Miscelánea Matemática **37** (2003) 1–14 SMM

La transformada de Laplace en la Física e Ingenierías

Rubén Doroteo Castillejos
Departamento de Ciencias Básicas
Instituto Tecnológico de Oaxaca
Calzada Tecnológico y Víctor Bravo Ahuja s/n
`druben@mail.itoaxaca.edu.mx`

1 Introducción.

El propósito de este trabajo es mostrar como se aplica la transformada de Laplace en la resolución de algunas ecuaciones diferenciales parciales que aparecen frecuentemente en la Física e Ingenierías: La ecuación de onda se estudia en la sección dos. La sección tres trata de la ecuación del calor y la sección cuatro, de la ecuación de Laplace. Éstas tres ecuaciones se resuelven primero con el método de separación de variables y luego con la técnica que queremos mostrar: usando la transformada de Laplace. Esto se hace con el fin de comparar ambas técnicas. En la última sección estudiamos el problema de la conducción del calor en una placa metálica semi-infinita, el cual no se puede resolver por separación de variables.

Comenzamos con algunas definiciones básicas de la transformada de Laplace.

Sea $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, si $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para algunas constantes α y M y para toda t decimos que f es de *orden exponencial.*

Para funciones f de orden exponencial definimos la transformada de Laplace como:

$$F(z) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)dt. \tag{1}$$

F resulta ser una función analítica en alguna región del plano complejo.

Ahora, al resolver ecuaciones diferenciales usando la transformada de Laplace, lo que se obtiene es la transformada de nuestra solución, así, se vuelve indispensable saber recuperar una función a partir de su transformada. Esto se logra mediante la transformada Inversa de Laplace. Esta se define por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} e^{zt} F(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} F(z)dz \qquad (t > 0) \quad (2)$$

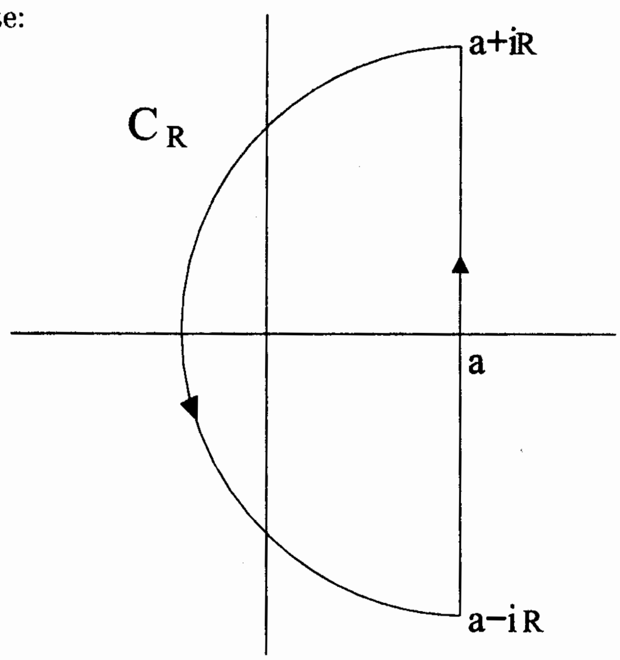
donde F se define como en (1), L_R es el segmento de recta vertical $z = a + it$, $-R \leq t \leq R$ tal que todos los polos de F estén a su izquierda.

Ahora, bajo ciertas condiciones muy generales, se demuestra usando el Teorema del Residuo, que si $|F(z)| \leq M_R$ (para z en el semicírculo C_R de la figura de abajo), donde M_R tiende a cero cuando R tiende a ∞, entonces:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_k}[e^{zt}F(z)] \qquad (3)$$

donde $z_1, ..., z_n$ son los polos de F.

El camino de integración usual para aplicar el Teorema del Residuo[1] es el siguiente:



Para una función de dos variables $u(x, t)$ definimos su transformada

[1]Consulte [2], página 193.

de Laplace como antes, considerando x como constante, es decir,

$$u(x,z) = \mathcal{L}\{u(x,t)\} = \int_0^\infty e^{-zt} u(x,t)dt.$$

Y su transformada inversa será, siguiendo (2):

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{zt} u(x,z)dz \tag{4}$$

donde C es el camino de arriba que consta de L_R seguido de C_R.

Las propiedades de esta transformada que estaremos usando son:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right\} = \frac{du(x,z)}{dx}. \tag{5}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right\} = zu(x,z) - u(x,0). \tag{6}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right\} = z^2 u(x,z) - zu(x,0) - \frac{\partial}{\partial t}u(x,0). \tag{7}$$

Estas propiedades se obtienen de la definición de la transformada[2] para funciones de una variable y usando integración por partes.

2 Una ecuación diferencial hiperbólica. La ecuación de Onda.

El desplazamiento vertical $u(x,t)$ de una cuerda de longitud L muy tensa satisface, bajo ciertas condiciones, la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Se desea resolver esta ecuación sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = 0; \quad u(L,t) = 0; \quad \text{(condiciones de frontera)}.$$

$$u(x,0) = f(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x); \quad \text{(condiciones iniciales)}.$$

Un método estándar es el de *separación de variables* [3] Se comienza proponiendo una solución de la forma:

$$u(x,t) = k(x)h(t).$$

[2]Para ver más detalles consulte [3] página 96.

[3]Para detalles puede consultar el libro de D. Zill de ecuaciones diferenciales.

Al sustituir en la ecuación diferencial se obtiene un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya solución es:

$$k(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \operatorname{sen}(\lambda x)$$

y

$$h(t) = c_3 \cos(\lambda ct) + c_4 \operatorname{sen}(\lambda ct).$$

Hemos supuesto que $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{L})$ y $g(x) = \frac{c\pi}{L} f(x)$. Al aplicar las condiciones iniciales y de frontera, se obtiene:

$$k(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

y

$$h(t) = \cos\left(\frac{\pi ct}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi ct}{L}\right).$$

Así, al multiplicar estas últimas funciones se obtiene la solución de nuestra ecuación:

$$u(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left[c_1 \cos\left(\frac{\pi ct}{L}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi ct}{L}\right)\right] \tag{9}$$

Nos proponemos obtener esta solución usando las técnicas de la transformada de Laplace.

Tomando transformada en (8) y aplicando las propiedades (5)-(7), obtenemos:

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x,z) - \frac{z^2}{c^2}u(x,z) = -(z/c^2)f(x) - (1/c^2)g(x)$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria considerando z como constante.

Aplicando el método de variación de parámetros, con $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{L})$ y $g(x) = \frac{c\pi}{L} f(x)$, se obtiene la solución:

$$u(x,z) = A(z)e^{-\frac{z}{c}x} + B(z)e^{\frac{z}{c}x} + \frac{z + \pi c/L}{z^2 + \pi^2 c^2/L^2} \operatorname{sen}(\pi x/L)$$

donde los dos primeros términos son de la solución de la ecuación homogénea y el último de la solución particular. Ahora aplicamos condiciones de frontera:

$$u(0,z) = \mathcal{L}\{u(0,t)\} = 0$$

y

$$u(L,z) = \mathcal{L}\{u(L,t)\} = 0$$

para obtener los valores de A y B. Es decir, $u(0,z) = A + B = 0$, por lo que $A = -B$. Además, $u(L,z) = Ae^{-\frac{z}{c}L} - Ae^{\frac{z}{c}L} = 0$ implica que $A = 0$ y por consiguiente $B = 0$. Así,

$$u(x,z) = \frac{z + \pi c/L}{z^2 + \frac{c^2\pi^2}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

cuyos polos son: $z_1 = c\pi i/L$ y $z_2 = -c\pi i/L$. Los residuos en dichos polos de $e^{zt}u(x,z)$ son:

$$\mathrm{Res}_{z=z_1} = \frac{e^{\pi cit/L}(\pi ci/L + \pi c/L)}{2\pi ci/L} \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{L})$$

y

$$\mathrm{Res}_{z=z_2} = \frac{e^{-\pi cit/L}(-\pi ci/L + \pi c/L)}{-2\pi ci/L} \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{L})$$

Ahora verificamos que $u(x,z)$ cumple con lo pedido para aplicar la ecuación (3): Sea z en C_R, entonces $z = a + Re^{it}$ con $\pi/2 < t < 3\pi/2$. Así,

$$\left|\frac{z-1}{z^2 + \frac{c^2\pi^2}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right| \le \frac{R + a - 1}{R^2 + 2aR\cos t + a^2} = M_R.$$

Esta M_R tiende a cero cuando R tiende a infinito. Por lo tanto, podemos aplicar la ecuación (3) para obtener:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{2} \mathrm{Res}_{z_k}[e^{zt}u(x,z)] = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\Big(\cos(\pi ct/L) + \operatorname{sen}(\pi ct/L)\Big).$$

la cual es la solución obtenida en (9), salvo constantes.

3 Una ecuación diferencial parabólica. La ecuación del calor.

El problema de la transmisión del calor en una varilla de longitud L con una temperatura inicial $f(x)$ se modela con la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \tag{10}$$

Se trata de resolver esta ecuación sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = 0 \ ; \ u(L,t) = 0 \quad \text{(condiciones de frontera)}$$

$$u(x,0) = f(x)\ ; \quad \text{(condicion inicial)}.$$

Nuevamente, el método de separación de variables nos dá:

$$u(x,t) = e^{-\frac{c^2\pi^2}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right). \tag{11}$$

suponiendo que $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{L})$. Procedemos como antes, tomando transformada en (10) y aplicando las condiciones iniciales y de frontera, obtenemos:

$$\frac{d^2u(x,z)}{dx^2} - \frac{z}{c^2}u(x,z) = -\frac{f(x)}{c^2}.$$

cuya solución, usando otra vez variación de parámetros, es:

$$u(x,z) = A(z)e^{-\frac{\sqrt{z}}{c}x} + B(z)e^{\frac{\sqrt{z}}{c}x} - \frac{1}{c\sqrt{z}}\int_0^x f(t)\operatorname{senh}\left(\frac{\sqrt{z}}{c}(x-t)\right)dt.$$

Ahora, suponiendo que $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x/L)$ y aplicando las condiciones iniciales y de frontera, obtenemos:

$$A(z) = \frac{\pi Lc}{-2\sqrt{z}(zL^2 + c^2\pi^2)}$$

y

$$B(z) = \frac{\pi Lc}{2\sqrt{z}(zL^2 + c^2\pi^2)}.$$

Por lo tanto, después de hacer las simplicaciones adecuadas, tenemos:

$$u(x,z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x/L)}{z + c^2\pi^2/L^2}.$$

Ahora verificamos que $u(x,z)$ esta acotada por una constante que tiende a cero: sea z en C_R, donde podemos tomar $a = 0$ puesto que el polo de $u(x,z)$ está en el eje X negativo, así,

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(\pi x/L)}{z + c^2\pi^2/L^2}\right| \leq \frac{1}{R - c^2\pi^2/L^2} = M_R.$$

y así, podemos aplicar la ecuación (3) para obtener nuestra solución:

$$u(x,t) = \operatorname{Res}_{z=-c^2\pi^2/L^2}\, e^{zt}u(x,z) = e^{-c^2\pi^2t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

la cual es la obtenida en (11).

4 Una ecuación diferencial elíptica. La ecuación de Laplace.

La ecuación de Laplace surge cuando se trata de hallar la temperatura de estado estable $u(x,y)$ en una placa rectangular de $L \times H$, de bordes aislados. Cuando no escapa calor del borde de la placa se resuelve la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0. \tag{12}$$

sujeta a las condiciones:

$$u(x,0) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0;$$

$$u(0,y) = 0; \quad u(L,y) = \cos(\pi y/H) = f(y).$$

Tomamos transformada en (12) y aplicamos (5)-(7) para obtener:

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x,z) + z^2 u(x,z) - zu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = 0$$

recuerde que, considerando x como constante, $u(x,z)$ es la transformada de Laplace de $u(x,y)$. Usando las condiciones iniciales, obtenemos:

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x,z) + z^2 u(x,z) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación diferencial ordinaria tenemos:

$$u(x,z) = A(z)\cos(zx) + B(z)\operatorname{sen}(zx). \tag{13}$$

Ahora, $u(0,z) = \mathcal{L}\{u(0,y)\} = 0$ implica que A(z)=-B(z). Y $u(L,z) = \mathcal{L}\{u(L,y)\} = \mathcal{L}\{f(y)\} = F(z)$ nos dá:

$$A(z) = -\frac{F(z)}{2\operatorname{senh}(zLi)}$$

y

$$B(z) = \frac{F(z)}{2\operatorname{senh}(zLi)}$$

Como $f(y) = \cos(\pi y/H)$ entonces su transformada de Laplace es:

$$\frac{z}{z^2 + \pi^2/H^2}.$$

Así, sustituyendo estas igualdades en (13) y después de simplificar obtenemos:

$$u(x,z) = \frac{z\operatorname{sen}(zx)}{(z^2+\pi^2/H^2)(\operatorname{sen}(zL))}.$$

cuyos polos son $z_1 = \pi i/H$, $z_2 = -\pi i/H$ y $w_n = n\pi/L(n = 0,1,2,...)$. Hay que aclarar aquí, que éstos polos son los que quedan dentro de otro camino de integración, que es como nuestro camino original solo que el semicirculo queda en el semiplano de la derecha con $a = -1/2$ por ejemplo. Puesto que el grado del denominador de $u(x,z)$ es mayor que el del numerador, como antes vemos que $u(x,z)$ está acotada por una constante que tiende a cero, así, podemos aplicar la ecuación (3).

Ahora, aplicando fracciones parciales tenemos que:

$$\operatorname{Res}_{z_1} e^{zy}u(x,z) = \frac{e^{\pi iy/H}\operatorname{sen}(\pi ix/H)}{2\operatorname{sen}(\pi iL/H)}$$

y

$$\operatorname{Res}_{z_2} e^{zy}u(x,z) = \frac{e^{-\pi iy/H}\operatorname{sen}(-\pi ix/H)}{2\operatorname{sen}(-\pi iL/H)}$$

Además,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{w_n} e^{zy}u(x,z) &= (\lim_{z\to w_n}\frac{z-w_n}{\operatorname{sen}(zL)})(\lim_{z\to w_n}\frac{ze^{zy}\operatorname{sen}(zx)}{z^2+\pi^2/H^2})\\ &= \frac{(-1)^n n\pi}{L^2}\frac{\operatorname{sen}(n\pi x/L)}{n^2\pi^2/L^2+\pi^2/H^2}e^{n\pi y/L}.\end{aligned}$$

Ahora, usando la ecuación (3), obtenemos,

$$u(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(\pi ix/H)}{\operatorname{sen}(\pi iL/H)}\cos(\pi y/H) +$$

$$\frac{\pi}{L^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2\pi^2/L^2+\pi^2/H^2}\operatorname{sen}(n\pi x/L)e^{n\pi y/L}.$$

La cual se comprueba fácilmente que es solución de nuestra ecuación.

5 Un ejemplo que no es de variables separables.

Ejemplo 5.1. La ecuación

$$\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial y^2} = \frac{\partial U(x,y,t)}{\partial t} \tag{14}$$

sujeta a las condiciones iniciales y de frontera:

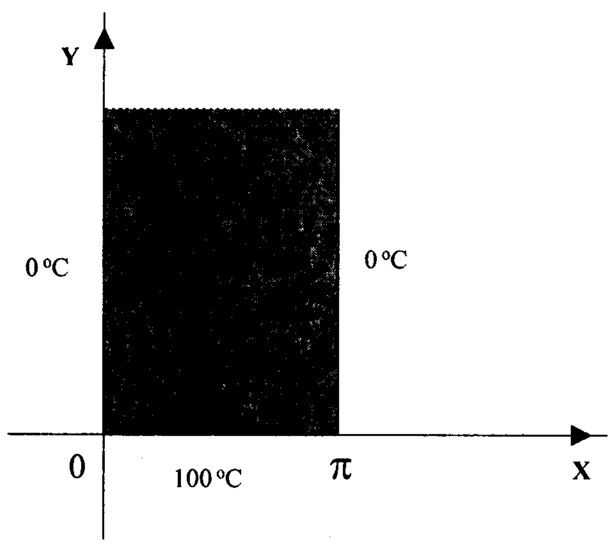
$$U(0, y, t) = 0 \tag{15}$$

$$U(\pi, y, t) = 0 \tag{16}$$

$$U(x, y, 0) = 0 \tag{17}$$

$$U(x, 0, t) = 100 \tag{18}$$

donde $0 < x < \pi$, $y > 0$, $t > 0$, $|U(x, y, t)| < M$, modela la temperatura de una placa semi-infinita de espesor π, que está a 100^oC y los bordes semi-infinitos están a 0^oC.



Si la temperatura inicial es de 0^oC, se desea hallar la temperatura de cualquier punto en cualquier instante de tiempo.

Sea $u = u(x, y, z) = \mathcal{L}\{U(x, y, t)\}$. Tomando transformada en nuestra ecuación, considerando ahora a x y y constantes, y usando las ecuaciones (5) y (17) obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = zu.$$

Ahora tomamos transformada seno, es decir, multiplicamos por $\operatorname{sen}(nx)$ e integramos de 0 a π para obtener:

$$\int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \operatorname{sen}(nx)dx + \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \operatorname{sen}(nx)dx = \int_0^\pi zu \operatorname{sen}(nx)dx.$$

Sea $v = \int_0^\pi u \operatorname{sen}(nx)dx$. Después de resolver estas integrales y aplicar las condiciones (15) y (16) obtenemos una ecuación diferencial ordinaria en v:

$$\frac{d^2v}{dy^2} - (z + n^2)v = 0$$

cuya solución es

$$v = Ae^{y\sqrt{z+n^2}} + Be^{-y\sqrt{z+n^2}}$$

Ahora, v está acotada cuando y tiende a infinito, por lo que $A = 0$. Así,

$$v = Be^{-y\sqrt{z+n^2}}$$

Ahora usamos la ecuación (18) para obtener

$$B = v(n, 0, z) = \int_0^\pi (100/z) \operatorname{sen}(nx)dx = \frac{200}{nz}$$

para n impar. Es decir,

$$v = \frac{200e^{-y\sqrt{z+n^2}}}{nz}.$$

Para el lector familiarizado con la transformada de Fourier, lo que hicimos fue tomar la transformada seno. Ahora u es la transformada inversa de v, por lo que:

$$u(x, y, z) = (400/\pi) \sum_{n\ impar} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \frac{e^{-y\sqrt{z+n^2}}}{z}.$$

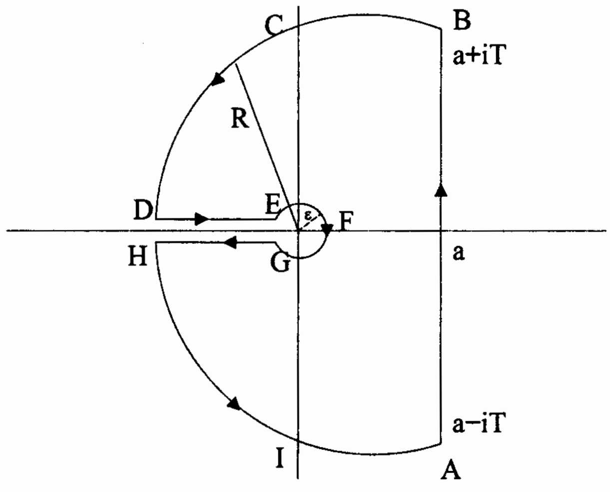
Ahora, la solución a nuestro problema es:

$$U(x, y, t) = \mathcal{L}^{-1}\{u(x, y, z)\} = (400/\pi) \sum_{n\ impar} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-y\sqrt{z+n^2}}}{z}\}. \tag{19}$$

Es decir, debemos calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-y\sqrt{z}}}{z}\right\}$$

Ahora, la función $\sqrt{z} = e^{(1/2)log(z)}$, es decir, es la composición de la exponencial con el logaritmo complejo, el cual sabemos que es una función multiforme, esto es, no esta bien definida en todo el plano incuyendo el cero, así, para que sea analítica debemos quitar al plano complejo un rayo, se usa por lo tanto el siguiente camino:



en este caso estamos quitando el eje X negativo junto con el cero, es decir, estamos tomando la rama principal del logaritmo. Ahora, sea

$$f(z) = \frac{e^{zt-y\sqrt{z}}}{z},$$

luego, por el teorema de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz = 0,$$

donde γ es el camino de arriba. Por otro lado:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{BCD} f(z)dz + \int_{DE} f(z)dz +$$

$$\int_{EFG} f(z)dz + \int_{GH} f(z)dz + \int_{HIA} f(z)dz.$$

Veamos que las integrales a lo largo de BCD y HIA valen cero cuando R tiende infinito: sobre BCD, $z = Re^{is}, s_0 \leq s \leq \pi$, donde s_0 es el argumento de $a + iT$. Note que

$$\left|\frac{e^{-y\sqrt{z}}}{z}\right| = \frac{e^{-y\sqrt{R}\cos(s/2)}}{R} \leq 1/R.$$

Luego,

$$\left|\int_{BCD} f(z)dz\right| \leq \int_{0}^{\pi/2} \left|\frac{e^{zt}e^{-y\sqrt{z}}}{z}dz\right| + \int_{\pi/2}^{\pi} \left|\frac{e^{zt}e^{-y\sqrt{z}}}{z}dz\right|$$

$$\leq \frac{1}{R}\int_{s_0}^{\pi/2} e^{Rt\cos(s)}ds + \frac{1}{R}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{Rt\cos(s)}ds$$

$$\leq \frac{1}{R}\int_{0}^{\phi_0} e^{Rt\,\mathrm{sen}(\phi)}d\phi + \frac{1}{R}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-Rt\,\mathrm{sen}(\phi)}d\phi$$

en donde hicimos $s = \pi/2 - \phi$ en la primera de estas dos últimas integrales y $s = \pi/2 + \phi$ en la última, además $\phi_0 = \pi/2 - s_0$ implica $\mathrm{sen}(\phi_0) = \cos(s_0) = (a/R) \geq \mathrm{sen}(\phi)$, luego

$$\frac{1}{R}\int_{0}^{\phi_0} e^{Rt\,\mathrm{sen}(\phi)}d\phi \leq \frac{1}{R}\int_{0}^{\phi_0} e^{at}d\phi = \frac{e^{at}\phi_0}{R}$$

y

$$\frac{1}{R}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-Rt\,\mathrm{sen}(\phi)}d\phi \leq \frac{1}{R}\int_{0}^{\pi/2} e^{-2Rt\phi/\pi}d\phi = \frac{\pi}{2tR^2}(1 - e^{Rt})$$

los cuales tienden a cero cuando R tiende a infinito. Análogamente se ve que la integral a lo largo de HIA vale cero cuando R tiende a infinito. Ahora, sobre DE: $z = -x$ con x de R a ϵ. Entonces,

$$\int_{DE} f(z)dz = \int_{R}^{\epsilon} \frac{e^{-xt}e^{-yi\sqrt{x}}}{x}dx.$$

Análogamente, sobre GH:

$$\int_{GH} f(z)dz = \int_{R}^{\epsilon} \frac{e^{-xt}e^{yi\sqrt{x}}}{x}dx.$$

Sumando estas dos integrales nos queda:

$$\int_{DE} f(z)dz + \int_{GH} f(z)dz = 2i\int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{-xt}\,\mathrm{sen}(y\sqrt{x})}{x}dx.$$

Sobre EFG: $z = \epsilon e^{i\theta}$, tenemos:

$$\int_{EFG} f(z)dz = i\int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon t e^{i\theta} - y\sqrt{\epsilon}e^{i\theta/2}}d\theta.$$

Haciendo tender ϵ a cero, y pasando al límite dentro de la integral, vemos que esta vale $-2\pi i$. Tenemos ya todas las integrales que necesitamos, así,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-y\sqrt{z}}}{z}\right\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{a-i\infty}^{a+\infty} \frac{e^{zt-y\sqrt{z}}}{z}dz = -\lim_{R\to\infty,\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\Big[\int_{DE} f(z)dz +$$

$$\int_{EFG} f(z)dz + \int_{GH} f(z)dz\Big] = 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\operatorname{sen}(y\sqrt{x})}{x}dx.$$

Haciendo $x = u^2$ en la última integral, obtenemos:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\operatorname{sen}(y\sqrt{x})}{x}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-u^2t}\operatorname{sen}(yu)}{u}du.$$

Esta integral vale

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y/2\sqrt{t}} e^{-u^2}du$$

y el lector puede consultar para los detalles el libro ([3]) que aparece en la bibliografía.

Usando ahora el hecho de que

$$1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2}du$$

obtenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{e^{-y\sqrt{z}}}{z}\Big\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{y/2\sqrt{t}}^\infty e^{-u^2}du.$$

Haciendo el cambio de variables $v = y^2/4u^2$, nos queda finalmente:

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{e^{-y\sqrt{z}}}{z}\Big\} = \int_0^t \frac{y}{2\sqrt{\pi v^3}}e^{-y^2/4v}dv.$$

Usando el teorema de traslación obtenemos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{e^{-y\sqrt{z+n^2}}}{z}\Big\} = \int_0^t \frac{y}{2\sqrt{\pi v^3}}e^{-y^2/4v}e^{-n^2v}dv.$$

Así, regresando a nuestra ecuación (19), obtenemos finalmente nuestra solución:

$$U(x,y,t) = (200/\pi^{3/2})\sum_{n\ impar}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\int_0^t \frac{y}{v^{3/2}}e^{-y^2/4v}e^{-n^2v}dv.$$

Referencias

[1] Richard E. Bellman and Robert S. Roth, The Laplace Transform, World Scientific, USA, 1984.

[2] Ruel V. Churchill y James Ward Bromn, Variable Compleja y Aplicaciones, cuarta edición, McGraw-Hill, México 1990.

[3] Murray R. Spiegel, Transformadas de Laplace, McGraw-Hill, México, 1995.

[4] K. Yosida, Operational Calculus, Springer Verlag, 1984.

[5] E.C. Zachmanoglou y D.W. Thoe, Introduction to Partial Differential Equations with Aplications, Dover Publications, Inc., New York, 1986.