Miscelánea Matemática **48** (2009) 103–117 SMM

Del Análisis Armónico al Funcional
Un Viaje Redondo

Josefina Alvarez

Departamento de Matemáticas
New Mexico State University
Las Cruces, New Mexico 88003, USA
jalvarez@nmsu.edu

Resumen

Este es un breve relato de algunos de los hitos en la formación de lo que hoy se llama el análisis armónico y de su relación con el análisis funcional. Desde luego, hay muchas maneras de contar esta historia. La versión que aquí se presenta, está influenciada por el campo de conocimiento de la autora y omite por necesidad acontecimientos y personajes importantes. Otras posibles orientaciones y conexiones son mencionadas, con referencias bibliográficas.

1. Los comienzos del análisis armónico

El análisis armónico tiene sus orígenes en la escuela científica y religiosa de los pitagóricos, que floreció en la ciudad de Crotona, en el sur de Italia, hacia el siglo VI a. de C. Aunque la figura de Pitágoras es a menudo presentada como una leyenda y poco sabemos de firme sobre su vida, su existencia es generalmente aceptada. En la figura 1 se puede ver una moneda griega en la que aparece el nombre de Pitágoras grabado alrededor del borde.

Figura 1

Los pitagóricos creían que todo se podía explicar por medio de los números, que consideraban la gran herramienta para darle sentido al cosmos. Sus creencias se afirmaron en las observaciones de fenómenos naturales y en la evidencia que encontraron en ellas. Por ejemplo, los pitagóricos manifestaron un gran interés en explicar la naturaleza de la música. Uno de los principios atribuídos a ellos explica, en términos de números, cuándo un sonido es armonioso o agradable de oír: Una cuerda pulsada produce sonidos armoniosos cuando el radio de las longitudes l y L que se ven en la figura 2, es un número entero.

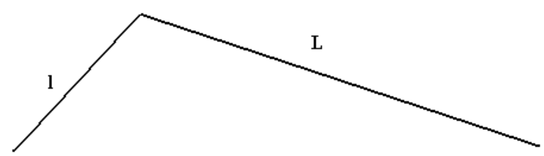


Figura 2

Así, es con la música como comienza la larga y fructífera historia del análisis armónico.

Hay otros rasgos sociales y religiosos que hacen de los pitagóricos un grupo interesante. Las mujeres eran aceptadas como miembros de la sociedad, con iguales derechos a los hombres. Eran vegetarianos y no usaban vestimentas de lana. Parece que todos sus descubrimientos científicos los atribuían a Pitágoras, lo cual naturalmente crea confusión cuando se quiere trazar la historia de este grupo. No ayuda en este sentido la admiración idólatrica hacia Pitagóras de sus primeros biógrafos griegos.

La afición de los pitagóricos a los números, los llevó también a descubrir interesantes relaciones. Por ejemplo, ellos observaron que la suma de los n primeros números impares es igual a n^2:

$$\begin{aligned} 1+3 &= 2^2 \\ 1+3+5 &= 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 4^2, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Paradójicamente, los pitagóricos no usaron manipulaciones algebraicas para probar sus fórmulas, sino que usaron a la geometría, valiéndose de piedrecitas para formar las configuraciones apropiadas.

En Wikipedia, la Enciclopedia Libre, se puede leer un buen artículo sobre los pitagóricos.

2. La contribución de Fourier

Dormida por muchos siglos, la inquietud pitagórica en cuantificar el sonido reaparece en los prolegómenos de la historia moderna del análisis armónico. El matemático inglés Brook Taylor (1685-1731) cita en su obra de 1715, *Método de los Incrementos,* el problema de describir el movimiento de una cuerda tensa y de establecer el tiempo de vibración sabiendo la longitud y el peso de la cuerda, y la fuerza que la tensa.

Brook Taylor

Los fundamentos matemáticos en los que se basa la solución de este problema, serían dados casi cien años más tarde por el matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) en su obra fundamental *Teoría Analítica del Calor*, publicada en 1822. En esta obra, Fourier parece volver a los postulados pitagóricos, cuando muestra que incluso el fuego está gobernado por los números. Hay buenos motivos que explican por qué Fourier habla principalmente de la propagación del calor. En efecto, ya hacia el final del siglo XVIII, estaba claro que el calor podía considerarse como una forma de energía útil en la producción industrial. Una prueba de ello es el uso de la máquina a vapor, especialmente en Inglaterra y en Francia. Por ese motivo, el problema de la difusión del calor se vió como un problema fundamental, tanto desde el punto de vista práctico, considerado especialmente en Inglaterra, como desde el punto de vista teórico, que fue el aspecto predominante entre los científicos franceses. El libro de Umberto Bottazzini [3], analiza estos aspectos en detalle.

Joseph Fourier

En la obra de Fourier aparecen las fórmulas, hoy bien conocidas,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\ x + b_1 \text{sen}\ x + ... \qquad (1) \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, cos\ nx\ dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, \text{sen}\ nx\ dx. \end{aligned}$$

Fourier no parece preocuparse por justificar ni la convergencia ni el valor del límite de la serie (1). Más aún, en el capítulo III de su *Teoría Analítica del Calor*, Fourier dice que estas fórmulas se aplican a funciones completamente arbitrarias y que las series ordenadas según los cosenos y los senos de los arcos múltiples son siempre convergentes.

Otras fórmulas aún más sospechosas aparecen luego. Por ejemplo, para $a < x < b$, Fourier escribe

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(\alpha)\, d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos p\,(x-\alpha)\, dp. \qquad (2)$$

Sería fácil para un matemático del siglo XXI el escandalizarse por esta falta de rigor, que ya suscitó dudas entre algunos contemporáneos de Fourier. Pero hay que recordar que tanto la definición de función como la de la integral estaban en pañales, como lo muestra el análisis de Bottazzini ([3], páginas 33, 48, etc.).

El extraordinario mérito de Fourier se puede medir por el hecho de que una buena parte de los avances en el análisis matemático en los siglos XIX y XX, se debe al esfuerzo de muchos matemáticos intentando justificar las fórmulas y los comentarios de Fourier. Estos avances incluyen también la teoría de distribuciones del matemático francés Laurent Schwartz (1915-2002), que permitió la justificación de fórmulas como la que aparece en (2). En el libro de Jean-Pierre Kahane y Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset [9] se hace un análisis muy interesante de la *Teoría Analítica del Calor* y también se incluye una biografía de Fourier, a quien se debe reconocer no sólo como un matemático brillante, sino también como un importante egiptólogo y un exitoso funcionario público. Sólo agregaremos que hacia el final del capítulo III, Fourier menciona que las herramientas usadas en el caso de la propagación del calor también se aplican al problema de la cuerda vibrante, reconociendo así el trabajo pionero de Daniel Bernoulli (1700-1782) ([9], página 24). Aunque nacido en Holanda, Daniel Bernoulli fue un miembro de la familia suiza de los Bernoulli.

Debemos decir que el salto que hemos dado desde los pitagóricos a Fourier es un poco desmesurado y pasa por alto muchos aspectos interesantes y varios protagonistas de lo que Kahane llama “la prehistoria del análisis armónico” ([9], página 23).

La investigación de las series hoy llamadas de Fourier, también catapultó otras áreas de investigación. De ellas, mencionaremos ahora algunos ejemplos.

El trabajo del matemático alemán de origen ruso Georg Cantor (1845-1918) en el problema de la unicidad de las series de Fourier ([9], página 68), lo llevó naturalmente a considerar conjuntos más y más extraños, que inspiraron no sólo su teoría de conjuntos, sino también la teoría de la medida y de la integral del matemático francés Henri Lebesgue (1875-1941), desarrollada precisamente para estudiar problemas de convergencia y divergencia de las series de Fourier. Más recientemente, podemos mencionar al matemático americano Paul Joseph Cohen (1934-2007), quien escribió su tesis doctoral en la Universidad de Chicago bajo la dirección del matemático polaco Anthony Zygmund (1900-1992), uno de los forjadores del análisis armónico moderno. El tema de la tesis fue la unicidad de las series de Fourier. Aunque Cohen continuó trabajando en ese tema, obteniendo importantes resultados, eventualmente se concentró en la teoría de conjuntos, probando un resultado fundamental, llamado la independencia de la hipótesis del continuo, que había sido el primer problema en la lista de Hilbert. Por este resultado, Cohen recibió la medalla Fields en 1966.

3. ¿Qué es el análisis armónico?

Hasta ahora, sólo hemos descripto al análisis armónico por medio de ejemplos, siendo el principal las series de Fourier. Esta falta de una definición más o menos formal es bastante natural, pues mientras un tema está en formación, es difícil de tener una visión panorámica.

Podemos decir ahora que el análisis armónico es el estudio basado en la descomposición en componentes sencillas, de ciertos objetos matemáticos complicados. Las series de Fourier son un ejemplo magnífico de esta metodología. Para evitar distracciones, vamos a ignorar en nuestra discusión toda alusión a problemas de convergencia.

Si consideramos una función representada por su serie de Fourier, que escribimos por simplicidad en la forma compleja,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

con coeficientes

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx,$$

la aplicación

$$f \to \{c_n\}$$

es el análisis de la función f, que dice, por medio de los coeficientes c_n, cuánto de cada componente básica e^{inx} está presente en f. En el lenguaje de la ingeniería eléctrica, la función f dependiente de una variable real es una señal analógica, a la cual le corresponde la señal digitalizada $\{c_n\}$

$$\text{Señal analógica } f \to \text{Señal digitalizada } \{c_n\}.$$

La aplicación inversa,

$$\{c_n\} \to f,$$

es la síntesis de las componentes básicas e^{inx}, usadas en las proporciones indicadas por los coeficientes c_n. Observemos que este análisis y síntesis se refieren a la frecuencia. Cada componente e^{inx} tiene una frecuencia $\frac{n}{2\pi}$.

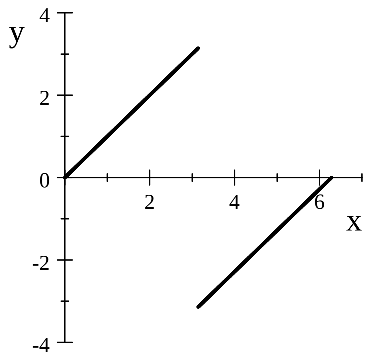
Veamos estos principios ilustrados en un ejemplo. A tal fin, consideramos la función f definida como

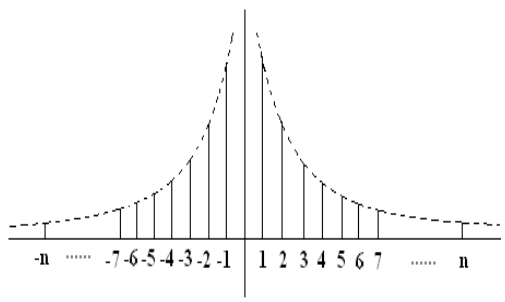
$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ (x - 2\pi) & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

y extendida por periodicidad. Su serie de Fourier resulta ser

$$\sum_{n\neq 0}\frac{i\,(-1)^n}{n}e^{inx}.$$

Entonces, la aplicación de análisis $f \to \{c_n\}$ se puede representar en este caso por medio de los gráficos





Señal analógica Señal digitalizada

En el gráfico de la derecha hemos representado el valor absoluto $|c_n|$ en función de n. Observemos que a medida que la frecuencia $\frac{n}{2\pi}$ de e^{inx} crece, la contribución $c_n = \frac{i(-1)^n}{n}$ decrece en valor absoluto y en efecto converge a zero. Es natural entonces preguntarse si las truncaciones $\sum\limits_{0<|n|\leq N}\frac{i(-1)^n}{n}e^{inx}$ podrán aproximar en algún sentido a f.

Para comenzar, la llamada igualdad de Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f\,(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2\,,$$

que podemos comprobar directamente en nuestro ejemplo, nos dice que si la energía de una de las señales, la analógica o la digitalizada, es finita, la energía de la otra lo será también,

$$\int_0^{2\pi}|f\,(x)|^2\,dx < \infty \quad \text{si y sólo si} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 < \infty$$

y ambas energías serán iguales.

Precisamente, la familia de funciones $L^2\,(0,2\pi)$ está caracterizada por la condición $\int_0^{2\pi}|f\,(x)|^2\,dx < \infty$, mientras que la condición $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2 < \infty$ caracteriza a la familia de sucesiones l^2.

El matemático alemán David Hilbert (1862-1943), había introducido el espacio l^2, el espacio de Hilbert original, en sus estudios de ecuaciones integrales que llevó a cabo entre 1904 y 1910.

En 1907, el matemático austríaco Ernst Fischer (1875-1954), probó que la serie de Fourier de una función $f \in L^2(0, 2\pi)$ converge a f en media cuadrática. Es decir

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{0<|n|\leq N} c_n e^{inx} - f(x) \right|^2 dx = 0.$$

En cuanto a la convergencia puntual de la serie hacia la función representada por ella, los contraejemplos que fueron apareciendo hacia la segunda mitad del siglo XVIII, mostraron que el optimismo de Fourier debía de tomarse con unas pinzas muy largas.

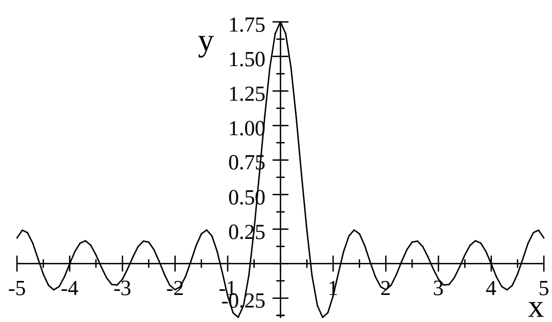
Una de las primeras herramientas de gran utilidad creadas para atacar el problema de la convergencia, fue el representar a la suma parcial de la serie por medio de una integral,

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi \operatorname{sen}\frac{t}{2}} f(x-t)\, dt.$$

La función

$$D_N(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi \operatorname{sen}\frac{t}{2}}$$

es llamada el núcleo de Dirichlet, en reconocimiento al matemático alemán Peter Gustav Leujen-Dirichlet (1805-1859). El gráfico que sigue, correspondiente a $N = 5$, nos da una idea de la forma de la función D_N.



$N = 5$

A medida que N crece, la función se concentra más y más alrededor del zero, produciendo un efecto que no está lejos del sugerido por Fourier en su fórmula (2).

El trabajo de Dirichlet sobre el problema de la convergencia es de una importancia capital tanto por su contenido como por el rigor con el que está presentado. Por ejemplo, es en este trabajo donde Dirichlet define a la función que toma un valor constante en los números racionales y otro valor constante distinto en los irracionales. Ya el hecho de presentar una función que es discontinua en todas partes es de una originalidad extrema. A pesar de su mérito enorme, el trabajo de Dirichlet adolece de algunos defectos que no pudieron ser remediados en su momento.

El largo camino recorrido por el problema de la convergencia puntual, tuvo una culminación espectacular en el resultado del matemático sueco Lenard Carleson (nacido en 1928), quien en 1966 probó que si la función f pertenece a $L^2(0, 2\pi)$, existe el

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x-t)\, \frac{\operatorname{sen}\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi \operatorname{sen}\frac{t}{2}} dt = f(x)$$

en casi todo punto, en el sentido de la medida de Lebesgue. La demostración de Carleson es considerada una de las más complicadas que se han producido en el análisis y aunque otros matemáticos han obtenido extensiones y simplificaciones, no hay duda de la tremenda profundidad del resultado.

El tema de la convergencia de una serie de Fourier sigue vivo y hay aún problemas abiertos, sobre todo cuando se consideran funciones de varias variables.

Mientras que en el trabajo de Dirichlet encontramos algunas de las técnicas del análisis armónico moderno, los resultados de Fischer y otros matemáticos nos llevan poco a poco al terreno del análisis funcional.

4. ¿Qué es el análisis funcional?

Podemos decir que el análisis funcional es el estudio de los "espacios funcionales", que son conjuntos formados por funciones y que están dotados de estructuras que permiten, por ejemplo, tomar límite y hablar de la continuidad de funciones, usualmente llamadas operadores, definidas sobre ellos. El matemático francés Paul Pierre Lévy (1886-1971) publica en 1922 sus *Lecciones de Análisis Funcional*, donde aparece por primera vez el nombre de análisis funcional.

Otro tema cuyo inicio está unido a la aparición del análisis funcional es el de la topología general [4], de la cual no hablaremos.

Mucho se ha escrito sobre la evolución del análisis funcional. Mencionaremos aquí los artículos y libros [1], [2] y [8].

En el lenguaje del análisis funcional, el operador de análisis

$$\begin{array}{ccc} f & \to & \{c_n\} \\ L^2(0,2\pi) & \to & l^2 \end{array}$$

es continuo y tiene como inversa al operador de síntesis

$$\begin{array}{ccc} \{c_n\} & \to & f \\ l^2 & \to & L^2(0,2\pi) \end{array}$$

que también es continuo. La igualdad de Parseval nos dice que en efecto estos operadores son isometrías suprayectivas.

La sucesión $\{c_n\}$ da las coordenadas del punto f en términos de la base ortonormal $\left\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ del espacio de Hilbert $L^2(0,2\pi)$. El espacio l^2 funciona como un "espacio euclideano de dimensión infinita" cuya base canónica consiste de los vectores $(1,0,...),(0,1,0,...)$, etc. Desde este punto de vista, se puede decir que el análisis funcional es, a grandes rasgos, el álgebra lineal de dimensión infinita. El artículo de Jean-Luc Dorier [6], especialmente la sección que comienza en la página 252, es una buena referencia para ver esta relación en detalle.

Observemos que la igualdad de Parseval caracteriza a las funciones en el espacio $L^2(0,2\pi)$ en términos de sus coeficientes de Fourier. Esta es una situación muy especial, que no es cierta cuando la condición $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty$ es reemplazada, por ejemplo, por la condición $\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx < \infty$ para algún valor $p \geq 1$ y $p \neq 2$. De la misma manera, no es posible predecir otras propiedades de una función, tales como la regularidad, basándose solamente en el tamaño de sus coeficientes de Fourier. Este es uno de los inconvenientes de la base $\left\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ y una de las razones de buscar otras bases.

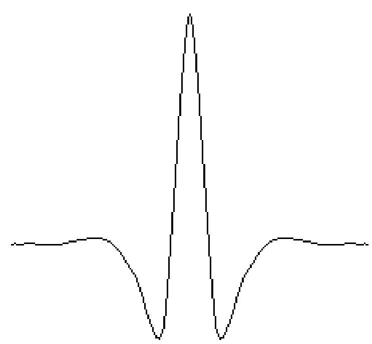
5. Las bases de ondículas (wavelets)

En la década del ochenta, en campos tan diversos como el estudio de señales acústicas, la prospección petrolífera y la física teórica, surgieron independientemente técnicas que permitían analizar señales de muy diferentes tipos con gran eficiencia. Lo curioso de estas técnicas, es que muchas de ellas usaban, sin saberlo, fórmulas y resultados desarrollados en el análisis armónico "puro" desde los años treinta.

Más aún, la idea de construir bases ortonormales más eficientes que las proporcionadas por las técnicas de Fourier, preceden aún a estos resultados. Por ejemplo, la base de Haar ([9], página 288), data del año

1909. Con ella, el análisis de frecuencia que hemos mencionado antes, se convierte en el análisis a diferentes escalas. En efecto, la base de Haar consiste de translaciones y dilataciones de una función especial. Pero esta función especial no es continua, por lo cual carece de sentido el analizar propiedades de regularidad con esta base. Sin embargo, las sumas parciales de una función continua convergen uniformemente hacia la función, cosa que no ocurre con su serie de Fourier. Sea como sea, el trabajo del matemático húngaro Alfréd Haar (1885-1933), abrió el camino a lo que hoy se llaman ondículas o wavelets.

En términos muy simplificados, una base de ondículas consiste de traslaciones y dilataciones de una función particular que cumple propiedades de regularidad, cancelación y decrecimiento al infinito. Por ejemplo, la función



Función Ψ

da origen a la base ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$

$$\Psi_{jk}(x) = 2^{-j/2}\Psi\left(2^{-j}x - k\right)$$

para $j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

Lo estupendo de estas ondículas es que $\{\Psi_{jk}\}$ es también una base, en un sentido más general, de muchos otros espacios funcionales. Por ejemplo, el espacio $L^p(\mathbb{R})$, los espacios de funciones con derivadas en $L^p(\mathbb{R})$, etc. La versatilidad de esta base se debe en parte a las excelentes propiedades de la función Ψ.

Reescribiendo en esta nueva notación lo que hemos hecho con las series de Fourier, si

$$f(x) = \sum_{j,k} c_{jk}\Psi_{jk}(x),$$

el análisis es la aplicación

$$f \to \{c_{jk}\}.$$

De la señal analógica f obtenemos la señal digitalizada $\{c_{jk}\}$.

Recíprocamente, la síntesis es la aplicación

$$\{c_{jk}\} \to f.$$

Lo que es nuevo aquí, es que la señal analógica f se puede caracterizar en muchos casos por medio de condiciones en la señal digitalizada $\{c_{jk}\}$.

Por ejemplo, sin entrar en los detalles, la función f tiene derivadas de orden $\leq s$ en $L^2(\mathbb{R})$ si y sólo si

$$\sum_{j,k} |c_{jk}|^2 \left(1 + 2^{-2js}\right) < \infty.$$

Además, $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, si y sólo si

$$\left[\sum_{j,k} |c_{jk}|^2 |\Psi_{jk}(x)|^2\right]^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}).$$

El excelente libro [5] de la matemática y física belga Ingrid Daubechies (nacida en 1954) tiene una explicación detallada de éstas y muchas otras propiedades de caracterización de espacios funcionales, como parte de un tratamiento riguroso y extremadamente claro de las ondículas.

Ingrid Daubechies, entre los muchos honores que ha recibido, es la primera mujer que ocupa un cargo de profesora en el departamento de matemáticas de la Universidad de Princeton. Daubechies es una de las investigadoras más prominentes en el campo de las ondículas.

Ingrid Daubechies

El libro de Kahane y Lemarié-Rieusset [9], contiene un capítulo muy interesante dedicado a la evolución histórica de las ondículas.

Es difícil de encontrar hoy un campo aplicado donde no se vea la influencia de estas ideas. Ellas aparecen en el reconocimiento y almacenamiento de imágenes, en el análisis estadístico, en medicina, en estudios del clima y de los mercados financieros, etc. El economista americano James Ramsey dice que "usando las ondículas como 'lentes', se pueden explorar relaciones y fenómenos que no se habían notado anteriomente."[10].

Precisamente, una de las razones del éxito espectacular de las ondículas y otras formas de representación de funciones, es que se puede calibrar la escala usada, más o menos fina, para poner de manifiesto características especiales de la función a representar.

Recomendamos a los lectores interesados en seguir estos desarrollos, el sitio de Internet *Wavelet Digest*, que se encuentra en la dirección

http://www.wavelet.org/.

La teoría de las ondículas, un tema que podríamos colocar inicialmente dentro del análisis funcional, ha revolucionado al análisis armónico, no sólo inspirando nuevas demostraciones de resultados conocidos, sino abriendo nuevos campos de investigación.

Esta es una de las maneras en que se cierra el ciclo de ida y vuelta entre el análisis armónico y el funcional. Ambos son campos de investigación muy activos sobre los que queda mucho por decir.

6. Epílogo

No podemos terminar nuestra presentación sin referirnos a uno de los triunfos mayores del análisis funcional, que es el desarrollo de la maquinaria matemática que sirvió como base de la formulación rigurosa de la mecánica cuántica en los años 1920 a 1930.

Esta maquinaria es la teoría abstracta de los espacios de Hilbert, formulada por el matemático americano de origen húngaro John von Neumann (1903-1957).

John von Neumann

La teoría de von Neumann usa como modelo a los espacios l^2 y L^2.

En este caso, una necesidad de la física ha inspirado un desarrollo de las matemáticas "puras".

En otros casos, temas aparentemente abstractos, pueden encontrar inesperadas aplicaciones muchos años después de su creación, como es el caso de algunas de las formulaciones del análisis armónico de los años treinta, reencarnados en la teoría de las ondículas.

Referencias

[1] Birkhoff, G., Kreyszig, E., *The Establishment of Functional Analysis*, Historia Mathematica 11 (1984) 258-321.

[2] Bombal, F., *Los Orígenes del Análisis Funcional*, Historia de la Matemática en el Siglo XIX, Real Academia de Ciencias de Madrid (1994) 35-56.

[3] Bottazzini, U., *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Springer 1986.

[4] Bourbaki, N., *Elements of the History of Mathematics*, Springer 1999.

[5] Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM 1992.

[6] Dorier, J.-L., A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory, *Historia mathematica* 22 (1995) 227-261.

[7] Guzmán, M. de, *Impactos del Análisis Armónico*. Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 23 de marzo de 1983.

[8] Jahnke, H. N. (Editor), *A History of Analysis*, American Mathematical Society and London Mathematical Society 2003.

[9] Kahane, J.-P., Lemarié-Rieusset, P.-G., *Fourier Series and Wavelets*, Gordon and Breach 1995.

[10] Ramsey, J. B., *Wavelets in Economics and Finance. Past and Future* (2002). http://ideas.repec.org/p/cvs/starer/02-02.html

Reconocimientos La imagen de la moneda griega está tomada de Wikipedia, La Enciclopedia Libre. Las imágenes de matemáticos pertenecen a la colección de *The MacTutor History of Mathematics archive*

(http://www.gap-system.org/~history/).

Este artículo es una adaptación de la charla dada en el Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico Autónomo de México el 18 de mayo de 2007. Mucho agradezco la cálida bienvenida de los colegas y estudiantes del departamento, encabezados por su jefa, la Dra. Beatriz Rumbos Pellicer. En especial, vaya también mi gratitud a la Dra. Claudia Gómez Wulschner y al Dr. Carlos Bosch Giral.

Grande ha sido la inspiración que me ha dado el discurso [7] del matemático español Miguel de Guzmán (1936-2004), mi hermano en las matemáticas, a quien mucho admiro.