Miscelánea Matemática **45** (2007) 87–96 SMM

Euler y la geometría de la posición

Max Neumann Coto
Instituto de Matemáticas, UNAM
Unidad Cuernavaca
Av. Universidad s/n
Apartado Postal 273-1
62210 Cuernavaca, Mor.
México
max@matem.unam.mx

1. Euler y las gráficas

> *Me pusieron un problema sobre una isla en la ciudad de Konigsberg, que se encuentra rodeada por un río al que cruzan 7 puentes: me preguntaron si alguien podría dar un paseo que cruzara por todos los puentes pasando por cada uno solo una vez. Fui informado que hasta ahora nadie había mostrado que esto fuera posible, ni demostrado que no lo fuera. La pregunta es banal, pero me pareció digna de atención porque ni la geometría, ni el álgebra, ni aún el arte de contar fueron suficientes para resolverla. En vista de esto, se me ocurrió preguntarme si pertenecería a la geometría de la posición tan buscada alguna vez por Leibnitz. Así que después de alguna deliberación, obtuve una regla, simple pero firme, con cuya ayuda uno puede decidir inmediatamente para todos los ejemplos de este tipo, con cualquier número de puentes arreglados de cualquier modo, si tal paseo es posible o no... (Leonard Euler, 1736)*

De acuerdo a Euler, Leibnitz había sido el primero en notar que además de la geometría que se ocupa de las medidas y su cálculo, debía haber otra que se ocupara de la posición y de sus propiedades que son independientes de las medidas. La llamó *geometriam situs.*

Euler presentó la solución al problema de los puentes de Konigsberg a la Academia de San Petersburgo, y la publicó bajo el título *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentes* en 1741. Ahí menciona que el problema podría resolverse enumerando todos los recorridos posibles y viendo si alguno satisfacía las condiciones, pero por el número de combinaciones posibles, esto sería difícil y tedioso, y no podría aplicarse a casos con muchos puentes. En lugar de eso, Euler dio el siguiente argumento:

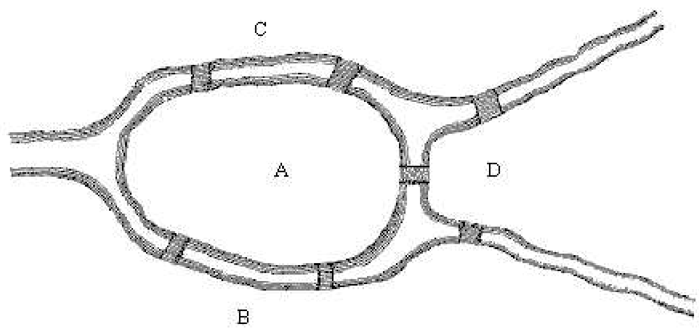


Figura 1: Los Puentes de Konigsberg

Designó a cada una de las regiones separadas por el río con una letra: A, B, C y D (ver la figura 1). A un camino que va de A a B pasando por un puente lo designó por AB (sin importar cual de los puentes de A a B se use). A un camino que va de A a B pasando por D como ADB. Así todos los caminos pueden designarse con palabras de acuerdo al orden en que se visitan las 4 regiones. Un camino que recorra los 7 puentes quedara designado por una palabra de 8 letras. Cada vez que una letra, digamos A, aparece en el interior de una palabra, es porque el camino cruzó un puente para entrar y otro puente para salir de A, y si la letra aparece al principio o al final de la palabra, es porque cruzó un puente para salir o para entrar a A. Así que como hay 5 puentes que llegan a A, la letra A debe aparecer al menos 3 veces en la palabra. Y como a B, a C y a D llegan 3 puentes, las letras B, C y D deben aparecer cada una al menos 2 veces. Y esto es imposible en una palabra de 8 letras.

Para el caso general (cualquier configuración de regiones y puentes) Euler observó que si a una región A llegan p_A puentes, entonces para recorrerlos todos se debe pasar por A al menos $p_A/2$ veces si p_A es par (una vez más si uno empieza o termina en A) y al menos $(p_A + 1)/2$

veces si p_A es impar. Así que la palabra que representa al paseo tiene $\frac{p_A}{2} + \frac{p_B}{2} + \frac{p_C}{2} + \ldots$ letras o más, pero $\frac{p_A+p_B+p_C+\ldots}{2}$ es el total de puentes (ya que cada puente une a dos regiones) y la palabra tiene una letra más que el total de puentes. La igualdad sólo es posible si todos los p_i's son pares (y el camino termina donde empezó) o dos p_i's son impares (y el camino empieza y termina en estas regiones).

Es claro que en el razonamiento de Euler los tamaños y formas de las regiones conectadas por los puentes (y hasta el hecho de que sean regiones y puentes) es irrelevante, lo único importante es como están conectadas. El resultado de Euler marcó el comienzo de la teoría de las gráficas, una rama muy activa de las matemáticas con aplicaciones en la geometría, el álgebra y la computación.

Una *gráfica* consta de un conjunto de objetos llamados *vértices* y un conjunto de parejas de vértices llamados *aristas*. Los vértices pueden representar regiones, personas, conjuntos o cualquier cosa, y las aristas pueden representar puentes, o el hecho de que dos personas se conocen, o que los conjuntos se intersectan, o que 2 cosas están relacionadas de alguna forma (el conjunto de aristas puede ser vacío). La figura 2 muestra la gráfica de los puentes de Konigsberg, la gráfica del octaedro y su gráfica dual, cuyos vértices representan las caras del octaedro y sus aristas unen caras adyacentes.

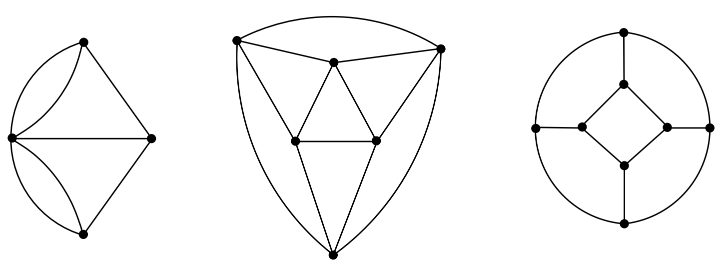


Figura 2: Gráficas

El número de aristas de una gráfica que llegan a un vértice es la *valencia* del vértice. Como cada arista conecta a dos vértices, el número de vértices de valencia impar es par. Un camino que recorre todas las aristas de una gráfica sin repetirlas es un *paseo euleriano*; y si termina donde empezó es un *paseo euleriano cerrado*. En estos términos la afirmación de Euler sería que una gráfica (conexa) admite un paseo euleriano cerrado si y sólo si la valencia de cada vértice es par, y admite un paseo euleriano abierto si y sólo si hay dos vértices de valencia impar. El argumento de Euler muestra que las condiciones son necesarias, pero fue hasta 1871 que Hierholzer demostró que son realmente suficientes.

Diez años más tarde, Fleury dio un algoritmo para hallar paseos eulerianos: *Viajar por la gráfica eligiendo en cada paso una arista, borrándola después de recorrerla, con la única condición de usar siempre que sea posible una arista que no desconecte a la gráfica resultante.*

El algoritmo es simple y da todos los paseos eulerianos posibles. Es un ejercicio interesante demostrar que si se cumplen las condiciones de Euler y se empieza en un vértice de valencia impar en caso de haberlo, el algoritmo siempre termina por borrar todas las aristas.

El problema de los paseos eulerianos está relacionado con el problema del cartero chino: *Si un cartero tiene que recorrer todas las calles de una ciudad para entregar el correo ¿cuál es la trayectoria más corta que puede seguir?*

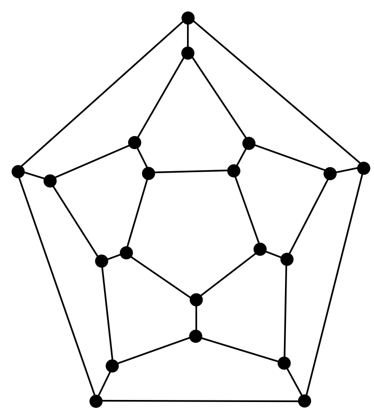


Figura 3: Juego del dodecaedro

El concepto dual de paseo Euleriano (al intercambiar los papeles de aristas y vértices) es el de *trayectoria hamiltoniana*: es una que pasa por cada vértice exactamente una vez (si la trayectoria es cerrada se le llama *ciclo hamiltoniano*). Fueron llamados así en honor de Hamilton, el inventor de los cuaternios, quien en sus intentos por definir un álgebra en 3 dimensiones llegó el *cálculo icosiano* basado en las simetrías del dodecaedro. Para ilustrar su uso ideó un juego que se trataba de hallar un camino cerrado por las aristas del dodecaedro que pase por cada vértice exactamente una vez (ver figura 3).

Ya en el siglo IX los ajedrecistas árabes se divertían con otro problema de trayectorias hamiltonianas. Se trataba de colocar un caballo en un tablero de ajedrez y recorrer con el todas las casillas, pasando por cada una exactamente una vez. Si uno logra terminar en una casilla que esté a un salto de caballo de la casilla inicial, entonces el ciclo puede cerrarse y uno puede hacer el recorrido empezando en *cualquier* casilla (si el lector quiere saber que tan difícil es, que lo intente). En 1759 Euler escribió el primer artículo en el que se da un tratamiento matemático a este problema: *Solution dúne question curieuse qui ne paroît soumise à aucune analyse* en el que daba formas de modificar las soluciones parciales al problema para poder completarlas y hallar soluciones nuevas. La figura 4 muestra una de sus soluciones no cerradas. Euler estudió el problema para tableros con distintos números de casillas y mostró que no existen soluciones cerradas cuando el número de casillas es impar. Su argumento iba así: un caballo siempre salta a una casilla de distinto color (de una blanca a una negra y viceversa). Si el tablero tiene un número impar de casillas, la última casilla visitada es del mismo color que la primera, así que no puede estar a un salto de distancia.

42	59	44	9	40	21	46	7
61	10	41	58	45	8	39	20
12	45	60	55	22	57	6	47
53	62	11	30	25	28	19	38
32	13	54	27	56	23	48	5
63	52	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	64	15	34	3	50	17	36

Figura 4: Un paseo a caballo

El problema de decidir si una gráfica arbitraria admite un ciclo hamiltoniano es muy difícil. En 1952 Dirac mostró que si la valencia de cada vértice es al menos la mitad del número de vértices (y hay al menos 3 vértices) entonces tal ciclo existe, y unos años más tarde Ore probo que basta con que la suma de las valencias de cada par de vértices no adyacentes sea al menos el número de vértices. Pero hasta hoy no se conocen condiciones que sean necesarias y suficientes. La existencia de ciclos hamiltonianos está relacionada con el famoso problema del agente viajero: *Dada una gráfica en la que cada arista tiene asignada una longitud, hallar el camino cerrado más corto que pase por todos los vértices al menos una vez.* Para una gráfica con aristas de longitud 1, los ciclos hamiltonianos -en caso de existir- serían todas las soluciones.

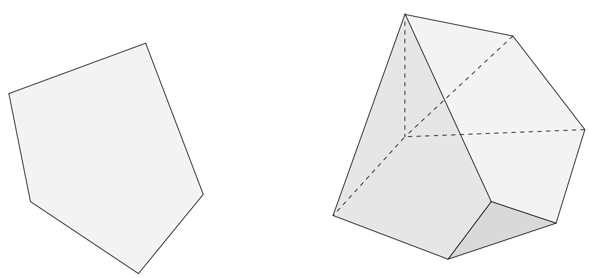
2. Euler y la topología

En 1750 Euler dió otro salto para hallar una geometría libre de medidas. En una carta a Golbach le dice que los poliedros deberían tener propiedades análogas a las que tienen los polígonos, para los cuales el número de lados es igual al número de ángulos y la suma de los ángulos es $\pi(l-2)$, donde l es el numero de lados. La búsqueda de las propiedades que gobiernan la construcción de los poliedros no fue fácil:

> *...aunque ya habia encontrado muchas propiedades comunes a los poliedros que son análogas a las propiedades que comparten todos los polígonos, no sin gran sorpresa descubrí que las mas impòrtantes de esas propiedades eran tan recónditas que todo el tiempo y esfuerzo que invertí buscando una prueba de ellas habia sido, hasta ahora, en vano... (Leonard Euler, 1752)*

Lo que descubrió Euler fue que *en un poliedro convexo el número de vértices mas el número de caras excede en dos al número de aristas*:

$$V + C = A + 2$$



V – A = 0 V – A + C = 2

Figura 5: Polígonos y poliedros

Un siglo antes Descartes había encontrado una fórmula para las *deficiencias angulares* en los vértices de un poliedro convexo. Si pensamos en un poliedro hecho de papel y lo aplanamos alrededor de un vértice, vemos que las caras aplanadas no alcanzan a rodear al vértice. El ángulo faltante es la deficiencia angular. Por ejemplo, la deficiencia angular en cada vértice del cubo es $2\pi - 3(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\pi$ y en cada vértice del octaedro es $2\pi - 4(\frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}\pi$. Lo que observó Descartes fue que *la* *suma de las deficiencias angulares de todos los vértices de un poliedro convexo es siempre* 4π.

Aunque las fórmulas de Descartes y Euler están muy relacionadas, tienen una diferencia esencial: la de Euler no hace ninguna referencia a medidas. Al parecer Euler no estaba al tanto de la fórmula de Descartes, pero la redescubrió y se dió cuenta de que una fórmula llevaba a la otra.

La idea de la demostración de Euler era probar que a un poliedro convexo se le podía recortar un pedazo para obtener un poliedro con un vértice menos, y ver que pasaba con el número de aristas y caras al hacer esto. Resultaba que aunque estos números podían disminuir o aumentar, su diferencia siempre disminuía en 1. Esto reducía el problema a poliedros con cada vez menos vértices, llegando finalmente a tetraedros para los que la fórmula $V + C = A + 2$ claramente vale. La demostración de Euler era muy ingeniosa, pero no puede aplicarse a todos los poliedros.

Una de las muchas consecuencias de la fórmula de Euler es una prueba de que sólo existen 5 sólidos platónicos. Tomemos un poliedro con C caras, A aristas y V vértices, en el que cada cara tiene n lados y en cada vértice concurren m caras. Como en cada cara hay n aristas,

$$A = \frac{Cn}{2}$$

(ya que cada arista pertenece a dos caras). Y como cada vértice pertenece a m aristas,

$$A = \frac{Vm}{2}$$

(ya que cada arista llega a dos vértices). Así que

$$V + C = \frac{2A}{m} + \frac{2A}{n} = A + 2$$

de modo que

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$$

donde A, m y n son enteros mayores que 2.

Es fácil ver que las únicas soluciones son

m	**n**	**A**	**V**	**C**
3	3	6	4	4
3	4	12	8	6
3	5	30	12	20
4	3	12	6	8
5	3	30	20	12

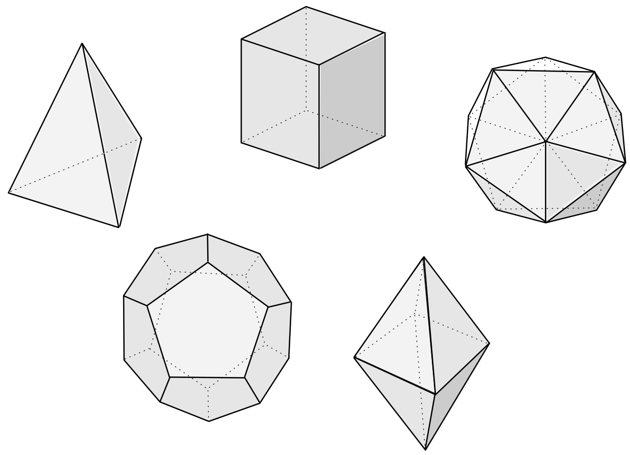
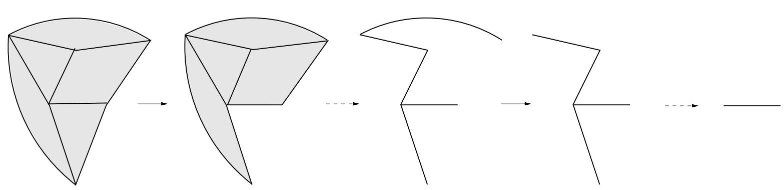


Figura 6: Los sólidos platónicos

Estas soluciones corresponden a los 5 sólidos platónicos (notar las simetrías). Una ventaja de esta demostración es que no necesita que los poliedros sean "regulares" en un sentido geométrico: basta con que todas las caras tengan el mismo número de lados y que concurran a los vértices el mismo número de veces.

La primera demostración rigurosa de la fórmula de Euler fue dada por Cauchy y se basaba en *deformaciones*. La idea era quitarle una cara a la superficie del poliedro y deformar el resto de la superficie hasta formar una figura plana, hecha de las caras estiradas.

Para esta figura plana habría que mostrar que el número de vértices (V), menos el número de aristas (A), más el número de regiones ($R = C - 1$) es 1. Esto puede demostrase así: si quitamos una arista, el número de aristas y el número de regiones disminuyen en 1, así que $V - A + R$ no cambia. Podemos seguir quitando aristas sin desconectar a la gráfica hasta que no quede ninguna región. Lo que queda es un árbol (una gráfica conexa sin ciclos). Si ahora quitamos una arista que llegue a un vértice de valencia 1, entonces el número de vértices y aristas disminuye en 1, de modo que $V - A + R$ tampoco cambia. Así podemos quitar todas las aristas hasta tener sólo una, así que $V - A + R = 1$.



A principios del siglo XIX Lhuilier notó que la formula de Euler no era válida para poliedros que tuvieran "hoyos" como por ejemplo un cubo al que se le perfora un túnel rectangular. Pero Lhuilier mostró que para los poliedros con g hoyos se cumple que:

$$V - A + C = 2 - 2g$$

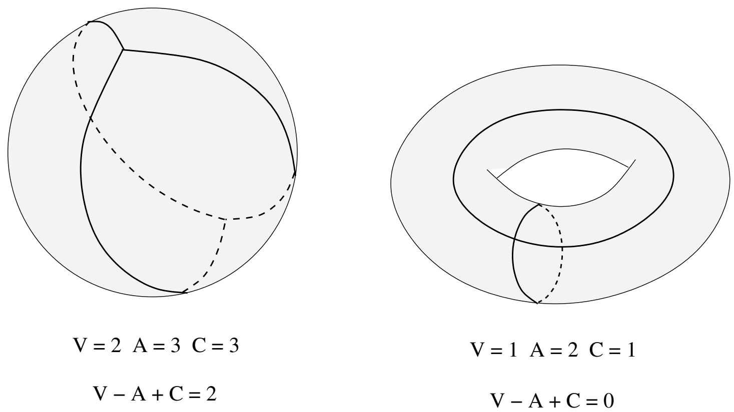


Figura 7: Característica de Euler

Esta generalización de la fórmula de Euler fue el primer invariante topológico conocido: no importa cuantas caras, aristas y vértices tenga el poliedro, el resultado sólo depende del número de hoyos.

La *topología* (análisis situs) estudia las propiedades geométricas que son invariantes bajo deformaciones continuas. Si tomamos una superficie, la rompemos en pedazos y luego la volvemos a armar, podemos pensar en ella como un "poliedro curvo" en el que los pedazos son las caras, las roturas son las aristas y los puntos donde convergen las roturas son los vértices. El número $V - A + C$ no sólo se conserva al deformar la superficie, sino que es independiente de cómo la hagamos pedazos (siempre y cuando los pedazos no tengan hoyos). Al número $\chi = V - A + C$ se le conoce como la *característica de Euler* de la superficie.

Al ver la fórmula de Euler uno puede preguntarse si no habrá otras combinaciones parecidas (algo como $V + 2A - 3C$ por ejemplo) que sean invariantes topológicos. Pero si recordamos la demostración de la invariancia de $V - A + C$ es fácil ver que para que el resultado no cambie los coeficientes de A y V deben ser iguales y de signo opuesto y lo mismo debe pasar para los coeficientes de A y C, de modo que las únicas combinaciones invariantes son de la forma $kV - kA + kC$, los múltiplos de la característica de Euler.

La fórmula de Euler aparece de manera sorprendente en muchos lados, por ejemplo en la geometría diferencial. Si S es una superficie suave (sin esquinas ni arrugas) y calculamos su curvatura k en cada punto, podemos integrarla para obtener la curvatura total de la superficie. Cuando la superficie se deforma la curvatura en cada punto cambia, y uno puede preguntarse que sucede con la curvatura total. El *Teorema de Gauss-Bonnet* dice que:

$$\int_S k = 2\pi(V - A + C)$$

Esto muestra que *la curvatura total de la superficie no cambia al deformarla*, porque sólo depende del número de hoyos de la superficie.

La fórmula de Euler ha sido generalizada a todas las dimensiones y a muchos contextos distintos. Por su sencillez y por la cantidad y profundidad de sus aplicaciones, la fórmula de Euler es sin duda una de las joyas da las matemáticas.

El autor agradece a los revisores y editores sus comentarios y sugerencias.

Bibliografía

[1] C. Berge, *Theory of Graphs.* Dover. Un texto clásico sobre las gráficas y sus aplicaciones.

[2] H.S.M. Coxeter, *Introduction to geometry*, second edition. Wiley & sons. Este es un clásico de la geometría.

[3] J.R. Newman, *El Mundo de las Matemáticas.* Grijalbo. Una antología de escritos matemáticos interesantes (incluyendo el de los Puentes de Konigsberg) que uno no debe perderse.

[4] The Euler Archive. *http://www.math.dartmouth.edu/˜euler.* Información acerca de la obra de Euler, incluye traducciones al inglés de sus artículos mas importantes.

[5] The geometry junkyard. *http://www.ics.uci.edu/˜eppstein/junkyard/.* Página de geometía de David Eppstein, llena de cosas interesantes.

[6] Wikipedia, la enciclopedia libre. *http://en.wikipedia.org/.* Un gran sitio para buscar tópicos de matemáticas en general, aunque no todo lo que dice es correcto.