SOBRE EL EQUILIBRIO DE LA ESFERA

Luis Montejano P.*

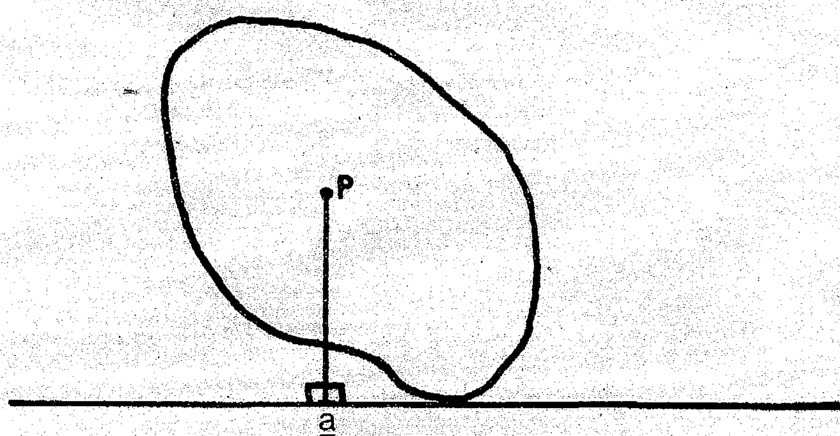
Introducción

Un Sólido S de densidad uniforme $p \neq 1$ tiene la propiedad de que puede flotar en equilibrio (sin voltearse) en agua, en toda dirección. ¿Debe ser £ una esfera? En una versión bidimensional de este problema, H. Averbach [1] encontró formas distintas al círculo con la propiedad deseada.

Ulam, en su libro *A Collection of Mathematical Problems* [2] establece el siguiente problema, que no es sino un caso particular del anterior en el límite cuando $\rho \to 0$.

Si un cuerpo descansa en equilibrio en toda posición en un plano horizontal, ¿ deberá ser éste una esfera?

Suponiendo que el cuerpo es un conjunto cerrado, acotado y conexo, existen cuerpos distintos a la esfera con la propiedad deseada; por ejemplo, una esfera a la que se le ha quitado una esfera concéntrica de menor radio, Fig. 1.



En este trabajo se demostrará que si este cuerpo es un conjunto cerrado, acotado y conexo, su cáscara es una esfera.

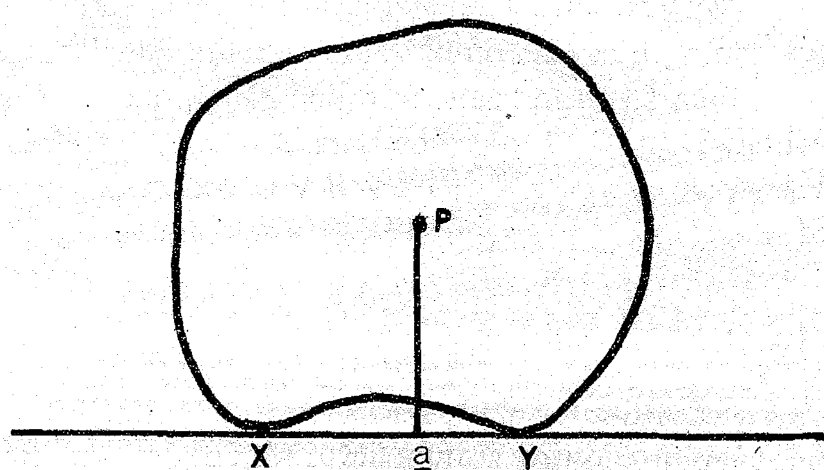
* Alumno de la Fac. de Ciencias, UNAM.

Por razones de claridad el trabajo se hará en 2 dimensiones debido al hecho de que la generalización a 3 dimensiones es inmediata. Sin embargo, al final, ciertos aspectos serán aclarados.

En adelante, entenderemos como cuerpo un subconjunto cerrado acotado y conexo de R^2 que contiene al menos 2 puntos. P denotará el centro de Masa; C (x) El casco convexo de x QR el segmento de línea cerrado con extremos Q y R y ∂A la frontera de A. $L_1 \perp L_2$ significa que L_1 es perpendicular a L_2. El símbolo LS será usado para denotar líneas de soporte.

Definición 1. (Criterio de Equilibrio)

Un Cuerpo S descansa en equilibrio sobre una Línea Soporte (Línea que toca al conjunto en puntos frontera y deja al conjunto de un solo lado) si y sólo si existen puntos x y y en $S \cap L\,S$ tal que $a \in X$ Y. donde a es el punto de L S tal que: a) $a\,P \perp L\,S$ si $P \in L\,S$ y b) $a = P$ si $P \in L\,S$ Fig. 2.



Un cuerpo S descansa en equilibrio en toda posición, cuando descansa en equilibrio sobre cada una de sus líneas soporte.

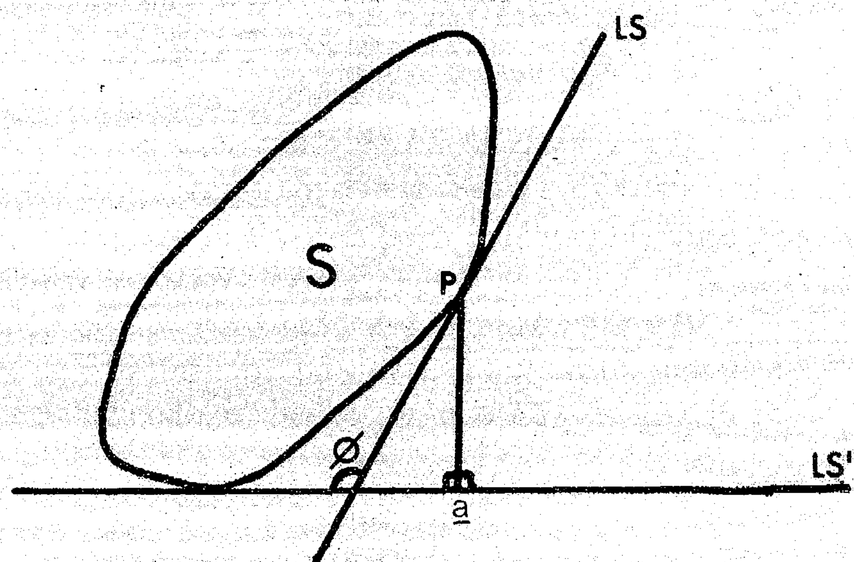
Ahora nuestro propósito es probar el siguiente teorema.

Teorema 1. La cáscara de un cuerpo bidimensional que descansa en equilibrio en toda posición, es un círculo.

Lema 1

Sea S un cuerpo que descansa en equilibrio en toda posición, entonces $P \notin L\,S$ para cualquier línea soporte LS

Prueba Es claro que S no está contenido en una línea. Supongamos que $P \in L\ S$ para alguna línea soporte LS. Dibújese una línea soporte LS' de tal manera que el ángulo ϕ entre LS y LS' que cubre S es mayor que $\pi/2$ y $P \notin LS'$. LS' existe, pues, de otra manera, si toda línea soporte tal que el ángulo entre LS y LS' que cubre S es mayor a $\pi/2$, pasa por P, entonces S debe estar contenido en la perpendicular a LS que pasa por P. Entonces, el criterio de equilibrio falla para LS' Fig. 3.



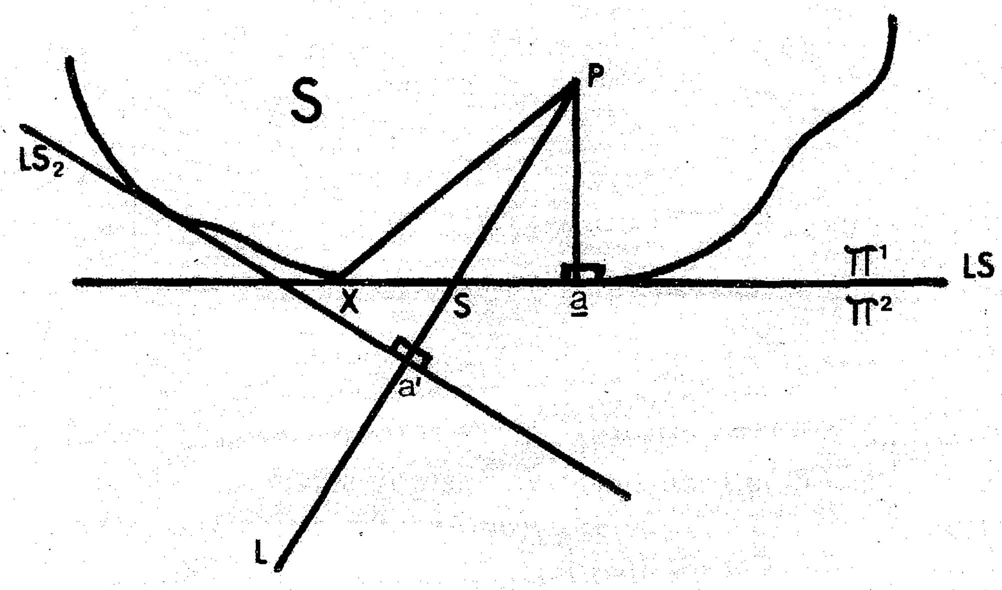
Teorema 2

Sea S un cuerpo que descansa en equilibrio en toda posición.

Entonces para toda línea soporte LS, $L\ S \cap S$ consiste de un punto único a tal que $\overline{a\,P} \perp LS$.

Prueba Sea a el punto de LS tal que $\overline{a\,P} \perp LS$. (Fig. 4). Suponga mos que existe $x \in L\ S \cap S,\ x \neq a$. Sea $s \in \overline{xa}, s \neq x,\ s \neq a$. Dibújese el rayo L que empieza en P y pasa por s y dibújese la línea de soporte LS_2 perpendicular a L (LS_2 existe pues S es acotado). Sea a' el punto de intersección de LS' y LS. $LS_2 \neq L\ S$ pues $s \neq a$ y $Pa \neq Ps$. Entonces a' $\neq S$ pues de otra manera, LS_2 dejaría a x en un semiplano y a P en el otro, contradiciendo el hecho de que LS_2 es una línea de soporte.

Debido a la misma razón $a' \notin Ps$. Sean π^1 y π^2 los semiplanos cerrados en los que LS divide al plano. Supongamos que $S \subset \pi^1$. $L \cap \pi^1 = PS$ pues $P \notin LS$. Como $a' \notin Ps$ entonces $a' \in \pi^2$. Por lo tanto, a' pertenece al rayo de LS_2 contenido en π^2, contradiciendo el criterio de equilibrio para LS_2. Esto completa la prueba del teorema 2. (Fig. 4).



Teorema 3

Sea S un cuerpo que descansa en equilibrio en toda posición. Sea C (S) *su casco convexo (El conjunto convexo más pequeño que contiene a S). Entonces*

i) $\partial C(S) \subset S$

ii) *Para toda línea soporte LS de C (S)*

$LS \cap C(S) = a$

donde $aP \perp LS$.

Prueba Tomemos $y \in \partial C(S)$. Como S es cerrado y acotado, $C(S)$ es también cerrado y acotado, entonces $y \in C(S)$. El teorema de Caratheodory ([3] pp. 35) afirma que si A es un conjunto convexo bidimensional y $a \in C(A)$ existen puntos b, c tales que $a \in b\, c$. Entonces existen puntos x_1 y x_2 en S tales que $y \in X_1 X_2$ como $y \in \partial C(S)$, existe una línea de soporte L de $C(S)$ que pasa por y. ([4] pp. 12), entonces, ó $x_1 = y = x_2$, ó x_1 y x_2 están en L · ambas cosas implican que $y \in S$, la segunda por el Teorema 2. Esto prueba i).

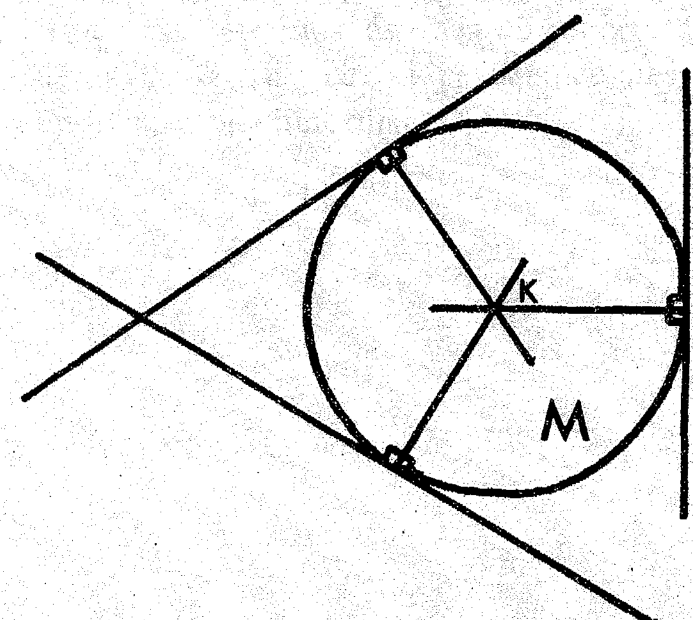
Más aún, por i) toda línea soporte LS' de $C(S)$ es línea soporte de S y tengo que $LS1' \cap C(S) = \{a\}$ donde a es el punto de LS' tal que $aP \perp LS1'$. Esto completa la prueba.

Hemos demostrado que $S \subset C(S)$, $\partial C(S) \subset S$ y que $C(S)$ tiene la propiedad probada para S en el teorema 2. Demostraremos ahora que un conjunto convexo con esta propiedad es un círculo, probando así que la cáscara de S es una circunferencia, y por lo tanto, demostrando el teorema 1.

Teorema 4

Sea M un conjunto convexo bidimensional con la siguiente propiedad:

P) Existe un punto k tal que, para toda línea soporte LS de M, la perpendicular a LS que pasa por k intersecta a LS en un punto, que es el único punto de intersección entre M y LS.(Fig. 5) Entonces M tiene ancho constante y sus binormales pasan por k.



Una cuerda de un cuerpo convexo A, tal que la perpendicular a uno de sus extremos, es línea de soporte de A se le llama normal. Una cuerda de A tal que las perpendiculares en sus extremos son líneas soportes, es una binormal.

Prueba del Teorema 4

Es claro que toda normal y por lo tanto, binormal de M pasa por k. Sea Q una normal de M, entonces, $k \in Q$. Sea LS' la línea de soporte de M que es perpendicular a Q y pasa por uno de sus extremos haciendo que Q sea normal. Sea LS la otra línea de soporte de M perpendicular a Q. $LS \cap M = \{a\}$ donde $a\ k \perp LS0$ entonces $a \in Q$ y por lo tanto, Q es una binormal.

Si M es un conjunto convexo tal que toda normal es binormal, entonces M tiene ancho constante.(Para una prueba de este hecho ver [5] y [6]). Esto completa la prueba.

Nótese que los cuerpos que descansan en equilibrio en toda posi ción, y sus cascos convexos cumplen con la propiedad P) donde k es el centro de masa.

Teorema 5

Sea M un cuerpo convexo de ancho constante, en donde todas sus binormales pasan por k. entonces M es un círculo.

Primero algunas proposiciones:

Proposición 1: El circuncírculo y el uncírculo de un cuerpo de ancho constante, son concéntricos.

El Circuncentro es el círculo de menor rodeo que contiene a M. El Incírculo es el círculo de mayor rodeo contenido en M. Para una prueba de Prop. 1, ver [4] pp. 75.

Proposición 2: El Circuncírculo de un cuerpo convexo A, es único.

Prueba Supongamos que existen 2 círculos del mismo rodeo que contienen a A. A debe de estar contenido en la intersección de estos círculos que a su vez está contenida en un círculo de menor rodeo.

Proposición 3: El Incírculo de un cuerpo de ancho constante, es único.

Prueba. Se sigue de proposiciones 1 y 2.

Prueba de Teorema 5

Primero demostraré que la frontera de M está contenida en la frontera del incírculo. Es fácil ver que k es el centro del Incírculo y el circuncirculo de M. Sea $x \in \partial M$. Sea C un círculo de rodeo menor al del uncírculo, que es concéntrico al incírculo. Translada C, con su centro sobre kx hasta que C toque a ∂M por primera vez. Sea C' circunferencia que denota la posición final de C y k', su centro. Claramente $k \neq k'$. Se demostrará que $\partial M \cap C' = x$. Supongamos que $y \in \partial M \cap C'$ y $y \neq x$. Entonces existe una línea de soporte LS de M que pasa por y y que por lo tanto, es tangente a C'. Por hipótesis $ky \perp LS$ pero también $k' y \perp LS$. Esto implica que $k = k'$ pero esto es una contradicción. Esto prueba que $\partial M \cap C' = x$. La Banda barrida por C desde que se mueve de su posición original hasta C' está contenida en M pues M es convexo. Sea C'' *el Incírculo transladado que pasa por* x y cuyo centro se encuentre en kx. C'' estará contenido en M, porque, de otra manera, existe un círculo de rodeo menor a C'' concéntrico a él, que no está contenido en M. Por proposición 3, C'' *es el incírculo, y por* lo tanto, x pertenece al incírculo. Probamos así que $\partial M \subset \partial$(Ir círculo).

Como el circuncírculo y el incírculo son concéntricos y el circuncírculo posee puntos de la frontera de M se sigue que el incírculo y el circuncírculo coinciden y que por lo tanto, M es un círculo. Esto completa la prueba del teorema 1.

La mayor parte de la generalización a 3 dimensiones es inmediata, sin embargo, aclararé estos detalles.

Definición 2: (Criterio de Equilibrio).

Sea S un cuerpo tridimensional y PS un plano soporte de S. Sea a el punto de PS tal que $a P \perp PS$ si $p \notin PS$ y $P = a$ si $P \in PS$.

Diremos que S descansa en equilibrio en el plano soporte PS si y sólo si para toda línea L contenida en PS que pasa por a, existen puntos que pertenecen a $PS \cap S$ en ambos semiplanos de PS determinados por L.

Es fácil ver que la prueba del teorema 2 para dimensión tres con este criterio de equilibrio, es equivalente a la ya dada.

Sea M un cuerpo convexo y supongamos que toda normal es una binormal, entonces M tiene ancho constante.

La Prueba de esta proposición, está dada en [5] y [6] para dimensión dos. Lo probaré aquí para dimensión tres.

Denotaremos por $\phi(M)$ a la proyección de M paralela a una dirección dada ϕ, en un plano que es perpendicular a ϕ. $\phi(M)$ es un cuerpo convexo bidimensional, donde toda normal es binormal y posee, por lo tanto, ancho constante. Dadas 2 direcciones ϕ_1 y ϕ_2, $\phi_1(M)$ y $\phi_2(M)$ serán cuerpos del mismo ancho constante. Para ver esto pensemos en los dos planos de soporte paralelos a ϕ_1 y ϕ_2. La intersección de estos planos con los planos que contienen a $\phi_1(M)$ y $\phi_2(M)$ son líneas soporte de $\phi_1(M)$ y $\phi_2(M)$ respectivamente. Por lo tanto, M es un cuerpo convexo de perímetro constante. De esto se sigue que M es un cuerpo de ancho constante. (Este hecho es mencionado en [4] pp. 82. y probado en [8].).

[1] AVERBACH H. *Sur un probleme de M. Ulam concernant L'equilibre des Corps Flottants* Studia Math. 7 (1938), pp. 121-142.

[2] S. M. ULAM *A Colection of Mathematical Problems.* Interscience Publishers. (1960), pp. 38.

[3] H. G. EGGLESTON, *Convexity* (Cambridge University Press), (1958).

[4] YAGLOM AND BOLTYANSKII (1951) *Holt Rinehart Wiston* (1961), pp. 12.

[5] L. W. DANZER *A characterization of the Circle* [7] pp. 99-100.

[6] BESICOVITCH, *A problem on a Circle* Journal London Math Soc. 36 (1961), pp. 241-244.

[7] V. KLEE. (Editor) *Convexity Proceedings of the Seventy Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society* (American Math. Society Providence RI (1963).

[8] T. BONNESEN AND W. FENCHEL: *Theorie der Konvexen Körpen Ergebnisse der Mathematik and ihrev* Grenzgebiete 3 Berlin, (1934).