, la física, la astronomía, etc... eran áreas que se podían considerar casi monotemáticas, en cuanto que los conocimientos de una disciplina prácticamente se podían estudiar en su totalidad, esto es, alguien que se consideraba matemático abarcaba casi la totalidad de la materia (geometría, aritmética, música), y no sólo una de sus partes. Desde mediados del siglo XVII las ciencias exactas se empiezan a dividir en especialidades. Por ejemplo, la llegada del cálculo y la introducción del álgebra en la geometría hicieron que las ciencias crecieran en sus particularidades, y por esta razón ya pocos personajes podían tener una visión panóptica de las ciencias. Aún así existieron quienes mostraron una gran capacidad para poder entender y aportar de manera multitemática nuevo material a las ciencias, y en el siglo XVII son emblemáticos los casos de Newton, Descartes o Galileo, por citar algunos.

Para el XVIII pocos fueron los personajes con las características mencionadas. Hombres como Leibniz y Newton ya habían concluido sus aportaciones científicas, y sin embargo la especie humana aún tenía sorpresas y fue capaz de mostrar al mundo que podían existir mentes para las que el razonamiento universal no era un país extraño y, además, como diría Timothy Gower [2001], que podían tender puentes inesperados entre las ciencias. La evidencia más contundente de que esta posibilidad era real fue el 15 de abril de 1707, día en que nació Leonhard Euler en Basilea, Suiza.

En este año también se empieza a gestar el problema entre la corona española y el archiduque Carlos de Habsburgo, problema que daría paso a un conflicto con fuertes consecuencias para las diferentes naciones europeas. Por otro lado, Euler no era un elemento aislado en su siglo, pues personajes que ahora son de renombre en la historia estaban en plena maduración o consolidación de sus carreras. Entre ellos tenemos a Benjamin Franklin, Voltaire, Diderot, DÁlembert, Washington, Waring, Robespierre, los Bernoulli, Cook, Goldbach, Lagrange, Rousseau, Hume, Kant, Goethe, Mozart, Goya.

Y a pesar de lo convulsionada que pudiera estar Europa y de la existencia de muchas mentes brillantes, Leonhard Euler fue de entre ellas una de las más sobresalientes en la Europa que se concibe como viviendo en el *Siglo de las Luces*, y en la que el intelecto pretende dominar a la naturaleza y el hombre se siente llamado a conquistarla.

La capacidad de Leonhard Euler fue reconocida alrededor de 1725 por Johann Bernoulli, una de las autoridades científicas de la época y, además, temido por su gran exigencia académica. En la Universidad de Basilea Johann Bernoulli guió a Euler para que se instruyera mediante la lectura de los clásicos de las humanidades, así como de los textos y artículos más importantes en el ámbito de las matemáticas. Seguramente tuvo entre sus manos el *Project* (1687) y *Conjectures sur la pesanteur* (1690) de Pierre Varignon, los *Dos Sistemas Máximos* de Galileo, la *Geometría* y *los Principios de la Filosofía* de Descartes y las obras de Copérnico y Ptolomeo. Por las notas que escribió en su primer artículo,[1] *Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente*[2], sabemos que leyó los artículos de Johann Bernoulli

[1]Todas las referencias a la obra de Euler tendrán al final del título el número del índice Enestrom (por ejemplo (E34)). Con este número se pueden consultar los trabajos en: www.eulerarchive.org.

[2]"Construcción de curvas isócronas en un medio resistente"(E1). *Acta Eruditorum* 1726, 1726, pp. 361-363. En su primer trabajo publicado a los 19 años aborda la cicloide ordinaria como una curva isócrona o tautócrona en la que actúa la gravedad

sobre series infinitas y su *Ars Conjectandi*, y también el *Phoronomia* de Jakob Hermann (1716) y el *Principia Mathematica* de Newton (1687). Así, con una preparación construida a partir de la lectura de las autoridades de la ciencia, Euler crecería en una comunidad científica altamente competitiva, las *Academias* de ciencias. En particular, las de París, Londres, San Petersburgo y Berlín, contribuyeron al desarrollo de la ciencia proponiendo problemas que formaban parte de certámenes de matemáticas, física, mecánica y astronomía, etc. Muchos de los problemas respondían a las necesidades de ese tiempo. Por ejemplo, en 1714, a propuesta de Newton, la *Royal Society* de Inglaterra abrió un concurso para encontrar un método de determinación de la longitud geográfica en el mar, con una exactitud de medio grado. A través de otros concursos se resolvió el problema del flujo y reflujo de mareas, se perfeccionó la teoría de los satélites de Júpiter y se mejoraron los cálculos sobre los movimientos de la luna, etc.

Euler se formó en este ambiente competitivo y sobresalió desde temprana edad. Ya para 1727 la Academia de París le había otorgado una mención honorífica por su trabajo *Meditationes super problemate nautico*,[3] y aunque en este momento no ganó, esto sólo fue el inicio. Más tarde, entre 1738 y 1772, la Academia de París le otorgó 12 veces el premio. Cabe mencionar que aquel trabajo sobre náutica fue el inicio de una aportación trascendente, pues más adelante, en su *Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus*[4] de 1749, presentó, por primera vez y con toda claridad, los principios de la hidrostática.

de manera uniforme desde el centro de la Tierra y, además, considera también un medio resistente proporcional a la velocidad. Así, la isócrona resulta una cicloide. Cabe mencionar que para este trabajo se apoya en el libro II, proposición 26, de los *Principia* de Newton.

[3]El título completo es: "Meditaciones sobre un problema náutico, propuesto para la Ilustre Real Academia de Ciencias de París" (E4). Publicado originalmente en *Piece qui a remporte le prix de lácademie royale des sciences* 1727, 1728, pp. 1-48. Aquí empleará los elementos mecánicos y matemáticos para el diseño de barcos, y utilizará la ley de Newton sobre resistencia aplicada a diferentes superficies, mismas que serán el medio que opone la resistencia.

[4]"Ciencia Naval, tratado de construcción" (E110 y E111). Publicado originalmente como libro en 1749, la obra apareció en dos tomos. Entre los temas relevantes se pueden mencionar la idea de centroide o metacentro como forma distintiva del centro de gravedad, teoría de la estabilidad orientada al restablecimiento de la torsión en pequeños desplazamientos, los primeros procedimientos del movimiento tridimensional de cualquier cuerpo rígido como respuesta a la aplicación de una torsión, la teoría de las pequeñas oscilaciones de cuerpos flotantes, problemas particulares con uso local de la ley de resistencia de Newton, la oscilación de barcos, el efecto de fuerzas externas y de la resistencia del agua sobre cuerpos flotantes para mover figuras planas.

Sobre ellos se montó para elaborar los fundamentos científicos para la teoría de la arquitectura naval; aunado a esto también sentó las bases de lo que hoy conocemos como la mecánica racional, que para la época sería la más acabada teoría científica para el diseño de navíos.[5]

1. Rumbo a San Petersburgo

Euler se graduó en 1726, y ese mismo año tuvo la posibilidad de elegir dónde podría desarrollar su carrera académica (tenía el ofrecimiento de una cátedra en Basilea y para ello escribió el *Dissertatio physica de sono*[6]), pero nuevamente los Bernoulli (Nicholas y Daniel) intervinieron para que se le invitara a ocupar un lugar en la Academia de Ciencias de San Petersburgo, la que estaba en plena formación bajo el impulso de Pedro el Grande y Catalina I. Euler decide incorporarse a ella, y en 1727 llegó a San Petersburgo. Para ese entonces Pedro el Grande –el Zar– ya había muerto, y la Emperatriz Catalina I dejó de existir unos días después del arribo de Euler. Esto marcó un inicio difícil para él en la Academia, pues el nuevo Zar, Pedro II, no la consideraba como una institución importante y le redujo el presupuesto. Motivado por una especie de pragmatismo científico Euler decide ingresar a la marina rusa y ahondar en sus estudios sobre las ciencias navales.

En 1730 muere Pedro II y es sustituido por Ana I, quien muestra más interés por la Academia, y es así que Euler se incorpora de manera más estable en San Petersburgo, con una plaza para trabajar en física-matemática (originalmente, cuando llegó a Rusia, le habían ofrecido una en el área de fisiología).

---

[5]Sus trabajos sobre navíos fueron pocos –aproximadamente una docena– pero con ello bastó para que obtuviera el reconocimiento de la comunidad interesada en el tema. Como un ejemplo de esto se puede mencionar que el 23 de agosto de 1774, Turgot, el Comptrolleur General de Francia escribió a Luis XVI para sugerirle que autorizara la publicación de dos trabajos para ser usados en la escuela naval y de artillería [Truesdall 2007]. Un trabajo fue el *Theorie complette de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux* (E426), y el otro fue un comentario sobre los principios de artillería de Robins.

[6]“Disertación física sobre el sonido” (E2). *Opera Omnia*: Serie 3, Volumen 1, pp. 183-196. En este ensayo repartido en dos secciones
a) sobre la naturaleza y propagación del sonido
b) generación del sonido
estudia la composición de la atmósfera; apoyándose en la teoría de la elasticidad que aprendió previamente de Johann Bernoulli, también enuncia sin demostrar una fórmula para la velocidad de propagación del aire.

Aunque ya estaba establecido en San Petersburgo sus problemas no cesaron, pues por una parte no le cumplían con el sueldo prometido y, por otro lado, tenía que convivir con personajes como Johann Schumacher,[7] que fue uno de los funcionarios que no permitía una buena estadía de los extranjeros en la Academia. A ello se añadió que en 1733 su amigo Daniel Bernoulli tuvo que regresar a Baviera por motivos de salud.

Desde su arribo a San Petersburgo Euler mostró una destreza envidiable para abarcar con soltura diferentes áreas de la ciencia y poder relacionar elementos de una y otra para obtener resultados sorprendentes.

A lo largo de su vida sus intereses oscilaron entre varios campos de la matemática, tales como álgebra, teoría de números, análisis, ecuaciones diferenciales, cálculo diferencial e integral, cálculo de las variaciones, mecánica, hidráulica, hidrodinámica, elasticidad, astronomía, óptica, topología, música, barcos, cartografía matemática, y otras más.[8]

Desde sus primeros días en San Petersburgo entabló lazos de amistad con un personaje que compartiría su pasión por las matemáticas: Christian Goldbach.[9] Con él sostuvo una nutrida correspondencia por

[7] Johann Schumacher fue uno de esos personajes de la vida política y no académica. Para iniciar el proyecto de la Academia, en 1720 el zar solicitó a Christian Wolff –profesor alemán de filosofía y física en Halle–, que le ayudara en la creación de la institución. Desde 1714 Pedro había llamado a Johann Schumacher para que se encargara de la biblioteca, y en 1721 le asigna la tarea de establecer contacto con destacados profesores extranjeros de Europa, así como adquirir los más avanzados instrumentos astronómicos y físicos. Para fines de los años 30 la opinión de los extranjeros en la Academia era de que al parecer Schumacher ya había perdido la noción de cómo se debía de relacionar con personajes como Euler, comportándose como un burócrata autocomplaciente y tratando de anteponer sus propios intereses por encima del trabajo científico de los demás.

[8] *Grosso modo* podemos dividir el total de su producción de la siguiente manera: teoría de números, álgebra, análisis y geometría 58 %; mecánica y diversos temas de física 28 %; astronomía 11 %, náutica, arquitectura y artillería 2 %; música y filosofía 1 %.

[9] Goldbach fue un hombre de grandes relaciones públicas: conoció a Leibniz en 1711, a Nicolaus Bernoulli y A. de Moivre en 1712, y a Daniel Bernoulli en 1724, entre otros. A la muerte de Catalina I, el nuevo Zar Pedro II lo designó tutor suyo y de su prima Ana Ivanovna de Courland. A la muerte de Pedro II, Goldbach siguió al servicio de Ana –la sucesora al trono– y en 1732 fue nombrado secretario de la Academia. A partir de 1737, junto con Johann Schumacher, se hizo cargo de su administración.

Euler conoció a Goldbach después de su llegada a San Petersburgo en 1727, y aunque Goldbach partió a Moscú en 1729 y Euler estaba temporalmente ocupado en la marina rusa, sostuvieron correspondencia desde 1729 hasta 1764. Ésta comprende más de treinta años, y es importante mencionar que en estas cartas se encuentran resultados sobresalientes para las matemáticas.[10] Pero también se debe resaltar que a lo largo de su vida sostuvo relaciones epistolares con grandes personajes de la ciencia y la política europea. A la fecha se tienen registradas aproximadamente 3000 cartas, y en ellas se encuentran datos que no aparecen en sus artículos ni en sus libros, algunos de los cuales representan la génesis de muchos de los grandes resultados que posteriormente serían publicados en sus libros y artículos. En dichas cartas aparecen muchos de los resultados preliminares que ponía a consideración de sus amigos. También se pueden hallar los intercambios de errores entre unos y otros. Dada su riqueza, la correspondencia es un cúmulo de sorpresas científicas y también de hechos acerca de la vida personal de estos grandes científicos.

Para dar una idea de la importancia que tenían sus cartas basta llamar la atención a una de las primeras que le envió Goldbach, la del primero de diciembre de 1729, y en la que le pide su opinión sobre el sexto número de Fermat.[11] Esto es, le pregunta si $F_n = 2^{2^n} + 1$ es primo para $n = 5$.

La solución a este problema le resultó verdaderamente sencilla: llegó a la conclusión de que 641 dividía a F_5, con lo cual acabó de tajo con el sueño de Fermat y Mersenne de que posiblemente los números de esta forma serían primos. Pero Euler no sabía detenerse con un resultado, y posteriormente proporcionó la forma que deberían de tener los divisores de estos números. Para 1732 escribió *Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spactantibus*,[12] y con ello daba una respuesta completa a una de las primeras preguntas de Goldbach.

La correspondencia que sostuvo con Goldbach entre 1729 y 1756 estaba principalmente dirigida a la teoría de los números. Pero no se puede dejar de mencionar que sobre estos temas también mantuvo correspondencia con los Bernoulli, Lagrange y Clairaut.

---

cerca de doscientas cartas –las conocidas– que principalmente se ocupaban de teoría de los números, series, números complejos, teoría de funciones, cálculo, etc.

[10] De la correspondencia entre Euler y Goldbach se pueden consultar dos ediciones: Juškevič, A. P. & Winter, E. 1965. La otra se encuentra en: www.eulerarchive.org.

[11] Fermat planteó a Marin Mersenne la posibilidad de que los números de la forma $2^{2^n} + 1$ pudieran ser primos. Fermat sin mayor problema mostró que para n entre 0 y 4 los números eran primos, pero no pudo avanzar más.

[12] "Observaciones sobre un teorema de Fermat y otros sobre números primos" (E26). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 6, 1738, pp. 103-107.

Desde muy joven mostró que tenía habilidades casi mágicas para el manejo de las cifras y una muestra de ello es la capacidad para manipular series infinitas que mostró desde sus primeros años en Rusia. Alrededor de 1730 ya conocía lo que habían hecho Wallis, Leibniz, Newton, Taylor, y Maclaurin en la construcción de series para aproximar a e y a π. En sus primeros años en la Academia trabajó en algunas variantes de la serie geométrica, guiado por el *Quadratura circula et hyperbolae per infinitos hyperbolas geometrice exhibita* de Guido Grandi, así como por las opiniones de Christian Wolff, Leibniz y Daniel Bernoulli. También conocía el *Tractatus de seriebus infinitis* (1689) de Jakob Bernoulli, texto que mostraba grandes avances en el tema de las series infinitas y ponía al día a los interesados en los problemas aún sin resolver. Jakob trabajó sobre las series de la forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{k^p} + \ldots$$

donde el caso $p = 1$ da como resultado la serie armónica. Ya se sabía que la serie diverge, pero en el caso de $p = 2$ no se tenía el resultado de la convergencia –y menos para valores de p mayores que 2–. Pietro Mengoli, Leibniz y el mismo Jakob Bernoulli ya habían dado noticia de sus intentos fallidos por saber a qué convergía, y desde la publicación del *Tractatus* sobre este problema se le conoció como 'El problema de Basilea'. En 1735 Euler lo resolvió de una manera que sorprendió a todos. En su *De summis serierum reciprocarum*[13] escribió:

"He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia de un círculo de diámetro uno"

$$6\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2,$$

aunque es importante mencionar que esta demostración preocupaba a algunos –entre otros a Daniel Bernoulli– ya que no justificaba varios pasos donde recurría a la convergencia de algunas series y productos. Pero después escribió otra demostración que apareció en *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera, in qua eaedem summationes ex fonte maxime diverso derivantur*,[14] donde algo digno de señalar es que empleó métodos totalmente analíticos.

[13] "Sobre la suma de series de recíprocos" (E41). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 7, 1740, pp. 123-134.

[14] "Sobre la suma de series de recíprocos de potencias de números naturales, en donde las sumas se derivan de otras fuentes" (E61). *Miscellanea Berolinensia* 7, 1743, pp. 172-192.

En el mismo artículo *De summis serierum reciprocarum* toma las variantes que ya eran conocidas para la serie geométrica y agrega otros elementos a su análisis para obtener el desarrollo de $\frac{1}{1-x}$ y de $\frac{1}{(1+x)^2}$, (aquí sólo se mencionan dos pero son más las funciones para las que hizo algo semejante), y con el uso de la serie:

$$y = sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

obtuvo series que convergían a valores relacionados con π, tales como $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi^2}{8}, \frac{\pi^3}{32}, \ldots$

Entre los cientos de resultados que componen la obra de Euler hay algunos que han alcanzado una gran popularidad, siendo uno de ellos el de los *Siete puentes de Königsberg*. El problema es el siguiente: por la ciudad de Königsberg pasa el río Pregel, en el cual hay dos islas A y D que están comunicadas entre sí por un puente. Además de éste, existen otros 6 que comunican con la tierra firme y que uno puede designar como a, b, c, d, e, f, g (ver figura **??**). El problema consistía en determinar si era posible realizar un recorrido que pasase por cada puente una y sólo una vez.

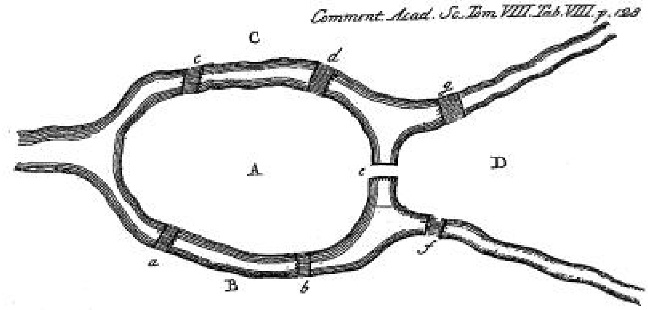
El 1736 Euler escribió *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*,[15] texto en el que explica que es imposible que exista un camino con estas características. Este trabajo de Euler dio lugar a un resultado hoy muy conocido: *una gráfica conexa es euleriana si y sólo si cada vértice tiene grado par.*

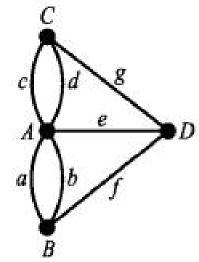
En el grafo del problema, B y C son las orillas del río y A y D dos islas. En el problema de Königsberg resulta que no todos los vértices tienen un número par de puentes que concurran a él. Euler se percató de que mientras existieran un número impar de caminos podría entrar y salir, pero en algún momento se quedaría sin puente para regresar.[16] La solución de este problema dio lugar a que surgieran ideas importantes para el desarrollo de una rama de la topología con un perfil combinatorio.

Aquí cabe hacer una reflexión y una elección. Es un hecho que de los cientos de trabajos que escribió, en esta oportunidad sólo podemos mencionar una mínima parte, y que por cuestiones de espacio muchos resultados importantes no serán mencionados, pero hay otros que por su importancia es imposible soslayar. Uno de estos se refiere a una

[15] "La solución de un problema relacionado con la geometría posicional" (E53). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, 1741, pp. 128-140.

[16] Para un estudio actualizado del problema de Königsberg véase: Hopkins, Brian & Wilson, Robin [2004].





temática que atrapó el interés de Euler durante sus años en Berlín: el cálculo de las variaciones.

Si tuviéramos que ponerle fecha conmemorativa al cálculo de las variaciones podríamos proponer 1744, año en el que publica su libro *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprrietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici altísimo sensu accepti.* Pero los orígenes los podemos vislumbrar desde 1734, en sus estudios de ecuaciones en derivadas parciales, y en 1747, con el problema de las cuerdas vibrantes. Euler consideró problemas referentes a extremos de integrales para después generalizar el problema de la braquistócrona en términos de cantidades mínimas. Con estos enfoques estudió algunos problemas isoperimétricos y de superficies mínimas de revolución.

Entre 1736 y 1744 analizó la integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$$

con la característica de que la función $y(x)$ que hace mínimo o máximo el valor de J satisface la ecuación

$$f_x - f_{y'x} - f_{y'y}y' - f_{y'y}y^{''} = 0$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria en $y(x)$ (de segundo grado no lineal) y en la actualidad sigue siendo fundamental para el cálculo de las variaciones. Con esto Euler daba los primeros pasos importantes para resolver los problemas de extremos.

Por lo expuesto anteriormente se puede apreciar que su estancia en San Petersburgo era fructífera no sólo en lo personal, lo era también para la matemática misma. Durante este periodo en la Academia rusa fue que demostró el llamado pequeño teorema de Fermat, introdujo las funciones gamma y beta, construyó la función Zeta,[17] demostró el último teorema de Fermat para n igual a múltiplos de tres y cuatro, escribió dos volúmenes de mecánica y mucha otras cosas más.

El año 1740 marcaría nuevos derroteros para Rusia y para Euler. Sucedió que Ivan VI Antonovich –nieto de Catalina, la hermana de Ana Ivanovna– fue proclamado zar de Rusia casi inmediatamente después de su nacimiento en 1740. Por su corta edad se nombró regente a su madre Ana Leopoldovna, pero un año después una revuelta militar puso en el trono a Isabel Petrovna –la hija más joven de Pedro el Grande y Catalina I– e Ivan VI fue confinado al castillo de Shlisselburg.

Isabel Petrovna fue una emperatriz plenamente identificada con la cultura rusa. Durante su reinado (1741-1762) impulsó reformas a la justicia y al establecimiento del senado. También amplió los poderes de la nobleza cortesana -dando lugar a la llamada *Edad de oro de la aristocracia*. La reciente convulsión por la sucesión de Ivan VI y el arraigo de Isabel por la cultura Rusa hicieron que se generara una atmósfera de incertidumbre e inseguridad entre los extranjeros que formaban parte de la Academia de San Petersburgo, donde algunos de sus miembros sentían que, desde los meses previos a la llegada de Isabel, las condiciones no eran las adecuadas para el trabajo intelectual.

Uno de los científicos afectados en su estabilidad académica y emocional fue Leonhard Euler, que además de sentir ese trato diferenciado hacia los extranjeros, ya no toleraba que la Academia estuviera dirigida por el antiguo bibliotecario Johann Schumacher, ya mencionado previamente.

---

[17]En 1737 Euler escribió el artículo *Variae observationes circa series infinitas* (E72), donde estudia algunas propiedades de la serie armónica, con un marcado interés por vincularla con los números primos. Él sabía que la divergencia de la serie armónica ya estaba demostrada, y propuso la siguiente propiedad de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots}$$

De la parte derecha de la igualdad deduce que ésta es igual a:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7}} \cdot \ldots$$

Así, obtiene el sorprendente resultado $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod\limits_{\rho} \frac{1}{1-\frac{1}{\rho}}$ donde n es natural y ρ es primo. Posteriormente Euler propuso que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod\limits_{\rho} \frac{1}{1-\frac{1}{\rho^s}}$ para s en los enteros. Este resultado es el que retomaría posteriormente Kronecker para demostrarlo de manera adecuada para s en los reales y, posteriormente, en 1859, Riemann presentaría lo que hoy conocemos como la 'función zeta de Riemann'.

En este mismo año, en la región de Prusia, Federico II (el Grande) asume el trono, y entre sus objetivos estaba el de la creación de una Academia de Ciencias con un perfil similar al de la francesa. Para este gran proyecto se auxilió de Voltaire, quien a su vez recomendó que la dirigiera Pierre-Louis Moreau de Maupertuis. Federico aceptó, y entre las primeras propuestas del nuevo director estaba la de invitar a todos los Bernoulli y a Euler. De ellos sólo Euler aceptó la invitación, seguramente motivado por la situación en Rusia.

2. Un cuarto de siglo en Berlín

El 25 de abril de 1741 Euler arrivó a Berlín, donde las condiciones políticas no eran las ideales para un recién llegado. El reino se encontraba en la primera guerra silicia y sus consecuencias afectaron todos los ámbitos de la vida del reino. Fue por ello que Euler no se pudo incorporar de manera inmediata a las actividades docentes de la Academia y entre tanto impartió lecciones a algunos miembros de la familia real. Entre sus alumnas tuvo a la princesa Filippina von Schwendt de Anhalt-Dessau, nieta de rey de Prusia, y a quien dirigiría, en aras de mejorar sus lecciones, las *Lettres a une Princese dÁllemagne*,[18] una colección de textos dirigidos a explicar una serie de temas de actualidad en la ciencia.

Desde que llegó a Berlín en 1741 sus aportaciones científicas fueron constantes. Por ejemplo, inmediatamente envió cinco artículos a los *Mélanges* (Miscelánea de Berlín), y durante todos los años que estuvo en Prusia no dejó de sorprender por su gran capacidad para escribir las memorias.

Contra lo que se pudiera esperar, su salida de Rusia no lo desvinculó de la Academia de San Petersburgo, y ésta a su vez le reconocía su trayectoria otorgándole una pensión a pesar de vivir en Berlín.

Otro de los vínculos que no se alteró por su salida de Rusia fue su amistad con Goldbach y la correspondencia entre ellos siguió fluyendo de manera continua. Una muestra del fruto de este ejercicio son dos importantes cartas para la historia de las matemáticas. En la del 7 de junio de 1742 Goldbach le escribe lo siguiente:

[18] *Cartas a una princesa alemana sobre diversos temas de física y filosofía* (E343, E344, E417). *Opera Omnia*: 1768, Serie 3, Volumen 11. Después de 1760 Euler interrumpe las clases a la princesa, pero las completa dando lugar a las *Lettres.* Por ser una obra de divulgación de la física (contenía temas de mecánica,óptica, acústica, astronomía, cosmología) rápidamente fue difundida y elogiada en Europa.

> [...]; de este modo quiero aventurar una conjetura: que todo número que está compuesto [como suma] de dos números primos es a la vez un agregado de tantos números primos como queramos (incluyendo la unidad), hasta alcanzar puras unidades[19] [que es lo más a lo que se puede extender].

Y luego, en el margen de la misma carta, aparece lo siguiente:

> Después de leer esto otra vez, considero que pudiera ser demostrada con todo rigor para el caso $n+1$, si sucede para el caso n, y si $n+1$ puede ser dividido[20] en dos primos. [Entonces] la demostración es muy fácil. Parece por lo menos que todo número mayor que dos es la suma de tres números primos."

En estos dos párrafos que Goldbach le envía se puede ver, en el primero, una propuesta de representar a los números que son suma de dos primos como suma de tantos primos como se quiera, en tanto que el segundo párrafo es una especie de enmienda en la que ya sólo conjetura que todo número es una suma de tres primos. Como se puede ver, en ningún lado aparece algo equivalente a lo que conocemos como la conjetura de Goldbach.

El 30 de junio de 1742 Euler le responde lo siguiente:

> que todo número que es resoluble como [suma] de dos primos, puede [a su vez] ser representado como [suma] de tantos primos como se quiera, puede ser ilustrado y confirmado por una observación, misma que usted me comunicó formalmente; en concreto, que todos los números pares son suma de dos primos. [...] Sin embargo, que todo número par sea la suma de dos números primos, lo que considero un teorema correcto, es algo que no puedo demostrar.

Aquí es donde se encuentra la primera mención a la conjetura que trata el caso con los pares, y la pregunta inmediata sería: ¿Es la conjetura que hoy conocemos como "de Goldbach" una propuesta de

[19]En la traducción de las citas se ha respetado en la medida de lo posible el estilo y el contenido de lo escrito por los autores. Sin embargo es importante aclarar –en ésta de Goldbach– la parte que dice "todo número que está compuesto de dos números primos es a la vez un agregado de tantos números primos como queramos". En este caso se refiere a que todo número que se puede escribir como suma de dos primos también se puede escribir como suma de tres, de cuatro o de más primos, así hasta llegar a una suma solamente de unos que, obviamente, no rebase el número original dado.

[20]En el contexto del problema lo debemos de entender como 'suma de'.

Goldbach? Lo que parece corresponder a la realidad es que el primero que plantea el famoso enunciado es Euler.[21]

Otra carta –a Goldbach– que marcó para siempre a la teoría de los números fue la del 28 de agosto de 1742. En ella aborda el análisis de los factores primos de los números de la forma $x^2 + by^2$ donde b, x, y son enteros. La carta es extensa y contiene más de 20 resultados,[22] y en cada uno podemos encontrar elementos de lo que posteriormente sería la teoría de los residuos cuadráticos, la que más adelante Gauss coronaría –aunque de manera diferente a como lo inició Euler– con la ley de la reciprocidad cuadrática.

En Berlín retomó los trabajos que tenía en proceso desde sus días en San Petersburgo. Entre ellos estaban los problemas que le había planteado Philip Naude en 1740. Dichos problemas pertenecían al ámbito de la teoría de particiones y uno de los enunciados es el siguiente:

¿De cuántas formas se puede expresar el número 50 como suma de 7 sumandos enteros positivos diferentes?

Problemas de este tipo capturaron el interés de Euler y los abordó bajo el siguiente formato:

1. ¿De cuántas formas se puede escribir un entero positivo n como suma de m enteros positivos diferentes, o de cualquier cantidad de enteros?

2. ¿De cuántas formas se puede escribir un entero n como suma de m enteros positivos iguales o diferentes, o de cualquier cantidad de ellos?

Las soluciones a estos problemas se encuentran en sus *Observationes analyticae variae de combinationibus*[23] y en *De partitione nu-*

[21] Aquí la duda que se puede plantear es que lo que Goldbach propuso es algo que parece ser, pero que no es, lo que conocemos como la conjetura. Lo que sí es tangible es que Euler en su carta del 30 de junio menciona la relación binaria, que hoy conocemos como conjetura binaria de Goldbach. La propuesta para tres primos, que se encuentra en el margen de la carta de Goldbach, es para todo entero positivo, y la que hoy conocemos es sólo para los impares. Para profundizar más en esta discusión véase [Guevara & Uresti 2006].

[22] En 1747 escribe el "Theoremata circa divisores numerorum in hac forma paa ±qbb contentorum" (Teorema sobre los divisores de números de la forma $pa^2 \pm qb^2$) (E164). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 14, 1751, pp. 151-181. En este artículo muestra múltiples casos particulares para diversos valores de p y q para construir divisores de la misma forma.

[23] "Observaciones analíticas sobre combinaciones" (E158). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 13, 1751, pp. 64-93.

merorum,[24] pero el trabajo que fusiona toda su creatividad para responder a Philip Naude es *De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas*.[25] En esta obra presenta de manera sorprendente lo que hoy llamamos funciones generadoras. Para el problema uno propone a la función:

$$G(x) = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\cdots = \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^nz)$$

que tiene la característica de que el coeficiente del término x^nz^m (obtenido después de que se desarrolló el producto) indica la cantidad de formas en que un número n se puede escribir como suma de m enteros diferentes.

Para el problema dos propuso la función:

$$G(x) = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)\ldots} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^nz)}$$

$$= (1+xz+x^2z^2+x^3z^3+\ldots)(1+x^2z+x^4z^2+x^6z^3+\ldots)\ldots$$

con la característica de que el coeficiente del término x^nz^m (obtenido después de que desarrolla el producto) es la cantidad de formas en que un número n se puede escribir como suma de m enteros diferentes o iguales en cualquier cantidad.

Pero su incursión en el tema de particiones pronto aportó una verdadera joya para las matemáticas, y ésta sería el **teorema de los números pentagonales**. Al respecto, André Weil [1974] menciona lo siguiente:

> Trabajando con series y productos, [Euler] descubrió un número de hechos que le parecieron bastante inusitados y sorprendentes. Se fijó en el siguiente producto infinito:
>
> $$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$$
>
> y formalmente comenzó a expandirlo. [...] Calculó por lo menos quince o veinte términos; la fórmula comienza así:
>
> $$\prod(1-x^n) = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}\ldots$$

[24] "Sobre particiones de números" (E191). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 3, 1753, pp. 125-169.

[25] "Sobre la partición de números en un número de partes determinadas" (E394). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 14, 1770, pp. 168-187.

> donde esta ley, ante los ojos inexpertos, puede que no se muestre a primera vista. En notación moderna, aparece como sigue:
>
> $$\prod_{1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}}.$$
>
> En esta fórmula hemos cambiado x por q ya que q se ha vuelto la notación estandar en la teoría de funciones elípticas desde [tiempos de] Jacobi. Los exponentes forman una progresión de naturaleza simple. [...] [Euler] muy razonablemente dice, "esto es bastante cierto, aunque no puedo probarlo"; diez años más tarde lo probó[26] Él no podría haber adivinado que probablemente ambos, serie y producto, serían parte de la teoría de funciones modulares elípticas. Éste es otro vínculo entre la teoría de números y la de funciones elípticas.

Legendre [1830, p. 128-133] señalaba que el $\pm$ de los términos q^N del polinomio, es $+$ cuando hay un número par de sumandos en la representación de N, y el $-$ aparece cuando el número de sumandos es impar.[27]

Así, el teorema queda como sigue:

Teorema 1. *Sea $P_e(n)$ el número de particiones de n, donde cada una tiene un número par de sumandos. Sea $P_o(n)$ el número de particiones de n, donde cada una tiene un número impar de sumandos. Entonces*

$$P_o(n)-P_e(n)=\begin{cases}(-1)^j & \textit{si } n=\frac{j(3j\pm1)}{2}\\ 0 & \textit{en otros casos}\end{cases}$$

[26]La importancia de este problema se puede percibir por sus comunicaciones: el 30 de diciembre de 1747 le comunica a dÁlembert los avances de sus estudios (ver carta en (E558)), el 9 de junio de 1750 se lo comunica a Goldbach (ver [Juškevič 1965, p. 321-325]).
Posteriormente publicará el artículo "Evolutio producti infiniti in seriem simplicem" (La expansión del producto infinito

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\dots$$

sobre series simples) (E541). *Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae* 1780, 1783, pp. 47-55. Y también le dedicó un espacio en su *Analysin Infinitorum.*

[27]Nótese que los exponentes de

$$\prod(1-x^n)=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}\dots$$

se relacionan con los números pentagonales.

La capacidad de Euler para poder trabajar simultáneamente diversos problemas era sorprendente, y sus trabajos muestran que entre 1747 y 1750 estaba ocupado con problemas de particiones, pero también lo estuvo con asuntos astronómicos y, por si no fuera suficiente, también presentó los dos tomos de su *Introductio in Analysin Infinitorum.*

Los tópicos astronómicos le interesaron desde joven y durante casi 10 años Euler se ocupó de realizar dos mediciones diarias de la posición de la Luna. Gracias a ello logró desarrollar una gran habilidad para los cálculos astronómicos. Esto se hizo patente en su artículo *Methodus computando aequationem meridiei*a (1735), donde se calcula el paso del sol por el meridiano de un lugar.

Se sabe también que Euler ayudó a J. Nicolas Delisle en el cálculo de las trayectorias de las manchas solares y a desarrollar métodos analíticos para la determinación de las trayectorias de cometas, trabajos que incidieron en la construcción de la mecánica celeste. El primer escrito de Euler sobre este tema es *Recherches sur le mouvement des corps célestes en general* (1747). A partir de suponer movimientos keplerianos, y utilizando tablas de movimientos planetarios confiables, formuló las ecuaciones de movimiento de un planeta y su solución, misma que expresó como

$$r = a(1 + ecos(v)) = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - ecos(t))}$$

donde r es el radio, v es la llamada anomalía excéntrica, y t es la anomalía real, en tanto que e y a son constantes. Más tarde Euler expandió t en serie de Fourier y la utilizó para su cálculo de perturbaciones en este problema. Parte de estos resultados aparecieron en 1748 en el artículo que sometió a un concurso convocado por la Academia de París. En este artículo, titulado *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Júpiter, sujet proposé pour le prix de lánnée 1748*, Euler utiliza por primera vez la ley de gravitación de Newton para calcular las perturbaciones que los planetas se provocan mutuamente en sus movimientos.

Hubieron de pasar 16 años para que Euler se ocupara de un problema que era el paso inmediato del anterior: el de calcular los movimientos de tres cuerpos que interactúan mutuamente. Es el famoso problema de los tres cuerpos, mismo que estudió tomando en cuenta ciertas restricciones en vista de las dificultades que se presentaban al enfrentarlo en toda su generalidad. El mismo Euler hace notar en *Considerationes de motu corporum coelestium*[28] que:

[28] "Consideraciones sobre el movimiento de cuerpos celestes" (E304). *Novi Com-*

> No cabe duda de que Kepler descubrió las leyes que rigen el movimiento de los planetas, y de que Newton demostró su validez ... Pero esto no significa que la teoría astronómica haya alcanzado el más alto nivel de perfección. Somos capaces de trabajar satisfactoriamente con la ley de Newton del inverso del cuadrado de la distancia para el caso de dos cuerpos. Pero si se incluye un tercer cuerpo, de manera que cada uno atraiga a los otros dos, todas las artes del análisis son insuficientes...

Tomando en cuenta la posibilidad de que su capacidad para resolver el problema en lo general fuera superada por las dificultades inherentes al mismo problema, Euler recurrió a estudiar casos particulares, como el considerar una masa muy pequeña en comparación con las otras, con la esperanza de que la información que acumulara por esta vía le podría servir, como había sido el caso en otras áreas del conocimiento en las que encontró resultados de validez muy restringida, para construir soluciones más generales. Pero después de mucho trabajar en ello no le quedó más que reconocer que aparentemente había trabajado en vano. Sin embargo, y aunque no es mencionado como precursor, las soluciones lineales a la ecuación de quinto grado resultarían muy importantes, si bien la posteridad las conoce como 'soluciones de Lagrange'. Con todo, este detalle ilustra el que Euler haya sido quien abrió muchas de las rutas que seguirían los matemáticos franceses de una generación posterior para desarrollar los enfoques analíticos de la mecánica. En particular cabe recordar el reconocimiento que le mereció su teoría de perturbaciones, misma que presentó en el *Nouvelle méthode de déterminer les dérangemens dans le mouvement des corps celestes, causé par leur action mutuelle*. Por primera vez determinó, recurriendo a iteraciones, las perturbaciones a los elementos de las órbitas elípticas, lo cual a su vez le sirvió para calcular el movimiento de tres cuerpos con interacción mutua.

Y como ya se mencionó, en este periodo que va de 1747 y 1750 publicó una de las obras más importantes para las matemáticas, el *Introductio in Analysin Infinitorum*. La obra salió a la luz en 1748 y los principales críticos de la historia de las matemáticas opinan que sería riesgoso decir que fue la obra más importante de Euler, pero sí coinciden en que fue una de las que más fama y respeto le aportaron en el mundo

---

mentarii academiae scientiarum Petropolitanae 10, 1766, pp. 544-558. Cabe mencionar que Lagrange también estudió este problema, y aportó una solución particular cuando sucede que las tres masas se ubican en los tres vértices de un triángulo equilátero, pero Euler finalmente hizo notar que en términos generales el problema no tiene solución.

de las ciencias exactas. Esta obra retoma algunos resultados escritos para memorias anteriores, presenta resultados innovadores y desarrolla otros que previamente habían aportado Leibniz, Newton y los Bernoulli. Desde el título se puede entender que el autor usó procesos infinitos para desarrollar una fase previa a sus cálculos.

Antes de la *Introductio*[29] el análisis estudiaba las propiedades de las curvas, pero después de ella el análisis estudiará las propiedades de las funciones que dan lugar a las curvas. Así, a partir de Euler y su *Introductio* el concepto de función sería un elemento básico para las matemáticas. La *Introductio* fue traducida al francés en 1785 y al alemán en 1788.

Las capacidades de Euler parecían ser ilimitadas pues, como ya vimos, era capaz de trabajar simultáneamente diversos proyectos, y en cada uno de ellos aportaba resultados trascendentes para la ciencia. Los números así lo muestran: su producción en Berlín –junto con lo que seguía enviando a San Petersburgo– para 1764 era de más de 300 trabajos. Parecía que Alemania era el sitio idóneo para trabajar, y sin embargo no fue así.

Desde que llegó a Berlín se percató de que Federico y él no hablaban el mismo lenguaje: las vías naturales de comunicación para Euler eran el latín y los infinitesimales, y para el rey la cultura francesa era su mundo. A tal punto llegó este prejuicio real que Federico estableció que en la Academia se tenía que hablar en francés, y que las publicaciones debían ser escritas en el mismo idioma, y en lo que se refería a su aprecio por las matemáticas, es evidente que no las entendía.

Las incomodidades para Euler empezaron desde los primeros años en Berlín. En 1745 surgió una controversia motivada por un concurso acerca de la doctrina leibniziana acerca de las mónadas, y en el que Euler era jurado en la disputa entre Pierre Moreau de Maupertuis y Samuel König. La disputa alcanzó tal notoriedad que hasta Voltaire tomó partido en el debate y en 1752 escribió el poema satírico "El Dr. Akakia" en donde ridiculizaba a Maupertuis y a Euler.[30] Este problema

[29] Algunos de los resultados que se exponen son: expansión y suma de series, muestra la relación entre exponenciales y funciones trigonométricas para demostrar que

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta),$$

analizó curvas algebraicas y trascendentes, clasificación de curvas, representación de superficies con las ecuaciones generales de segundo grado pero en tres dimensiones, la transformación de coordenadas en el espacio y la curvatura de superficies.

[30] Un factor de permanente enfrentamiento entre Voltaire y Euler se remonta a sus primeros años en Berlín. Como Madame de Chatelet tenía una relación afectuosa

y la influencia que Voltaire tenía en la corte de Prusia hicieron que inevitablemente Euler se empezara a distanciar de Federico II.

Federico nunca entendió la grandeza de Euler, y se puede constatar en el hecho de que a pesar de que él era el matemático de mayor prestigio el rey no le ofreció la presidencia de la Academia cuando la dejó Maupertuis. En su lugar Federico la ofreció a DÁlembert pero éste no la aceptó argumentando que ese puesto sólo le podía pertenecer a Euler. Tal respuesta irritó aún más a Federico y, desde entonces, la relación entre ellos ya nunca fue cálida.

Para 1762 la vida monárquica en Rusia sufría modificaciones: Pedro III es derrocado por Orlov y asesinado en septiembre, y unos días después Catalina II (la Grande) es coronada en Moscú.

A la postre estos cambios en Rusia favorecieron la vida cultural de la Academia de San Petersburgo, y es por esta razón que en marzo de 1766 Euler solicita permiso a Federico II para abandonar Prusia. Al principio no fue aceptada su petición, pero en mayo del mismo año el rey le otorgó su venia para que dejara Berlín.

3. El regreso a 'casa'

Regresó a Rusia el 17 de julio de 1766 y fue recibido con grandes honores por Catalina II. Sin embargo, para esas fechas, Euler ya sufría los embates de su edad. Tenía 59 años y su salud le agobiaba en ocasiones, siendo uno de los males más notorios el avance de la ceguera. A ello se sumó la muerte de su esposa y la quema de su casa. Pero nada de esto lo detuvo, y San Petersburgo gozaría aún 17 años de su trabajo y de varios logros impresionantes. Sabemos que la obra de Euler se compone de más de 800 trabajos, y durante sus últimos 17 años escribió aproximadamente 400 de ellos.

Para terminar con esta visión panorámica de la obra euleriana abordaremos sólo dos disciplinas más –en las que mostró un interés especial cuando regresó a San Petersburgo–, y ello porque sus aportaciones tuvieron una gran trascendencia: la cartografía matemática y la óptica.

Su interés por la cartografía se remonta al año de 1735, cuando por invitación del astrónomo Nicholas Delille –que en esos años era el

---

con Voltaire, y en varias ocasiones Euler le ganó a ella los premios de la *Academia de París* –por ejemplo cuando ella participó con su *Dissertation sur la nature et la propagation du feu* Euler ganó el primer lugar–, entonces Voltaire lo tomó como un enfrentamiento personal.

director de los trabajos cartográficos de la Academia de Ciencias– se ocupó del diseño de un atlas, trabajo que le ocupó de 1736 a 1738. Entre 1740 y 1741, junto con G. Heinzius, participó en el proyecto del mapa general del Imperio Ruso.[31] Después de su partida a Berlín, en 1751, Schumacher le pidió que realizara un análisis de los mapas del atlas publicado en 1745. A su regreso de Alemania retomó el trabajo geográfico, y entre 1769 y 1783 publicó tres importantes artículos sobre cartografía matemática. El primero es *De proiectione geographica superficiei sphaericae*,[32] y en él muestra la teoría general de la representación conforme de la superficie de una esfera en el plano,[33] y a partir de ella obtiene resultados para casos particulares. En este trabajo planteó el principio general de la cartografía matemática, mismo que se refiere a la conformalidad y equivalencia de las representaciones. Para ello demostró que la superficie de la esfera no puede representarse congruentemente (que sea igual o semejante) en el plano.

El segundo artículo, *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*,[34] se ocupa de la proyección estereográfica de la esfera en el plano. Primero consideró el caso en que el plano toca a la esfera en un punto del polo sur y con el observador colocado en el polo norte. De esto obtuvo que

$$X = 2tan\left(\frac{u}{2}\right)cos(v) \qquad Y = 2tan\left(\frac{u}{2}\right)sen(v)$$

para coordenadas rectangulares, donde u es la latitud geográfica y v la longitud geográfica. Pero un manejo más analítico de esto lo llevó a establecer de manera más general que

$$Z = X + iY = 2tan\left(\frac{u}{2}\right)(cos(v) + isen(v))$$

Y con esta expresión Euler confirmó que la representación conforme se puede obtener mediante una función analítica $f(Z)$ (véase Euler, *Cartografía matemática*, 1998).

[31] Euler pensó que sus problemas de vista fueron el resultado de tanto esfuerzo visual que hizo cuando se dedicó a la cartografía. Estas inquietudes se las comentó a Goldbach en una carta del 21 de agosto de 1740.

[32] "De la proyección geográfica de la superficie de la esfera" (E491). *Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae* 1777, 1778, pp. 133-142.

[33] Lambert, en 1772, ya había publicado *Observación y complementación al tema de los mapas geográficos y cartas celestes*. En contraste con Euler, Lambert no pudo generalizar las fórmulas de las representaciones conformes y sólo lo hizo para algunos problemas particulares.

[34] "Sobre la representación de la superficie esférica sobre el plano" (E490). *Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae* 1777, 1778, pp. 107-132.

El tercer trabajo lo enfocó a la proyección de Delille, misma que estaba dedicada al diseño particular del mapa de Rusia.

Con sus trabajos de cartografía matemática Euler sentó las bases para que Gauss y Lagrange –entre otros–, retomaran la teoría iniciada por él. Sería sólo unos años después que Lagrange presentara la solución general al problema de la representación conforme de una superficie de revolución arbitraria en el plano.

Después de dejar Berlín en 1766 la continuidad de sus investigaciones no tuvo grandes obstáculos. Entre 1766 y 1769 la óptica fue una de las grandes beneficiarias de la genialidad de Euler, y en particular 1768 fue un gran año para estos tópicos, habiendo trabajado intensamente en las propiedades de lentes para telescopios y microscopios. Sus primeras aportaciones relevantes para la óptica empezaron pocos años después de que llegó a Berlín.

En 1744, en una conferencia ofrecida en el seno de la Academia de Berlín, Euler presentó por primera vez lo que se conoce como la teoría ondulatoria de la luz, es decir, su concepción acerca de la naturaleza de la luz que hacía de ésta una perturbación que se transmitía en un medio continuo. Lo novedoso de esta idea es que se contraponía directamente con la teoría newtoniana acerca de la luz, la cual sostenía que dicho ente estaba constituido por corpúsculos que se desplazaban como proyectiles. En dicha plática Euler presentó tanto los argumentos en pro de su teoría como aquéllos que pensaba iban en contra de la de Newton. Más tarde, en 1746, publicó la *Nova teoria lucis et colorum*, donde los argumentos ya ofrecidos se presentaban, fortalecidos, en lo que se considera la teoría de un efecto que se propaga en un medio continuo. Si bien habían aparecido previamente otros tratados, entre ellos el de Huygens –*Traité de la lumière* (1690)– y un artículo de Johann II Bernoulli –"Recherches physiques et géometriques sur… la propagation de la lumière" (1736)–, el éxito del texto de Euler se justifica en gran medida por el prestigio para entonces alcanzado por su autor.

Sin entrar en detalles, y sólo en primera aproximación, se podría decir que la teoría de Euler es un puente entre la teoría del pulso o del frente de onda de Huygens del siglo XVII y las ondulatorias de Young y Fresnel del XIX. Aunque equivocado en la manera como la utilizó, se puede acreditar a Euler la introducción de la noción de frecuencia en la tradición del estudio de fenómenos que ocurren en un medio continuo. Pero la idea, recuperada por Young, fructificó en la explicación de la naturaleza de los colores. Lo importante aquí es resaltar que el debate que inició Euler con la *Nova teoria* permitió que una forma de entender y explicar ciertos fenómenos físicos prevaleciera en la zona donde la figura de Euler era tenida en muy alta estima, es decir, en Alemania, Suiza, Suecia, Prusia, Rusia y, aunque parezca paradójico, también tuvo sus defensores en la misma Inglaterra, la tierra donde la tradición veneraba el recuerdo de Newton. A fin de cuentas el debate entre las dos teorías llevó a que la balanza se inclinara, por poco más de un siglo, en favor de la teoría newtoniana. Esto se debió a los efectos químicos producidos por la luz, descubrimientos que ya no fueron conocidos por Euler, y gracias a lo cual no le tocó en vida ser testigo de la debacle de su posición, en el debate entre la naturaleza ondulatoria y la corpuscular de la luz.

4. Más allá de la pureza de las matemáticas

Nuestro personaje es recordado principalmente como matemático, pero como ya se mencionó en los porcentajes relacionados con la producción y diversidad de su obra, sus aportaciones también tocaron a los espacios de la física y a lo que hoy se tiende a llamar matemáticas aplicadas.

Las incursiones y formulaciones de Euler en los aún no tan definidos campos de la electricidad y el magnetismo, la hidrodinámica, la óptica y la astronomía, las ciencias navales o la mecánica, dieron lugar a desarrollos fundamentales en la física del siglo XVIII y, vale decirlo, muchos de ellos mantienen su vigencia hasta nuestros días.

Uno de los factores que contribuyeron a la difusión y la aceptación de los puntos de vista de Euler fue la amistad que le unía con M. V. Lomonosov, la figura más influyente de la ciencia rusa en su momento, y también –como ya se mencionó– la popularidad alcanzada por la traducción al ruso de las *Cartas a una princesa alemana*. Entre sus trabajos más reconocidos –y que no es de los más conocidos– hoy en día está su *Mechanica sive motus scientia analytica exposita* de 1736, que sin lugar a dudas puede considerarse la piedra angular en la formulación de la Mecánica racional, siguiéndole en importancia su *Scientia navalis*, ya antes mencionada. Según la opinión de los expertos, en las páginas de este trabajo –el de ciencia naval– aparecen comentarios e ideas que lo ligan con casi todos los avances de la mecánica en el siglo XVIII. Esto no deja de sorprender, pues hasta no hace mucho tiempo los orígenes modernos de la hidrodinámica eran considerados como el patrimonio de Daniel y Johann Bernoulli, gracias a sus contribuciones a esta área realizadas entre los años 1729 y 1743. Durante este periodo Euler no publicó ni una sola línea que tocara el tema, y sin embargo los estudios históricos más recientes lo colocan, gracias a sus relaciones de amistad e intercambio de ideas con los Bernoulli, justo tras el telón de todo lo que ocurría en el campo de la hidrodinámica de fluidos ideales.

Durante este tiempo, la década de los 40, Clairaut y Fontaine se ocupaban de problemas que conducirían a la teoría del potencial: geometría de curvas, cálculo de variaciones, y mecánica. Tomando sus trabajos como punto de partida, para 1752 tuvo a punto su *Principia motus fluidorum* en el que se muestran sus avances, con una notación clara, en el cálculo de varias variables, elemento importante para generalizar la llamada ecuación de energía de Galileo-Leibniz para una partícula que cae debido a la acción de la gravedad. En este trabajo parte de un principio general aplicable a cuerpos continuos sujetos a fuerzas generalizadas, lo cual lo vinculaba estrechamente con el principio de mínima acción de Daniel Bernoulli y Maupertius. Montado sobre los hombros de estos personajes, así como en los de D' Alembert y Clairaut, estableció lo que sería la mecánica de fluidos bajo el formato de diferenciales totales para fuerzas y velocidades. Su enfoque fructificó, y los trabajos de Lagrange acerca de fluidos y la propagación del sonido utilizando técnicas de valores extremos son una consecuencia casi directa de la obra de Euler. La mecánica de Laplace sería el punto culminante de este enfoque.

El 18 de septiembre de 1783 trabajaba en los cálculos de la órbita de Urano. El artículo que contiene estos cálculos ya no lo podemos citar, y la razón es que Leonhard Euler murió ese día. Pero como muestra de que existe una justicia en la historia, Euler no murió en la mente de todos aquéllos cercanos a las matemáticas y a la física, y desde la perspectiva de nuestro tiempo se tiene plena conciencia de las enseñanzas y sorpresas que nos dejó una de las mentes más brillantes y prolíficas en la historia de la humanidad.

Nota

Todas las referencias de la obra de Leonhard Euler que se utilizaron para el presente trabajo están directamente en las notas a pie de página a lo largo del artículo.

Referencias

[1] Euler, Leonhard. *Cartografía matemática.* Edición de: Guillermo García Talavera & Noé Barra Zenil, 1998 México: IPN-Noriega

Limusa.

[2] Gowers, Timothy. “Puentes inesperados entre tres universos.” *Mundo Científico*, 2001 No. 229, p.31-33.

[3] Guevara, César & Uresti, Juan. “¿Formuló Goldbach la conjetura de Goldbach?” *Revista Ciencias.* México: Facultad de Ciencias, UNAM. 2006 81: 72-79

[4] Hopkins, Brian & Wilson, Robin. *The Truth about Königsberg.* College Mathematical Journal, 2004. 35: 198-207.

[5] Juškevič, A. P. & Winter, E. *Leonhard Euler und Christian Goldbach.* Briefwechsel, 1965. pp. 1729-1764. Berlin: Akademie-Verlag.

[6] Legendre, A. M. *Théorie des Nombres.* Tercera edición, 1830. pp. 128-133.

[7] Truesdell, Clifford. “Leonhard Euler, Supreme Geometer.” Contenido en: *The Genius of Euler*, 2007. Editado por: William Dunham. USA: Mathematical Association of America.

[8] Weil, André. “Two Lectures on Number Theory, Past and Present.” *L'Enseignement Mathématique*, 1974. 20: 87-110.