

Todo cabe en un jarrito: una invitación a la teoría de inmersiones isométricas

Oscar Palmas

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional Autónoma de México

Ciudad de México, México

oscar.palmas@ciencias.unam.mx

1. Introducción

Una de las «técnicas» usuales en la investigación en matemáticas es la búsqueda de una *zona de confort*, entendida como un ambiente donde sepamos resolver ciertos problemas o facilitar ciertos cálculos. Por ejemplo, en vez de trabajar con objetos abstractos, *en una especie de limbo*, podríamos preguntarnos si dichos objetos pueden ser considerados como subconjuntos de algún espacio ambiente conocido. En geometría, sin duda, el espacio ambiente más amigable es el espacio euclidiano \mathbb{R}^n , al que tomaremos como nuestra zona de confort, por lo menos por el momento. Más adelante mencionaremos a otros espacios ambiente donde también podremos trabajar a gusto.

Es común iniciar a un estudiante dentro de los caminos de la geometría diferencial estudiando curvas y superficies en \mathbb{R}^3 , para luego pasar posiblemente a \mathbb{R}^n o brincar directamente al mundo un poco más abstracto de las variedades y subvariedades diferenciables. Cuando ya nos han presentado algunos entes abstractos, por ejemplo, una superficie *en el limbo*, es natural tratar de regresar a nuestra zona de confort y preguntarnos si hay alguna forma de pensar a este ente como subconjunto de un espacio euclidiano.

Seamos un poco más precisos, para ir fijando ideas. Damos la siguiente definición en forma general, aunque muchas veces trabajaremos solo en el espacio euclidiano.

Palabras clave: inmersión, isometría, curvatura en variedades.

Versión modificada para *Miscelánea* del curso corto *Introducción a las inmersiones isométricas*, impartido en el XVI Coloquio de Geometría de la Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, diciembre de 2019.

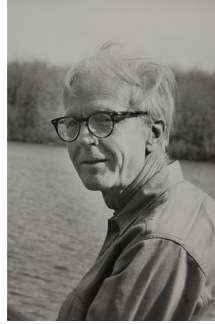


Figura 1. Hassler Whitney (1907-1989). Imagen: Wikimedia Commons.

Definición 1.1. Sean M^m , N^n variedades diferenciables de dimensiones m , n , respectivamente. Una *inmersión* de M en N es una transformación diferenciable $f: M \rightarrow N$ cuya diferencial df_p es inyectiva para todo punto $p \in M$.

En la definición pedimos que la diferencial sea una transformación lineal inyectiva, necesariamente $m \leq n$; es decir, estamos «metiendo» una variedad de dimensión menor en otra de dimensión mayor. Veamos dos ejemplos.

Ejemplo 1.1. *El caso sencillo ocurre cuando M es un intervalo (a, b) en \mathbb{R} y N es \mathbb{R}^2 . Entonces una inmersión de M en N no es otra cosa que una curva $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$. (Sé que hay otras notaciones más convencionales, pero me quedaré con esta para que el artículo sea uniforme.) En primer lugar, pedimos que la transformación f sea diferenciable. En segundo lugar, la condición de que su diferencial sea inyectiva es equivalente a que $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$; es decir, que el vector tangente a la curva sea siempre distinto de cero. Intuitivamente, esto quiere decir que la curva nunca se detiene bruscamente.*

Ejemplo 1.2. *Fijemos las dimensiones m, n , con $m \leq n$. La llamada inmersión canónica de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^n es la transformación $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por*

$$f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Un resultado en el área nos dice que cualquier inmersión se ve de esta manera, al menos en una vecindad de un punto p donde df_p es inyectiva; véase por ejemplo [7].

Si el lector tiene ciertos conocimientos de geometría o topología diferencial sabrá que existe un concepto un poco más fuerte, el de *encaje*; nos quedaremos con el de inmersión en este escrito. El siguiente es uno de los resultados más importantes en topología diferencial.

Teorema 1.1 (Whitney, 1936). *Toda variedad diferenciable M^m admite una inmersión en \mathbb{R}^{2m} .*

También es probable que algunos lectores sepan que existen versiones más fuertes de este resultado, pero recordemos que solo queremos dar una probada de esta teoría y recordar algunos resultados fundamentales. La prueba original aparece en [16], pero puede consultarse en [7], por ejemplo.

Ahora bien, en nuestro caso quisiéramos hablar de un tipo particular de inmersiones, aquellas llamadas *isométricas*, es decir, que preserven distancias. Para hablar de estas, debemos introducir algunas ideas.

De la geometría diferencial sabemos que la distancia entre dos puntos p, q en una variedad M está dada por el ínfimo de las longitudes de las curvas que unen p con q , y que la longitud de una curva está dada por la integral de la norma de la derivada:

$$\text{long}(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt,$$

y a su vez sabemos que la norma está dada por un producto escalar. Es natural entonces pedir que una isometría se defina en términos de dicho producto. Si uno reflexiona un poco sobre otros conceptos geométricos, verá que varios de ellos se expresan en términos del producto escalar, el cual por tanto se convierte en un concepto central de la geometría.

En este contexto, recordemos que una variedad riemanniana se define como una variedad diferenciable M que tiene una métrica riemanniana, es decir, un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en cada espacio tangente $T_p M$.

Definición 1.2. Sean M^m, N^n variedades riemannianas de dimensiones m, n , respectivamente. Una *inmersión isométrica* de M en N es una inmersión $f: M \rightarrow N$ que a la vez es una *isometría*; es decir, su diferencial df_p satisface

$$\langle df_p v, df_p w \rangle = \langle v, w \rangle$$

para cada $p \in M$ y cualesquiera $v, w \in T_p M$, o en forma equivalente,

$$\|df_p v\| = \|v\|$$

para cada $p \in M$ y todo $v \in T_p M$.

Ejemplo 1.3. *Consideremos la transformación $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por*

$$f(t) = (\cos t, \text{sen } t);$$

como $\|f'(t)\| = 1$, en la jerga de Cálculo decimos que f es una curva parametrizada por longitud de arco. Este es un ejemplo de inmersión isométrica. Por otro lado, la transformación $t \mapsto (\cos 2t, \text{sen } 2t)$ no es

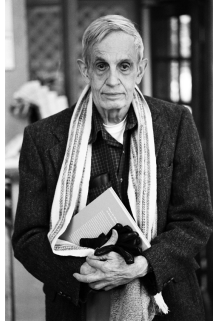


Figura 2. John Nash (1928-2015). Imagen: Wikimedia Commons.

*una inmersión isométrica: Como la derivada tiene norma 2, si recorremos el dominio con velocidad unitaria, entonces recorreremos la imagen con el doble de velocidad.*¹

2. Un resultado optimista

La pregunta que estamos explorando aquí es cuándo existe una inmersión isométrica de una variedad en otra. Veamos qué ocurre, de nuevo, en el caso más sencillo, donde M tiene dimensión uno; es decir, es una curva. Para fijar ideas, pensemos que esta curva está dada por una inmersión $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Un resultado conocido de los cursos de cálculo muestra que *cualquier curva regular se puede parametrizar por longitud de arco*. Esto nos dice que cualquier curva regular es isométrica a un intervalo de \mathbb{R} , que puede tener longitud finita o infinita. Luego, al componer con la inmersión canónica $t \mapsto (t, 0)$ obtenemos una inmersión canónica de la curva original en cualquier \mathbb{R}^n . Así, no hay mucho que explorar en este caso de las curvas.

El caso de dimensión 2, es decir, el de las superficies, ya es un poco más complicado y revisaremos algunos aspectos de este más adelante. Ahora mencionemos un resultado general positivo, que apareció en [10]:

Teorema 2.1 (Nash, 1954). *Toda variedad riemanniana de dimensión m admite una inmersión isométrica en \mathbb{R}^{2m} .*

Como curiosidad, un par de años después [11], el propio Nash demostró lo que yo llamaría el teorema de la lasaña, sobre todo por la parte final:

Teorema 2.2 (Nash, 1956). *Toda variedad riemanniana de dimensión m admite una inmersión isométrica en \mathbb{R}^n , $n = \frac{3}{2}m^3 + 7m^2 + \frac{11}{2}m$; de*

¹Por supuesto, las afirmaciones son intuitivas, pero tienen pruebas precisas.

hecho, admite una inmersión isométrica en cualquier porción pequeña de este espacio.

El número n que aparece en el teorema puede ser muy grande y de hecho no ser el óptimo para algunos casos conocidos. Pensemos en una situación simple, donde queremos meter a todo el plano \mathbb{R}^2 de manera isométrica en una pequeña vecindad del origen en algún \mathbb{R}^n . Para hacer esto, tenemos que empezar a doblar...y doblar...y doblar a nuestro plano, sin encogerlo ni estirarlo. Lo que afirma Nash es que esto siempre se puede hacer, ¡sin importar cuán pequeña sea la vecindad!

3. Una visión pesimista

Veamos ahora la otra cara de la moneda. ¿En qué casos estamos seguros de no poder hallar una inmersión isométrica? Una respuesta está en el estudio de uno de los invariantes más importantes de la geometría: la curvatura.²

Para las superficies en \mathbb{R}^3 , tradicionalmente se introduce el concepto de curvatura *gaussiana* de la manera siguiente. Supongamos que nuestra superficie³ $M \subset \mathbb{R}^3$ es *orientable*, de modo que existe un campo vectorial unitario ξ tal que en cada punto $p \in M$, ξ_p es ortogonal a la superficie; es decir, es ortogonal al plano tangente T_pM .

Medimos la curvatura de M en p mediante la variación de este vector normal, como sigue. Fijamos un vector tangente $v \in T_pM$ (que podemos suponer unitario) y cortamos M con un plano por p generado por ξ_p y v , obteniendo una curva en M tangente al vector v , llamada la *sección normal* en la dirección de v ; véase la figura 3.

Denotamos la variación de ξ a lo largo de dicha curva por $-D_v\xi$, donde el signo menos es convencional debido a algunos cálculos que aparecen posteriormente. Esto define una transformación $v \mapsto Av = -D_v\xi$. De hecho $A: T_pM \rightarrow T_pM$ será un *operador lineal autoadjunto*, es decir,

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle.$$

Esto quiere decir que en este momento podemos *echarle la caballería* a nuestro problema; más formalmente, podemos usar la maquinaria de álgebra lineal y concluir que este operador es diagonalizable, con dos valores propios reales λ_1, λ_2 . En términos geométricos, estos valores se llaman las *curvaturas principales* de M en p y se pueden interpretar

²Daremos una idea resumida de varios resultados de geometría diferencial y riemanniana; el lector puede ver más detalles en [5] o bien [12].

³De nuevo, tradicionalmente las superficies se denotan como S , pero mantendremos la notación uniforme en este artículo.

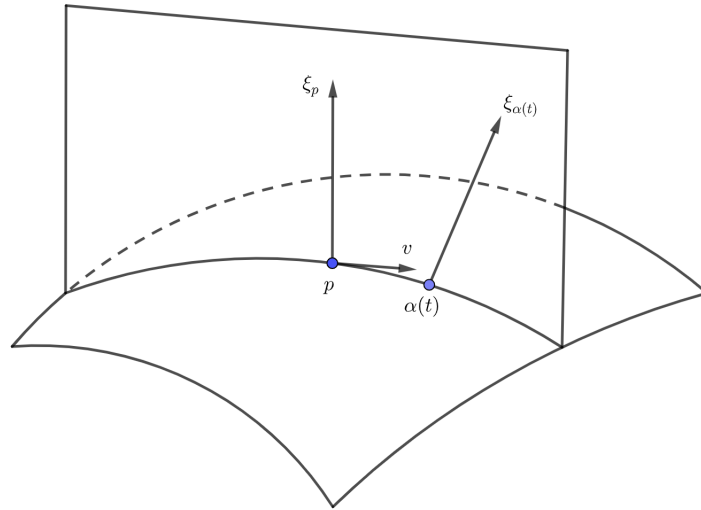


Figura 3. Para calcular $D_v \xi$, consideramos una curva α tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Entonces $D_v \xi = \frac{d}{dt} \xi_{\alpha(t)}|_{t=0}$.

como los valores máximo y mínimo de las curvaturas de las secciones normales en la dirección de todos los vectores tangentes a M en p .

Definición 3.1. La *curvatura gaussiana* K de una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ en un punto p es el producto de las curvaturas principales en p ; es decir,

$$K = \lambda_1 \lambda_2.$$

En la figura 4 mostramos una interpretación geométrica del signo de la curvatura gaussiana:

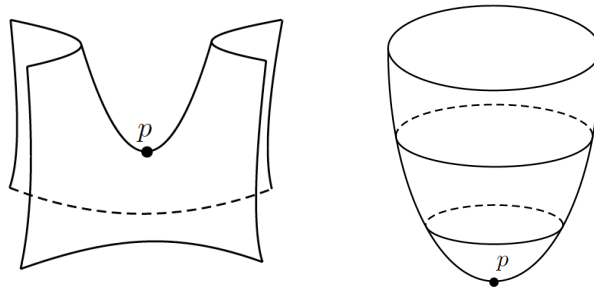


Figura 4. Izquierda: Cuando $K < 0$, hay puntos de M cercanos a p a ambos lados del plano tangente. Derecha: Cuando $K > 0$, los puntos cercanos a p están de un solo lado del plano tangente.

El famoso teorema egregio de Gauss afirma que la curvatura gaussiana de una superficie es invariante bajo isometrías; en otras palabras, la



Figura 5. David Hilbert (1862-1943). Imagen: Wikimedia Commons.

curvatura gaussiana de una superficie se mantiene, aunque deformemos dicha superficie dentro de \mathbb{R}^3 , claro, sin estirla ni encogerla.

La idea de la demostración del teorema egregio es simple: obtenemos una (larga) expresión analítica de K en términos de los productos escalares de los elementos de una base de T_pM . Como este producto escalar es invariante bajo isometrías, la curvatura gaussiana también lo será.

Aunque no escribiremos aquí la larga expresión de K mencionada en el párrafo anterior (véase, por ejemplo, [5]), sí mencionaremos que dicha expresión nos servirá para extender el concepto de curvatura a superficies abstractas es decir, superficies *en el limbo*, que tienen definido en cada punto un producto escalar. Hemos dicho que en el caso de una superficie en \mathbb{R}^3 , K tiene una expresión en términos de los productos escalares de una base de T_pM . En el caso de una superficie abstracta dotada de productos escalares, podemos hacer algo completamente análogo: fijamos una base $\{v, w\}$ de T_pM y definimos la *curvatura seccional* $\text{Sec}(v, w)$ en la dirección de v, w mediante la expresión que aparece en la prueba del teorema egregio. No nos preocupamos de nada más: la demostración de que este número es invariante bajo isometrías es directa, pues la expresión está dada en términos de productos escalares, que son invariantes bajo isometrías.⁴

En resumen, el concepto de curvatura gaussiana se puede extender al contexto de cualquier superficie abstracta, ahora con el nombre de curvatura seccional. Ahora podemos citar otro teorema clásico, que se refiere al plano hiperbólico, una superficie abstracta con curvatura seccional constante⁵ negativa.

Teorema 3.1 (Hilbert, 1901). *No existe una inmersión isométrica del plano hiperbólico en \mathbb{R}^3 .*

⁴Este número también es independiente de la base elegida $\{v, w\}$; el lector puede ver los detalles en [12].

⁵Es decir, $\text{Sec}(u, v)$ es el mismo para cada $p \in M$ y cualesquiera $u, v \in T_pM$ ortonormales.



Figura 6. Nikolai Efimov (1910-1982) y Tilla Weinstein (1934-2002).
Imágenes: Wikipedia (página en ruso) y Wikimedia Commons.

Como hasta ahora no he demostrado nada, esta vez tampoco será la excepción; solo daré una muy breve idea; la prueba original aparece en [8] y una explicación detallada en [5]. Supongamos por contradicción que existe tal inmersión y sea $M \subset \mathbb{R}^3$ la imagen de la inmersión. Se puede mostrar, sin mucho esfuerzo, que el área de M es infinita. Sin embargo, y esa es la parte detallada, también es posible mostrar que el área de cualquier conjunto compacto en M está acotada por una constante, lo cual es imposible.

Han pasado muchos años desde la publicación de este célebre teorema, así que conviene enumerar otros resultados posteriores, no menos importantes. En primer lugar, el hecho de que la curvatura de nuestra superficie abstracta sea constante no juega un papel fundamental, como muestra el siguiente resultado probado en [6]. En relación con la prueba de este teorema, no podemos pasar por alto la amplia explicación [9] de 70 páginas que Tilla Klotz Milnor publicó en 1972.⁶

Teorema 3.2 (Efimov, 1964). *Sea M una superficie (abstracta) completa⁷ cuya curvatura seccional satisface $K \leq -\delta < 0$ para alguna constante $\delta > 0$. Entonces, no existe una inmersión isométrica de M en \mathbb{R}^3 .*

Veamos ahora qué ocurre en dimensiones superiores a 2. Recordemos que hemos dicho que la curvatura seccional es la generalización directa de la curvatura gaussiana. Dicha curvatura seccional en un punto p de una variedad M se puede expresar en términos de una pareja de vectores linealmente independientes v, w en el espacio tangente T_pM , razón por la cual se denota por $\text{Sec}(v, w)$.

⁶Como dato curioso, debido a que en Estados Unidos las mujeres adquieren el apellido de su marido y a que ella tuvo tres matrimonios, Tilla (Savanuck de nacimiento) publicó artículos con sus tres apellidos de casada: Klotz, Milnor y Weinstein. En el caso del artículo mencionado, fue publicado con los apellidos de sus dos primeros matrimonios.

⁷Una variedad es *completa* si lo es como espacio métrico, donde la distancia se define como un ínfimo de longitudes, hecho que ya señalamos en la sección 1.

Si la variedad M tiene dimensión m , podemos definir una nueva curvatura. Para no complicar las expresiones, primero daré la definición en un caso particular. Fijamos un vector **unitario** $w \in T_p M$, completamos una base **ortonormal** de $T_p M$ de la forma $\{e_1, \dots, e_{m-1}, e_m = w\}$ y calculamos la siguiente suma de curvaturas seccionales:

$$\text{Ric}(w) = \sum_{i=1}^{m-1} \text{Sec}(e_i, w). \quad (1)$$

Se puede demostrar que el valor dado en (1) no depende de los vectores e_1, \dots, e_{m-1} usados para completar la base ortonormal junto con w y se llama la *curvatura de Ricci* en la dirección de w .

Es conveniente interpretar de alguna forma $\text{Ric}(w)$. Observemos que si dividimos el lado derecho de (1) entre $(m - 1)$, obtenemos el promedio de las curvaturas seccionales que aparecen ahí. De este modo, la curvatura de Ricci no es más que un promedio, que se puede usar como una condición un poco más débil sobre nuestras variedades.

Usualmente pongo a mis estudiantes una analogía: para aprobar el curso, ¿qué es más estricto, pedirles que aprueben todos los exámenes parciales (y tomar el promedio de las calificaciones) o simplemente pedirles que el promedio de los exámenes parciales sea aprobatorio? De manera similar, es más estricto pedir a una variedad que todas sus curvaturas seccionales sean positivas (por ejemplo) que simplemente pedir que el promedio de las curvaturas seccionales sea positivo. Un camino usual para demostrar resultados en geometría diferencial consiste en imponer primero condiciones sobre la curvatura seccional y probar algo, para luego extenderlo al caso de la curvatura de Ricci.

Ahora que hemos definido $\text{Ric}(w)$ para un vector unitario, podemos definir la *norma* $\|\text{Ric}\|$ como

$$\|\text{Ric}\| = \max_{\|w\|=1} |\text{Ric}(w)|.$$

Para no sentirme del todo culpable por abreviar esta historia en aras de una exposición sencilla, trataré de explicar en unas cuantas líneas (que el lector puede omitir tranquilamente) la razón subyacente en la definición de $\|\text{Ric}\|$. Para esto, recurriremos de nuevo al álgebra lineal. En primer lugar, extendemos la definición de la curvatura de Ricci al caso de cualquier vector w , no necesariamente unitario, pidiendo que Ric sea una *forma cuadrática*; es decir, extendiendo su definición mediante la expresión

$$\text{Ric}(\lambda w) = \lambda^2 \text{Ric}(w)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $w \in T_p M$ unitario. Esta forma cuadrática tiene asociada una forma bilineal, como recordaremos a continuación. Una *mala noticia* es que esta forma bilineal, el *tensor de Ricci*, usualmente



Figura 7. Brian Smyth y Frederico Xavier. Imágenes de las páginas de las universidades de Notre Dame y Texas Christian.

se denota igual que la curvatura de Ricci. Para no confundir al lector, usaré la notación $\overline{\text{Ric}}$ para esta forma bilineal, que se define mediante la siguiente fórmula de polarización:

$$\overline{\text{Ric}}(v, w) = \frac{1}{2} (\text{Ric}(v + w) - \text{Ric}(v) - \text{Ric}(w)).$$

Entonces, la norma que hemos definido es en realidad la norma de una forma cuadrática; o bien, la norma de una forma bilineal:

$$\begin{aligned} \|\text{Ric}\| &= \max_{\|w\|=1} |\text{Ric}(w)| \quad (\text{como forma cuadrática}) \\ &= \max_{\|v\|=\|w\|=1} |\overline{\text{Ric}}(v, w)| \quad (\text{como forma bilineal}) \end{aligned}$$

Podemos ahora enunciar nuestro tercer resultado *pesimista*, cuyos detalles se pueden consultar en [13]:

Teorema 3.3 (Smyth y Xavier, 1987). *Sea $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, $m \geq 3$, una inmersión isométrica de una variedad completa con curvatura de Ricci negativa. Si $m > 3$, supongamos además que la curvatura seccional de M está acotada. Entonces*

$$\inf_{p \in M} \|\text{Ric}\| = 0.$$

Solo daremos una interpretación geométrica de la condición adicional cuando $m \geq 3$, pues su discusión más amplia nos desviaría de la línea de este artículo. Para esto, primero hacemos notar que la curvatura seccional de una esfera $\mathbb{S}^2(r)$ de radio r es igual a $1/r^2$, de modo que si r tiende a cero, la esfera es cada vez pequeña y su curvatura seccional tiende a infinito. Así, al pedir que la curvatura esté acotada por arriba, estamos pidiendo que no haya puntos con curvatura arbitrariamente grande.⁸

El resultado siguiente nos dice por qué este teorema es pesimista.

⁸El análogo de esta observación para el caso de curvatura seccional negativa toma como modelo al espacio hiperbólico con curvatura $-1/r^2$; véanse los detalles en [12].

Corolario 3.1. *Sea M^m , $m \geq 3$, una variedad completa tal que*

$$\text{Ric} \leq -\delta < 0$$

para una constante $\delta > 0$. Si $m > 3$, supongamos además que la curvatura seccional de M está acotada. Entonces no existe una inmersión isométrica de M en \mathbb{R}^{m+1} .

Explicaré brevemente la prueba del teorema 3.3 para el caso $m = 3$, con el fin de introducir un resultado colateral interesante; pero antes habrá que definir unas cuantas cosas más.

Para no cargar mucho la notación, en vez de considerar una inmersión $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, pensemos que M ya está contenida en \mathbb{R}^{m+1} ; es decir, identificamos a M con su imagen $f(M)$. Como en el caso de las superficies estudiado en la sección 3, supondremos en lo sucesivo que M sea orientable; es decir, que exista un campo vectorial unitario ξ normal a M y definido globalmente en M . Como en la sección ya mencionada, para cada dirección v tangente a M en un punto p , nos fijamos en la derivada del vector ξ en esa dirección; en símbolos,

$$Av = -D_v \xi.$$

Este es el *operador de forma* de M en \mathbb{R}^{m+1} , y vuelve a ser autoadjunto:

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$$

de modo que (para cada $p \in M$) tiene valores propios reales $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, llamados las *curvaturas principales* de M en p . Denotaremos por CP^+ (respectivamente, CP^-) al conjunto de curvaturas principales positivas (respectivamente, negativas) de A (variando sobre todos los puntos de M).

Ahora podemos enunciar el llamado *teorema de las curvaturas principales*, probado por Smyth y Xavier en [13]:

Teorema 3.4. *Consideremos una inmersión isométrica $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ de una variedad completa y orientable M en \mathbb{R}^{m+1} . Si CP^+ y CP^- son diferentes del vacío, entonces*

$$\sup_{p \in M} CP^- = \inf_{p \in M} CP^+ = 0.$$

En otras palabras, si CP^+ y CP^- son diferentes del vacío, entonces siempre existen puntos con curvaturas principales cercanas a cero, ya sea positivas o negativas.

Usemos este resultado para dar la idea de la demostración del teorema 3.3 en el caso $m = 3$. Supongamos que $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ y que A es su operador de forma. Como ya hemos mencionado, este operador tiene (en cada punto) tres valores propios reales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ asociados a correspondientes

vectores propios e_1, e_2, e_3 , que podemos suponer ortonormales. Usando la ecuación de Gauss (véase [12]), tenemos por ejemplo, que

$$\begin{aligned}\text{Ric}(e_1) &= \text{Sec}(e_1, e_2) + \text{Sec}(e_1, e_3) \\ &= \langle Ae_1, e_1 \rangle \langle Ae_2, e_2 \rangle + \langle Ae_1, e_1 \rangle \langle Ae_3, e_3 \rangle \\ &= \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3).\end{aligned}$$

Se puede demostrar análogamente que

$$\begin{aligned}\text{Ric}(e_2) &= \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3), \\ \text{Ric}(e_3) &= \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2).\end{aligned}$$

Si algún valor propio se anula en un punto de M , entonces $\inf_{p \in M} \|\text{Ric}\| = 0$, de modo que podemos suponer que todos son diferentes de cero. De hecho, podemos elegir la orientación de M de modo que $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \geq \lambda_3$.

Ahora, $\text{Ric} \leq 0$ implica que

$$\lambda_1 \geq |\lambda_2| \quad \text{y} \quad \lambda_1 \geq |\lambda_3|. \quad (2)$$

Por el teorema de las curvaturas principales, $\inf_{p \in M} \lambda_1 = 0$, lo que implica que existe una sucesión de puntos $\{p_n\}$ en M tales que $\lambda_1(p_n) \rightarrow 0$. Por las desigualdades (2), también ocurre que $\lambda_2(p_n), \lambda_3(p_n) \rightarrow 0$, de modo que los valores $\text{Ric}(e_1), \text{Ric}(e_2), \text{Ric}(e_3)$, en los puntos p_n tienden a cero, lo que concluye la demostración.

4. El punto de vista intrínseco/extrínseco

Los teoremas de la sección anterior resuelven una cuestión intrínseca, en el sentido de que podemos decidir si podemos realizar ciertas variedades riemannianas como subconjuntos de un espacio euclidiano. Sin embargo, esto no hace referencia a lo que pase de manera extrínseca, es decir, a la relación que existe entre la subvariedad y el ambiente.

Para explicar un poco más nuestro punto, regresemos a un ejemplo sencillo, el de las curvas en \mathbb{R}^2 . En este caso tenemos una cantidad geométrica extrínseca natural, la curvatura. Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva parametrizada por longitud de arco s , sabemos que la curvatura (sin signo) está dada por $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$. En el caso de \mathbb{R}^2 , podemos definir un signo para la curvatura, estableciendo que el vector normal unitario $n(s)$ forme junto con el tangente $t(s) = \alpha'(s)$ una base positiva $\{t(s), n(s)\}$ en cada punto $\alpha(s)$. Elegimos entonces el signo de κ de modo que $\alpha''(s) = \kappa(s)n(s)$.

Nos podemos preguntar si existe una inmersión isométrica del intervalo I de definición de α tal que tenga esa curvatura prescrita κ . La



Figura 8. Pierre-Ossian Bonnet (1819-1892). Imagen: Wikimedia Commons.

respuesta es que sí; es un sencillo ejercicio (véase [5]) mostrar que la curva

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \theta(\tau) d\tau, \int_{s_0}^s \sin \theta(\tau) d\tau \right), \quad \theta(\tau) = \int_{s_0}^{\tau} \kappa(\sigma) d\sigma,$$

cumple estos requisitos.

Pasemos al siguiente nivel de complejidad, la dimensión 2. En el caso de una superficie M en \mathbb{R}^3 , hemos mencionado dos objetos importantes: el primero es intrínseco, el producto escalar en cada $p \in M$, mientras que el operador de forma $Av = -D_v \xi$ ya mencionado antes, es extrínseco, pues hace uso del vector ξ normal a nuestra superficie.

Pensemos el problema de la inmersión isométrica de esta manera: dada una superficie abstracta M , si damos en cada punto de M un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y una transformación lineal autoadjunta $A: T_p M \rightarrow T_p M$, ¿es posible hallar una inmersión $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de modo que el producto escalar en p sea justamente el producto escalar de \mathbb{R}^3 (es decir, que la inmersión sea isométrica) y que la transformación A sea el operador de forma de M en cada p ?

Los teoremas que expusimos en la sección anterior muestran que la respuesta a esta pregunta es *no siempre*. Necesitamos imponer condiciones a nuestros objetos para tener la esperanza de obtener algún resultado satisfactorio. Estas reciben el nombre genérico de *condiciones de compatibilidad*.

En un curso de geometría diferencial de curvas y superficies se ve que dada una superficie en \mathbb{R}^3 , los productos escalares $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y operadores de forma A satisfacen las llamadas ecuaciones de Gauss y Mainardi-Codazzi, que por el momento no escribiremos aquí, para no abrumar al lector, quien puede consultarlas en [5]. Estas ecuaciones son necesarias, pero también suficientes, para la existencia de una inmersión isométrica $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de una superficie abstracta M . Este hecho fue demostrado por Bonnet en 1865; véase [1].

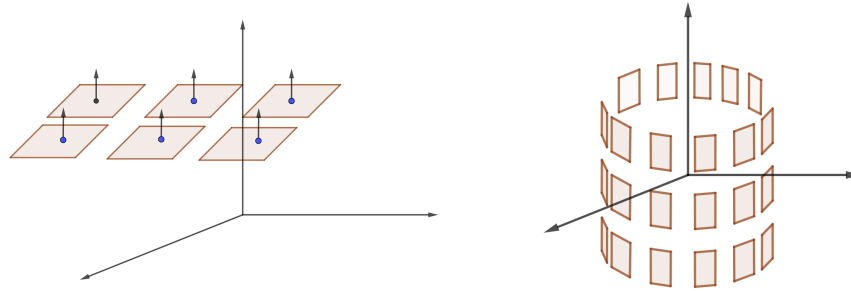


Figura 9. Ejemplos de familias de planos en \mathbb{R}^3 .

La idea intuitiva detrás del teorema de Bonnet (y sus generalizaciones, que mencionaremos más adelante) es la siguiente. Pensemos primero en el caso más sencillo posible, en las formas de «meter» un pedazo de plano $U \subset \mathbb{R}^2$ en \mathbb{R}^3 de manera isométrica. Una primera forma es meterlo como un pedazo de plano. Otra es meterlo como un pedazo de cilindro, o como un pedazo de cono, etcétera. La forma en que metamos U en \mathbb{R}^3 será dictada por sus vectores normales: Si metemos U como un pedazo de plano, el vector normal será siempre el mismo en todos los puntos, mientras que variará de cierta manera en el caso de un cilindro o un cono. El comportamiento de los vectores normales estará determinado a su vez por la variación $D_v \xi$; es decir, por el operador de forma.

Cambiaremos un poco nuestra perspectiva, por medio de la siguiente conocida observación. Dado un vector $\xi_p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, este determina un plano, a saber, el plano ortogonal a ξ_p . Así, es equivalente dar los vectores ξ_p que dar una familia de planos en \mathbb{R}^3 , como en la figura 9.

No cualquier familia de planos será la familia de planos tangentes a una superficie⁹. Las condiciones adecuadas para que una familia dada de planos sí sea la familia de planos tangentes a una superficie son las condiciones de compatibilidad ya mencionadas. El lector puede ver la idea de la demostración de esta afirmación, para el caso de superficies en \mathbb{R}^3 , en [5]. En el fondo, este hecho es consecuencia de un teorema profundo de geometría diferencial llamado el *teorema de integrabilidad de Frobenius*, al que se le puede dedicar (y se le han dedicado) innumerables páginas. El lector puede ver varias facetas de este resultado en [14].

⁹Superficie diferenciable, por supuesto. ¿Puede el lector imaginar algún ejemplo?



Figura 10. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo: Ketten Tenenblat, Marcos Dajczer, Ruy Tojeiro y Benoît Daniel. Imágenes de Research Gate, IMPA, UFSCar e IMPA.

5. ¿Qué pasa en otros ambientes?

Como el lector puede imaginar, se ha recorrido un largo camino desde la demostración del teorema de Bonnet en 1865. Quisiera cerrar este trabajo describiendo brevemente qué ocurre al pasar a otros ambientes diferentes de \mathbb{R}^3 .

El espacio euclidiano y codimensión arbitraria. El problema de existencia de una inmersión isométrica de una variedad M^m de dimensión m en un espacio euclidiano \mathbb{R}^{m+k} (k es llamada la *codimensión*) es bastante similar al caso de inmersión de una superficie en \mathbb{R}^3 . De nuevo, se da una familia de transformaciones A que jugarán el papel de operadores de forma y las condiciones de compatibilidad son bastante similares a las del caso de las superficies. En este estudio se han usado diversas técnicas, pero podemos mencionar destacadamente el artículo de Ketten Tenenblat [15], quien demostró este resultado en 1971 de una manera bastante didáctica, usando formas diferenciales y el anteriormente mencionado teorema de Frobenius.

Formas espaciales. Una *forma espacial* es una variedad riemanniana completa, simplemente conexa, con curvatura seccional constante. Se puede demostrar que las formas espaciales se reducen a los espacios euclidianos \mathbb{R}^n , las esferas \mathbb{S}^n y los espacios hiperbólicos \mathbb{H}^n . El

problema de inmersión isométrica de una variedad M^m en las formas espaciales también está resuelto y puede verse una clara exposición de este caso en el reciente libro de Marcos Dajczer y Ruy Tojeiro [2].

El trabajo de Benoît Daniel. En el periodo 2007-2009, Daniel publicó sus resultados acerca de inmersiones isométricas en productos riemannianos de la forma $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, así como en ciertas variedades («homogéneas») de dimensión 3; véase [3] y [4]. Él mostró que las condiciones de compatibilidad conocidas como ecuaciones de Gauss-Codazzi-Ricci, utilizadas en los casos de las formas espaciales, no son suficientes para la existencia de tal inmersión, y agregó las condiciones adecuadas para garantizar tal existencia. Estos resultados han servido como inspiración para muchos desarrollos más recientes.

6. Aclaración final

En estas notas nos hemos centrado en unos cuantos métodos para el estudio de las inmersiones isométricas, pero para ser justos debemos mencionar que existen en la literatura varias vías de atacar este problema. Así, la lista de referencias incluidas dista muchísimo de ser completa, pero esperemos que con esta descripción el lector se lleve una ligera (y buena) impresión de algunos resultados y problemas vigentes en esta área.

Bibliografía

- [1] P.-O. Bonnet, «Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donné'», *J. Éc. Polytech.*, vol. 42, 1867, 1–53.
- [2] M. Dajczer y R. Tojeiro, *Submanifold theory*, Universitext, Springer, New York, 2019, Beyond an introduction.
- [3] B. Daniel, «Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds», *Comment. Math. Helv.*, vol. 82, núm. 1, 2007, 87–131.
- [4] ———, «Isometric immersions into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces», *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 361, núm. 12, 2009, 6255–6282.
- [5] M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves & surfaces*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016, Revised & updated second edition of [MR0394451].
- [6] N. V. Efimov, «Generation of singularities on surfaces of negative curvature», *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 64 (106), 1964, 286–320.
- [7] V. Guillemin y A. Pollack, *Differential topology*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010, Reprint of the 1974 original.
- [8] D. Hilbert, «Ueber Flächen von constanter Gausscher Krümmung», *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 2, núm. 1, 1901, 87–99.
- [9] T. K. Milnor, «Efimov's theorem about complete immersed surfaces of negative curvature», *Advances in Math.*, vol. 8, 1972, 474–543.
- [10] J. Nash, « C^1 isometric imbeddings», *Ann. of Math. (2)*, vol. 60, 1954, 383–396.
- [11] ———, «The imbedding problem for Riemannian manifolds», *Ann. of Math. (2)*, vol. 63, 1956, 20–63.

- [12] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, vol. 103, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983, With applications to relativity.
- [13] B. Smyth y F. Xavier, «Efimov's theorem in dimension greater than two», *Invent. Math.*, vol. 90, núm. 3, 1987, 443–450.
- [14] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*, 2.^a ed., Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979.
- [15] K. Tenenblat, «On isometric immersions of Riemannian manifolds», *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, vol. 2, núm. 2, 1971, 23–36.
- [16] H. Whitney, «Differentiable manifolds», *Ann. of Math. (2)*, vol. 37, núm. 3, 1936, 645–680.