Miscelánea Matemática **25** (1997) 59–74 SMM

Contribuciones de Weierstrass a la variable compleja

R. Michael Porter*

Departamento de Matemáticas
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
Instituto Politécnico Nacional

1 Reseña Histórica.

Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897), el *padre del análisis moderno*, fue una de las figuras más destacadas en las matemáticas del siglo pasado. Su obra refina el concepto de qué es un *número* y qué es una *función* en las matemáticas y eleva el nivel de autocrítica, tanto en la precisión de las definiciones como en el rigor de las demostraciones. Aquí sólo pretendemos señalar sus principales logros en la Teoría de las Funciones de la Variable Compleja, dentro del contexto histórico de la época científica en que vivió.

La siguiente cita, extraída de un texto de la historia de las matemáticas, resume de manera concisa el trayecto matemático de Weierstrass y la posición que ocupa la Variable Compleja en él.

> *Asistió a la Universidad de Bonn, donde su padre lo envió con el propósito de que estudiara contaduría, comercio y derecho. Pero Karl pasó todo su tiempo ahí practicando esgrima y gozando del gemütlichkeit de los salones de cerveza. Cuando regresó a casa en 1839 sin diploma, se puede imaginar cuál fue la reacción de su padre. Entonces, el joven Weierstrass decidió prepararse para una carrera en enseñanza y entró a la Academia de Münster, que estaba cerca de*

*Parcialmente apoyado por el CONACyT. Proyecto 2585P-E

> *su casa. Este fue un paso bien andado, pues ahí encontró a un profesor de matemáticas hábil e inspirador, Christoph Gudermann (1798–1852), quien despertó su interés en las recién creadas funciones elípticas de Abel y Jacobi. Gudermann confió sus propias ideas a su pupilo y le dijo que por años se había esforzado en vano en utilizar series de potencias (series infinitas con variables) para representar las funciones elípticas. Donde había fracasado su maestro tuvo éxito Weierstrass, y tales series son la clave de todos sus descubrimientos analíticos subsecuentes.* [11, p. 548]

Estos *descubrimientos analíticos subsecuentes*, comenzaron con su artículo sobre Integrales Abelianas que apareció en 1854 en la revista *Crelle's Journal* (ahora *Journal für die riene und angewandte Mathematik*) y gracias al cual recibió el grado de Doctor *honoris causa* en la Universidad de Koenigsberg y un puesto en la Escuela Real Politécnica en Berlín y posteriormente en la Universidad de Berlín. Hablaremos de estas integrales en la Sección 4.

Primero, trataremos en la próxima sección los fundamentos de la teoría de una Variable Compleja y el papel de Weierstrass en su desarrollo. En las secciones restantes daremos resúmenes más escuetos de resultados más avanzados que debemos a Weierstrass.

2 El concepto de función analítica.

Quizás el avance más importante en las matemáticas del Siglo XIX fue el reconocimiento de propiedades especiales de ciertas funciones de una variable compleja. Neuenschwander [13] describe las influencias mutuas entre las tres teorías principales de la *teoría de funciones* de dicho periodo: la de A.-L. Cauchy, de B. Riemann y de Weierstrass. Aquí veremos las características más sobresalientes de cada una de estas teorías, pues sería incongruente tratar la última sin tomar en cuenta las primeras dos.

Un *número complejo* es una pareja de dos números reales, x y y, generalmente escrita como una suma $x + yi$ donde i se llama la *unidad imaginaria* y satisface $i^2 = -1$. La colección $\mathbb{C}$ de todos los números complejos es el mismo conjunto que el *plano* $\mathbb{R}^2$, dotado de las operaciones aritméticas de adición y multiplicación con la mayoría de sus propiedades usuales.

(Recordemos de paso el hecho histórico bien conocido, que fue William Rowan Hamilton, quien después de haber intentado en vano definir una operación de multiplicación en el conjunto $\mathbb{R}^3$ de triples de números reales, descubrió en 1843 una multiplicación en $\mathbb{R}^4$ que es consistente con la operación de adición de vectores y es asociativa, aunque no conmutativa. Fue Weierstrass quien demostró que el único valor de $n > 1$ para el cual se puede definir un sistema algebraico en $\mathbb{R}^n$ con una multiplicación conmutativa y sin divisores del cero, es $n = 2$; este sistema es precisamente $\mathbb{C}$ [2, p. 254]. Se dice que este resultado lo presentó en sus conferencias en 1863, lo que sí se sabe es que lo publicó en 1884.)

Los matemáticos se dieron cuenta muy temprano en el Siglo XIX, si no es que antes, que una función f de dos variables reales x, y que resuelva alguna de las ecuaciones importantes de la física, así como las funciones más básicas de las matemáticas (como son los polinomios, funciones trigonométricas, etc.), al considerarse como funciones de una variable compleja $z = x + yi$ gozan de una propiedad especial, que históricamente ha recibido diversos nombres como *holomorfas*, *monogénica*, *analíticas*, *isotérmicas*, *conformes*, entre otros. En parte la diversidad de nombres proviene de los diferentes contextos en que dichas funciones fueron utilizadas (las *coordenadas isotérmicas*, por ejemplo, reportan la temperatura de un sistema a lo largo de una región en equilibrio térmico); por otra parte se debe también al desconocimiento en las primeras etapas, del hecho de que diferentes caracterizaciones determinaban la misma clase de funciones tan importantes. Para evitar confusiones, usaremos siempre el término *analítica*.

Como ilustración de este fenómeno, señalamos que una funcion $f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$ que describe el flujo de un fluido irrotacional e incompresible, satisface necesariamente las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(éstas en realidad fueron descubiertas por D'Alembert en 1752 [2, p. 492]). Las mismas ecuaciones sirven para describir, entre otros, el potencial eléctrico en una región que no contenga materia conductora.

Riemann llegó a muchos descubrimientos importantes utilizando *condiciones físicas* para definir funciones, por ejemplo, *el potencial eléctrico que resultaría al poner una carga unitaria en un punto dentro de la región, si la frontera de la misma estuviera formada de una materia conductora, conectada a tierra.* Por lo que sabemos hoy en día acerca de las existencia de conjuntos *patológicos* (tales como los *fractales* [12]), uno bien podría preguntarse si las fronteras de las regiones tendrían que satisfacer alguna hipótesis adicional para admitir construcciones basadas en razonamientos de la física.

Weierstrass también se hizo esta pregunta, y aunque llevaba una amistosa relación personal con Riemann, llegó a criticar lo que consideraba su manera demasiado informal de hacer las matemáticas. Luego escribió al respecto:

> *Cuanto más pienso en los principios de la teoría de funciones–y lo hago incesantemente–tanto más se afirma mi convicción que ésta debe basarse en el cimiento de las verdades algebraicas y que por consecuencia, no es el camino adecuado si, en lugar de construir sobre teoremas algebraicos sencillos y fundamentales, se apela a lo transcendente... aquellas formas de pensar... por las cuales Riemann ha descubierto tantas de las propiedades más importantes de las funciones algebraicas.* [13]

Una expresión simple algebraica, por ejemplo un polinomio $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, escrita como función de una variable compleja z, define una función analítica de z. Sin entrar en demasiados tecnicismos, Weierstrass consideró funciones que pueden ser definidas en la vecindad de cada punto p de su dominio por una serie de potencias,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n \ , \tag{1}$$

convergente para cada z en algún disco que contiene a p; es decir, para todo z que satisface $|z-p| < r$ donde $r > 0$ es suficientemente pequeño. Muchas de las propiedades de las funciones analíticas son muy *transparentes* cuando se usa una representación en series de potencias, por ejemplo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_{N-1} = 0$ mientras $a_N \neq 0$, podemos escribir

$$f(z) = a_0 + (a-p)^N (a_N + a_{N+1}(z-p) + \cdots)$$

y deducir de esto muchas propiedades de f, válidas cerca de p.

Las propiedades básicas, que distinguen las funciones analíticas de la generalidad de funciones diferenciables en el plano, fueron descubiertas por muchas personas. La mayor parte fue desarrollada y divulgada por Cauchy quien publicó en el año 1825 la obra [4], que contiene el conocido *Teorema de Cauchy.*

Teorema 1 (Teorema de Cauchy.) *Sea f una función analítica en la región D en el plano complejo $\mathbb{C}$. Sea γ una curva simple y cerrada dentro de D, tal que la región que encierra también esté totalmente contenida en D. Entonces*

$$\int_\gamma f'(z)dz = 0 \ .$$

En 1831 apareció [5] con la expansión en series de potencias de una funcion analítica y las *Fórmulas Integrales de Cauchy.* Las *ecuaciones de Cauchy-Riemannn* también se presentaron en [6] muchos años después, cuando se hizo notar el hecho que la derivada es independiente de la dirección.

En ese tiempo Riemann publicó su famosa disertación [17] y [18], que estimularía investigaciones importantes durante más de un siglo. Utilizó las ecuaciones de Cauchy-Riemann como base de su teoría, y mostró que la función que las satisfaga envía ángulos a ángulos iguales (omitimos mención de posibles singularidades aisladas), y que sus partes real e imaginaria son armónicas (*funciones de potencial*). En conferencias impartidas en 1861, Riemann habló de series de potencias y su uso para la continuación analítica, esto fue un *enfoque Weierstrassiano* que nunca llegó a su obra escrita.

Cuando Weierstrass era estudiante en Münster en los años 1841-1842, descubió lo que ahora se llaman Teorema de Laurent y los estimados de Cauchy [13].

Teorema 2 (Expansión de de Laurent.) *Sea f una función analítica en el disco perforado $\{z : 0 < |z-p| < R\}$, donde $R > 0$. Entonces existe una sucesión doblemente infinita $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números complejos tales que*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-p)^n$$

para todo z en el mencionado disco perforado.

Teorema 3 (Estimados de Cauchy.) *Si la función f es analítica en un dominio que contiene el disco cerrado $\{z : |z-p| \leq R\}$, entonces su n-ésima derivada $f^{(n)}(p)$ satisface $|f^{(n)}(p)| < n!M/R^n$, donde $M = \max\{f(z) : |z-p| = R\}$.*

Del hecho de que una función tenga una representación en series de potencia es fácil demostrar que es diferenciable (de hecho infinitamente diferenciable), y que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por otra parte, el enfoque basado en las ecuaciones de Cauchy-Riemann como condición de partida, deja la duda de si se tiene que suponer adicionalmente que las derivadas parciales $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$, son diferenciables. Si no lo son, ¿podríamos estar tratando una clase de funciones más general que las de Weierstrass? En 1900 Goursat [8] mostró que las dos definiciones de función analítica son equivalentes, por lo que las dos teorías también lo son. Por ende, ya no es cuestión de cuál de los dos enfocaba el estudio en la *mejor* clase de funciones. Los textos modernos presentan una combinación de los dos enfoques con el fin de llegar lo más rápidamente posible a los resultados.

3 Continuación analítica.

La cuestión de la continuación analítica brota de la pregunta, ¿Cuál es la máxima región a la que se puede extender una función analítica dada? El *enfoque Weierstrassiano* también data de la estancia del matemático en Münster.

Supongamos que la función f está dada por la serie de potencias (1), convergente en el disco $\{z : |z-p| < r\}$; de hecho supongamos que r es el mayor radio para el cual esta serie converge (este concepto de mayor *radio de convergencia* es otra contribución de Weierstrass). Tomemos un punto q, distinto de p, dentro de este disco. Es posible presentar una lista infinita de ecuaciones sucesivas, que definen valores b_n tales que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-q)^n ,$$

válido en algún disco $\{z : 0 < |z-q| < s\}$. Si el valor de s es más grande que $r-|q-p|$, entonces la serie centrada en q converge en puntos que no están en el disco original. Esto define una función analítica en la unión de los dos discos, que coincide con f en la primera, y que se llama una *continuación analítica simple* de f. El valor de la función extendida, en un punto afuera del disco original, está completamente determinado por los coeficientes a_n, pero no mediante la formula (1). Esto se sigue del Teorema de la Identidad, o Teorema de Continuación Analítica Unica.

(No siempre es posible realizar el proceso de continuación analítica. Weierstrass enseñó esto al exhibir una serie de potencias que converge en $\{z : |z| < 1\}$ que no es extensible a ninguń conjunto mayor, un ejemplo es una serie con *huecos* entre los términos sucesivos, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} .$$

De hecho, esta función no puede extenderse continuamente en los puntos de la circunferencia $|z| = 1$.)

Supóngase ahora que estamos tratando de una serie que sí puede continuarse. Pongamos $p_1 = p$, $p_2 = q$, y encontremos así series de potencias sucesivas en discos centrados en $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$, cada una una continuación analítica de la anterior. Esta sucesión de discos y series de potencias describe una *continuación analítica por cadena* de la serie original. Pero ahora un fenómeno extraño puede darse: es posible que p_n esté dentro de uno de los discos anteriores, digamos el de p_1, y que el valor de la serie de potencias centrada en p_n no coincida con el valor de la serie centrada en p_1. En otras palabras, mientras la continuación analítica simple es única, la continuación por cadenas no lo es.

Otro aspecto de este proceso de continuación analítica que valdría la pena señalar en este momento, es que no es un proceso *bien determinado*. Dada la serie original en p_1, estamos libres de escoger como p_2 a cualquier punto del primer disco. Así la continuación podría ir quizás a la derecha, o hacia arriba, o en cualquier dirección.

Para Riemann, la completación de una función analítica f significaba encontrar una función en una región mayor posible, de manera que siga satisfaciendo las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esta extensión desde una región original, como lo hemos visto, al repetirse para nuevamente volver a entrar en ella, puede tener valores distintos que los de la función original. Riemann resolvió esta contradicción aparente diciendo que la función realmente está definida en una *superficie* (ahora conocida como *superficie de Riemann*) extendida de alguna manera encima del plano $\mathbb{C}$ de números complejos. Así la función puede tomar valores completamente independientes en distintas *hojas* de esta superficie encima de un mismo punto. Esto también hace posible hablar de una *maxima* región de definición de la función, aunque esta *región* no es necesariamente un subconjunto de $\mathbb{C}$.

Para muchos, esta noción de Riemann era muy imprecisa y por ende, no-matemática. En enfoque de Weierstrass, en contraste, permite hablar del *conjunto* de las series de potencias obtenibles de una serie original por medio del proceso de continuación analítica en un número finito de pasos, un concepto para los matemáticos mucho más *concreto*. Como lo ha descrito un comentarista, *El [Weierstrass] era un hombre metódico y detallista. A diferencia de Abel, Jacobi y Riemann, no tenía estallidos de intuición. De hecho desconfió de la intuición e intentó poner el razonamiento matemático sobre una base firme.* [10, p. 643].

4 Factorización de funciones analíticas y meromorfas.

El teorema de factorización de funciones analíticas cumple con una necesidad tanto teórica como práctica, de obtener una función que tome el valor cero en determinados puntos. Cuando el número de puntos es finito, es fácil lograr esto con polinomios. De hecho, una función que se anula en los puntos $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{C}$ es el polinomio $(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_n)$. Si queremos refinar la pregunta un poco más y pedir que la función tenga un cero de orden m_k en el punto p_k, una solución se obtiene repitiendo el factor $z - p_k$ exactamente m_k veces.

¿Qué pasa si pedimos una función que se anule en una infinidad de puntos dados? (Por ejemplo, una función analítica que se anula precisamente en los puntos enteros es $f(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$.) Pediremos que $p_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$ para que los p_n no se acumulen en ningún punto de $\mathbb{C}$. En general un producto infinito de la forma $(z - p_1)(z - p_2)\cdots$ no converge. La salida de esta dificultad es de dividir cada factor por una cantidad apropiada para que sí converja.

Como un primer paso, dividimos el n-ésimo factor por $-p_n$. Esto nos da

$$(1 - z/p_1)(1 - z/p_2)\cdots ,$$

lo cual es mucho mejor puesto que los factores ahora tienden a 1, y de hecho este producto infinito llegará a convergir cuando los p_n tienden al infinito suficientemente rápidamente. Pero no lo hace siempre, por ejemplo, si $p_n = n$ el producto infinito diverge. La salida de esta dificultad es de dividir por *un poco más*, para acercar a los factores más al 1, siempre procurando dividir por algo no cero. Weierstrass hizo precisamente esto, al expandir el logaritmo de un factor en una serie de potencias,

$$\log(1 - \frac{z}{p}) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{p}\right)^j .$$

Observó que esto tiende a $-\infty$ cuando z tiende a p, y (¡aquí viene la inspiración de un genio!) que lo mismo sucede si se quita un número finito, digamos N, de términos iniciales de la serie, dejando

$$-\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{p}\right)^j .$$

Al aplicar la exponencial otra vez (cancelando el efecto del logaritmo), obtenemos un *factor elemental de Weierstrass* $E_N(a/p)$ donde

$$E_N(t) = (1-t)e^{t+t^2/2+\ldots+t^N/N} .$$

El *truco* en la Factorización de Weierstrass, es que podemos escoger un valor de N diferente para cada factor:

Teorema 4 (Teorema de Factorización de Weierstrass.) *Sean $p_1, p_2, \ldots$ puntos de $\mathbb{C} - \{0\}$ que tienden al infinito (se permite que un mismo valor se repita cualquier número finito de veces). Entonces existe una sucesión $\{N_n\}$ tal que el producto infinito*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{N_n}\left(\frac{z}{p_n}\right)$$

converge a una función analítica en $\mathbb{C}$ que se anula precisamente en los puntos p_n, con la multiplicidad en un punto p igual al número de índices n para los cuales $p_n = p$.

Este resultado puede usarse a la inversa, empezando con una función analítica, notando dónde están sus ceros, y obteniendo así una factorización de la función, muy análoga a lo que el Teorema Fundamental del Algebra nos da para los polinomios.

También puede aplicárse a las funciones meromorfas, es decir, las funciones cuyas únicas singularidades, llamadas *polos*, son de la forma

$$\sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z-p)^n \, .$$

Dada una función meromorfa f, construimos con el Teorema de Factorización de Weierstrass una función analítica que tenga los mismos ceros, y otra cuyos ceros son los polos de f. El cociente de éstas es igual a f multiplicada por una constante (esto de puede deducir del Teorema de Liouville, que realmente fue descubierto por Cauchy), por lo que *cada meromorfa en el plano es cociente de dos funciones analíticas*, resultado que obtuvo Weierstrass en 1876.

5 Funciones Elípticas.

Como se mencionó anteriormente, Weierstrass aprendió las bases de las integrales elípticas de su maestro Gudermann. Aquí sólo damos unos cuantos elementos de una teoría muy extensa.

A finales de los años 1700, L. Euler había estudiado las integrales elípticas, que son integrales de expresiones de la forma $R(x, \sqrt{P(x)})$ donde R es una función racional y P es un polinomio de grado 3 o 4. Jacobi hizo un estudio detallado del caso especial

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

y descubrió que al considerar a la variable como un complejo en lugar de un real, la función inversa tiene unas propiedades extraordinarias. Específicamente, definamos w como función de z por medio de la relación

$$z = \int_0^w \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \, ,$$

digamos en una vecindad de $z=0$ que corresponde a $w=0$. (El uso de la letra ζ para la variable de integración es bastante arbitrario.) Esta función se llama $w=\mathrm{sn}(z)$, y Jacobi definió un triple de funciones sn, cn, dn que hacen un papel similar al de las dos funciones sen, cos en la trigonometría. Lo extraordinario es que aunque las integrales son funciones multivaluadas, las funciones inversas se extienden por continuación analítica a funciones univaluadas en todo $\mathbb{C}$: el valor de z depende de la curva de 0 a w sobre la cual se efectúa la integración, pero a un valor de z le corresponde un solo valor de w. Es más, la función $z \mapsto w$ es meromorfa, y tiene dos periodos independientes: hay complejos ω_1, ω_2 tales que $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$ y

$$\mathrm{sn}(z+\omega_1) = \mathrm{sn}(z) = \mathrm{sn}(z+\omega_2) \ .$$

Una función con estas propiedades se llama *función elíptica.*

Una de las primeras contribuciones de Weierstrass fue de expresar las funciones elípticas de Jacobi como cocientes de series de potencias que convergen en todo el plano. Otra, sumamente importante, fue de descubrir que la función $\wp$ (ahora llamada la *función $\wp$ de Weierstrass*) definida por

$$z = \int_0^{\wp(z)} \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3}} \ ,$$

es en cierto sentido la función elíptica más elemental: en lugar de tres funciones básicas, toda función elíptica puede expresarse en términos de $\wp$ y su derivada $\wp'$. En una presentación moderna, se define esta función por medio de una serie doble (¡que no es serie de potencias!)

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum\sum \frac{1}{(z - n_1\omega_1 - n_2\omega)^2}$$

sumando sobre todas las parejas de enteros (n_1, n_2) distintas de $(0,0)$. En realidad, Weierstrass calculó la inversa de la serie de potencias para la integral,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{4\cdot 5}z^2 + \frac{g_3}{4\cdot 7}z^4 + \cdots$$

que converge en una vecindad de cero; luego lo extendió a su dominio máximo por medio del proceso de continuación analítica por discos que vimos en la sección anterior.

En 1856 se dio lugar a lo que podría llamarse una competencia con Riemann para investigar el problema de inversión de Jacobi. Después de enviar a publicación el tercer artículo de una serie, Weierstrass lo retractó de la imprenta porque *Riemann publicó un artículo sobre el mismo problema, basado en fundamentos totalmente diferentes de los míos y que no aclaraba inmediatamente que se haya acordado con lo mío en sus resultados* (citado en [13]).

Recordemos que las funciones trigonométricas satisfacen una fórmula de adición; por ejemplo $\operatorname{sen}(x+y) = \cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x$. Cualquier otra función trigonométrica, por ejemplo $\cos^2 z + 2\tan z$, también tiene su fórmula de adición, que parece muy diferente de ésta. La fórmula de adición de la función de Weierstrass es

$$\wp(a+b) = -\wp(a) - \wp(b) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(a) - \wp'(b)}{\wp(a) - \wp(b)}\right)^2 .$$

Aparte de descubrir esta relación y muchas otras, *Weierstrass dio una definición precisa de un teorema de adición algebraica, y demostró que las funciones y sus casos degenerados son las únicas funciones de una variable, sujeto a las restricciones obvias de continuidad, uniformidad, etc., que poseen tal teorema de adición.* [2, p. 534]

6 Funciones de varias variables complejas.

La teoría de las funciones analíticas $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de $n > 1$ variables complejas difiere en muchos importantes aspectos de la de las funciones de una sola variable. En particular los tipos de singularidades que se pueden presentar son más complicados. En esta última sección describiremos un resultado técnico, que se debe a Weierstrass y que se ha mostrado sumamente útil en el estudio de comportamiento local de las funciones de varias variables complejas.

Para simplificar la exposición, hablaremos de una funcion $\mathbb{C}$-valuada y analítica f definida en una vecindad del origen $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ en $\mathbb{C}^n$. Tal f se puede representar por una serie de potencias de sus diversas variables como sigue:

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum a_{j_1, j_2, \ldots, j_n} z_1^{j_1} z_2^{j_2} \ldots z_n^{j_n}$$

donde $a_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \in \mathbb{C}$ y donde los subíndices abarcan todas las combinaciones $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ de n enteros no negativos. Supondremos que esta representación para $f(z)$ es válida para valores suficientemente pequeñas de la variable, es decir, cuando $|z_k| < \delta$ para $k = 1, \ldots, n$. Nótese que $f(0, 0, \ldots, 0) = a_{0,0,\ldots,0}$, así la función f tiene un cero en $(0, 0, \ldots, 0)$ si precisamente este coeficiente de la serie es cero. Nos interesa relacionar funciones en $\mathbb{C}^n$ con funciones en $\mathbb{C}^{n-1}$. Consideremos la función de z_n que se obtiene si ponemos $z_1 = z_2 = \ldots = z_{n-1} = 0$, es decir,

$$f(0,\ldots,0,z_n)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{0,\ldots,0,j}z_n^j\ ,$$

una serie de potencias de una sola variable. Llamemos N el orden del cero de esta función en el punto $z_n=0$, de esta manera

$$0=a_{0,\ldots,0,0}=a_{0,\ldots,0,1}=\ldots=a_{0,\ldots,0,N-1}\ ,$$

$$a_{0,\ldots,0,N}\neq 0\ .$$

De lo que vimos antes acerca de funciones de una variable, está claro que se puede escribir

$$f(0,\ldots,0,z_n)=z_n^N g(z_n)$$

donde g es una función analítica de una variable compleja tal que $g(0)\neq 0$. Pero ¿qué podríamos decir de los valores de f en puntos que no sean de la forma $(0,\ldots,0,z_n)$?

Teorema 5 (Teorema de Preparación de Weierstrass.) *Supóngase que la función f es analítica en una vecindad del origen $(0,0,\ldots,0)$ de $\mathbb{C}^n$, y que la función de una variable $f(0,\ldots,0,z_n)$ tiene un cero de orden $N>1$ en $z_n=0$. Entonces existe una función analítica g de n variables, y además N funciones analíticas h_0, $\ldots$, h_{N-1}, de $n-1$ variables tales que*

$$g(0,0,\ldots,0)\neq 0\ ,$$

$$h_0(0,\ldots,0)=\ldots=h_{N-1}(0,\ldots,0)=0\ ,$$

de tal suerte que se puede escribir $f(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ como

$$\begin{aligned}f(z_1,z_2,\ldots,z_n) &= \Big(h_0(z_1,\ldots,z_{n-1})+h_1(z_1,\ldots,z_{n-1})z_n+\ldots\\ &\quad +h_{N-1}(z_1,\ldots,z_{n-1})z_n^{N-1}+z_n^N\Big)\,g(z_1,z_2,\ldots,z_n)\end{aligned}$$

para todos los valores de z_1,z_2,$\ldots$,z_n suficientemente pequeños.

El coeficiente de $g(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ en esta expresión se llama un *polinomio de Weierstrass*, y dada f, es único.

7 Conclusión.

El enfoque céntrico del trabajo de Weierstrass fue de manejar entes matemáticos de lo más explícitos y manejables.

> *Desconfiando en la intuición geométrica, Weierstrass la descartó completamente y construyó su teoría de funciones estrictamente aritmética... Con su reconstrucción del sistema de números como base, Weierstrass hizo de las series de potencia la piedra angular de su teoría. Introdujo los conceptos de radio y círculo de convergencia, dando definiciones aritméticas de ambos, y procedió a generalizaciones trascendentales de polinomios y funciones racionales. Una de sus metas era de caracterizar clases amplias de funciones en términos de su singularidades.* [2, p. 492]

Weierstrass hasta llegó a encontrar un error importante en la obra de Riemann después de la muerte de éste. Se trata de un paso en la demostración del teorema sobre transformación analítica de dominios simplemente conexos, en donde la construcción se basa en la función que hace mínimo el valor de cierta integral. Weierstrass dio un ejemplo de un operador integral para el cual no existe ninguna función que lo minimice. Años después se pudo mostrar que para el operador que consideraba Riemann, el mínimo efectivamente se alcanza.

Por lo que hemos visto, Weierstrass quiso admitir como válidos, sólo conceptos y argumentos basados en un razonamiento lógico con un simbolismo claro e inambiguo. Por otra parte, Riemann aplicó libremente su intuición, su visualización e imaginación para describir fenómenos que tardarían muchas décadas en formalizar. En un lenguaje más contemporáneo, podemos decir que los estilos de abordar un tema de Riemann y de Weierstrass corresponden a los hemisferios derecho e izquierdo del cerebro, en que dominan las funciones de imaginación y de razonamiento respectivamente; es evidente que para el buen funcionamiento del organismo, un equilibrio entre ambos es muy deseable.

Referencias

[1] Abikoff, W., *The uniformization theorem*, *Amer. Math. Monthly* 88 (1981), 574-592.

[2] Bell, E. T., *The Development of Mathematics*, McGraw-Hill Book Company (1945)

[3] Boyer, C. B., *A History of Mathematics*, 2a ed., John Wiley & Sons, Inc. (1991)

[4] Cauchy, A-L., *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires*, Paris (1825)

[5] Cauchy, A-L., *Extrait du mémoire présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831*, Turin (1831)

[6] Cauchy, A-L., *Sur les fonctions de variable imaginaires*, *C. R. Acad. Sci.* 32 (1851) 484-487

[7] Dugac, P., *Éléments d'analyse de Karl Weierstrass*, *Arch, Hist. Exact Sci.* 10 (1973), 41-176

[8] Goursat, E., *Sur la définition générale des fonctions analytiques, d'après Cauchy*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 1 (1900) 14-16

[9] Gunning, R. C., *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*, vol. II: Local Theory, Wadsworth & Brooks/Cole (1990)

10] Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York (1972)

11] Kramer, E. E., *The Nature and Growth of Modern Mathematics*, Hawthorn Books, Inc. (1970)

12] Mandelbrot, B., *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company (1983)

13] Neuenschwander, E., *Studies in the history of complex function theory II: Interactions among the French school, Riemann, and Weierstrass*, *Bull. of the A.M.S.* 5 (1981) 87-105

14] Porter, R. M., *Superficies de Riemann*, Depto. de Matemáticas del CINVESTAV (1983)

15] Porter, R. M., *Desarrollo histórico de la integral elíptica*, *Aportaciones Matemáticas*, Comunicaciones 6 (1989) 113-156

[16] Porter, R. M., *Superficies de Riemann–hilo dorado en la tela de las matemáticas*, *Aportaciones Matemáticas*, Comunicaciones 13 (1993) 163-192

[17] Riemann, B., *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Inauguraldissertation, Göttigen (1851)

[18] Riemann, B., *Theorie der Abel'schen Functionen*, *J. Riene Angew. Math.* 54 (1857)

[19] Weierstrass, K., *Mathematische Werke*, 7 tomos, Mayer und Müller (1895-1924)

[20] Weierstrass, K., *Zur Theorie der Abelschen Functionen*, *J. Riene Angew. Math.* 47 (1854)