Miscelánea Matemática **47** (2008) 11–22 SMM

Formas Aerodinámicas y la Razón Áurea

J. Cruz Sampedro

CIMA de la UAEH.

sampedro@uaeh.edu.mx

L. E. Rivera Fernández

CIMAT.

laurae@cimat.mx

M. Tetlalmatzi Montiel

CIMA de la UAEH.

tmontiel@uaeh.edu.mx

1. Introducción

¿Se ha preguntado usted alguna vez, qué forma debe tener el frente de un submarino, una bala o una nave espacial? A primera vista, teniendo en cuenta que esos objetos seguramente han sido diseñados para desplazarse con facilidad, la intuición sugiere que deben ser puntiagudos, pero ¿son los proyectiles con frentes agudos los más aerodinámicos, es decir los que menos resistencia encuentran al moverse?

En 1687, en su *Philosophia Naturalis Principia Mathematica* [7], Newton (1642-1727) analiza el movimiento rectilíneo uniforme de una esfera y un cilindro del mismo radio en un medio homogéneo, en el que el cilindro se mueve paralelamente a su eje, y encuentra que la resistencia de la esfera es la mitad de la resistencia del cilindro. En esa obra, en la Proposición XXXIV del Libro II: *Del Movimiento de los Cuerpos*, Newton también plantea y resuelve el problema general de encontrar el sólido de revolución que experimenta la menor resistencia al moverse con velocidad constante en un medio homogéneo. El estudio de este problema, conocido en la literatura como *El Problema de la Resistencia Mínima de Newton*, o como *El Problema Aerodinámico de Newton*, es importante en el diseño de naves, submarinos y torpedos y es un tema activo y de gran interés en la investigación matemática actual [1, 2, 3, 9].

En las páginas siguientes consideramos *El Problema Aerodinámico de Newton Restringido a Conos Truncados* y presentamos una solución accesible a lectores familiarizados con el manejo algebraico de desigualdades y con las leyes de la mecánica de Newton. Nos parece pertinente comentar que la solución de este problema podría ser de especial interés para estudiantes y profesores de los primeros semestres de ingeniería o ciencias exactas y, aunque el problema se ha simplificado enormemente debido a la restricción impuesta, su sencilla solución está llena de agradables e inesperadas sorpresas.

Una vez determinada las forma del cono más aerodinámico, es natural preguntarse: *¿Hay un procedimiento geométrico sencillo para construirlo?*

Nuestra respuesta a esta pregunta es afirmativa y el método que proponemos para la construcción deseada está estrechamente relacionado con la Razón Áurea $\tau \equiv (1+\sqrt{5})/2$. La presencia de este misterioso número en el contexto de problemas aerodinámicos es un hecho que nos parece bastante sorprendente y, aunque matemáticamente no es más que una modesta observación geométrica, hasta donde es de nuestro conocimiento, no se encuentra en la literatura.

La razón áurea τ, también llamada *"Proporción Divina"* por Luca Pacioli (1445-1517) y referida por Kepler (1571-1630) como *"una de las dos joyas de la geometría"*, es tal vez uno de los principales invariantes que se manifiestan en la matemática de la biología y el arte. Este número, además de poseer propiedades algebraicas y geométricas extraordinarias, se ha descubierto en distintos patrones y espirales de una gran variedad de seres vivos y hay evidencias de que fue usado con fines estéticos por Leonardo (1452-1519) y por los arquitectos góticos y griegos [4, 6, 8]. La relación entre la razón áurea y el cono truncado de mínima resistencia explica probablemente el agradable aspecto visual de este último (Fig. 1). En conclusión: *El cono truncado más aerodinámico es, al mismo tiempo, el más estético.*

Es pertinente mencionar que la solución general del Problema Aerodinámico de Newton queda fuera del alcance y propósito de esta monografía, pues requiere conocimientos del cálculo de variaciones. Al lector interesado en profundizar en este fascinante tema le recomendamos consultar las referencias [2, 3, 5, 7, 10].

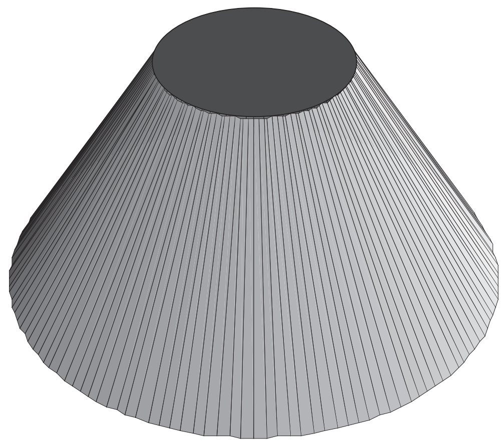

Figura 1

2. Un modelo para la resistencia

A continuación formulamos de manera precisa el Problema Aerodinámico de Newton Restringido a Conos Truncados y desarrollamos un modelo matemático para la resistencia que nos permitirá analizar y resolver el problema planteado.

2.1. El problema

Dados $h > 0$ y $r > 0$, considérese un cono truncado vertical de altura h (Fig. 2a), con base inferior de radio r y base superior de radio $x \in [0, r]$, que se mueve hacia arriba con velocidad constante $\mathbf{v}$ en un medio homogéneo.

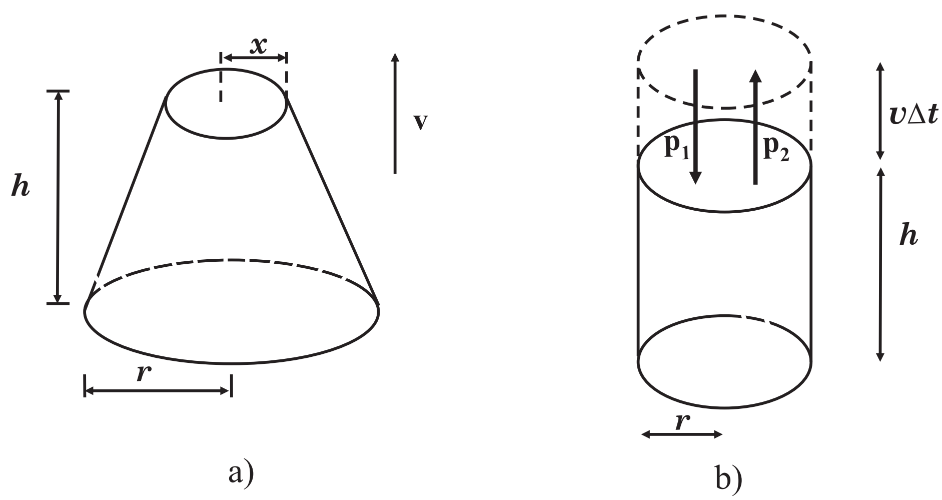

Figura 2

Pregunta: *¿Para qué valor de x se minimiza la resistencia que ofrece el medio al movimiento de este cono?*

Intuitivamente, la conjetura natural es que x debe ser igual a cero. Para nuestra sorpresa, a continuación veremos que esta presunción es incorrecta.

2.2. El modelo de Newton

Para responder la pregunta anterior, primeramente desarrollamos un modelo matemático que nos permitirá cuantificar la *resistencia* (fuerza resistente) ofrecida por el medio al movimiento de un cono. Imitando el análisis de Newton para el problema de la mínima resistencia [7, 10], comenzamos por suponer que:

- El medio consiste de partículas de masa fija m, dispuestas libremente a distancias iguales unas de las otras.
- Cada partícula choca elásticamente contra el objeto a lo sumo una vez.

Es conveniente darse cuenta que el primer supuesto describe un *medio ralo,* como el que podría encontrarse a grandes alturas o cerca de la luna, y que del segundo supuesto se infiere que las colisiones de las partículas con el cono obedecen la *ley de reflexión,* es decir: *el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.*

La construcción de buenos modelos de resistencia para fluidos más interesantes, como el agua o el aire, requiere conocimiemtos mucho más profundos sobre la mecánica de fluidos que los utilizados en este trabajo.

Antes de iniciar la formulación matemática de la resistencia, recordamos al lector que la segunda ley de Newton, tradicionalmente conocida como $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, establece realmente que la fuerza $\mathbf{F}$ es la razón de cambio con respecto al tiempo del momento (o cantidad de movimiento) $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$; es decir

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

A continuación procedemos, a partir de los supuestos y consideraciones anteriores, a deducir una expresión para la resistencia que el medio ofrece al movimiento de un cono truncado. Sin pérdida de generalidad, supondremos que el cono permanece inmóvil y que las partículas se mueven hacia abajo con velocidad constante $\mathbf{v}$.

Por conveniencia y sencillez, analizamos primero el caso de un cilindro de radio r y altura h (Fig. 2b). En esta situación, los momentos de cada partícula, antes y después de chocar con la base superior del cilindro, están dados respectivamente por

$$\mathbf{p}_1 = m\mathbf{v} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{p}_2 = -m\mathbf{v}.$$

En consecuencia, el cambio de momento por unidad de tiempo producido en cada partícula por la colisión es

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = -2m\mathbf{v}.$$

Por la tercera ley de Newton, el incremento del momento del cilindro producido por cada colisión es igual a $2m\mathbf{v}$. Por la segunda ley de Newton, la resistencia R_{cil} del cilindro será entonces igual a la suma de las magnitudes de todos los incrementos de momento producidos por las colisiones en la base superior del cilindro por unidad de tiempo. Así, si el número de colisiones por unidad de tiempo es N, entonces el cambio de momento por unidad de tiempo producido en el cilindro es $N(2mv)$, en donde $v = |\mathbf{v}|$, y por lo tanto

$$R_{\text{cil}} = 2Nmv.$$

Para determinar N, nótese que solamente las partículas que se encuentran a una distancia menor o igual a $v\Delta t$ de la base superior del cilindro pueden chocar con ésta en el tiempo Δt (Fig. 2b). Luego, si ρ denota la densidad del medio, entonces tenemos

$$\rho = mN\Delta t/V$$

en donde $V = \pi r^2 v\Delta t$, es el volumen del cilindro de radio r y altura $v\Delta t$. Por lo tanto

$$N = \pi\rho r^2 v/m$$

y consecuentemente

$$R_{\text{cil}} = 2\pi\rho v^2 r^2. \tag{1}$$

Consideremos ahora el caso general de un cono truncado de altura h, con base inferior de radio r y base superior de radio x (Fig. 3). Para calcular la resistencia $R(x)$ correspondiente a este cono, notemos que las colisiones pueden ocurrir tanto en la base superior como en el costado del mismo. Por lo tanto si R_s denota la resistencia ejercida por el medio sobre la base superior y R_c la resistencia sobre el costado del cono, entonces

$$R(x) = R_s + R_c.$$

Note que si $x = r$, entonces $R_c = 0$ y consecuentemente

$$R(r) = R_{\text{cil}},$$

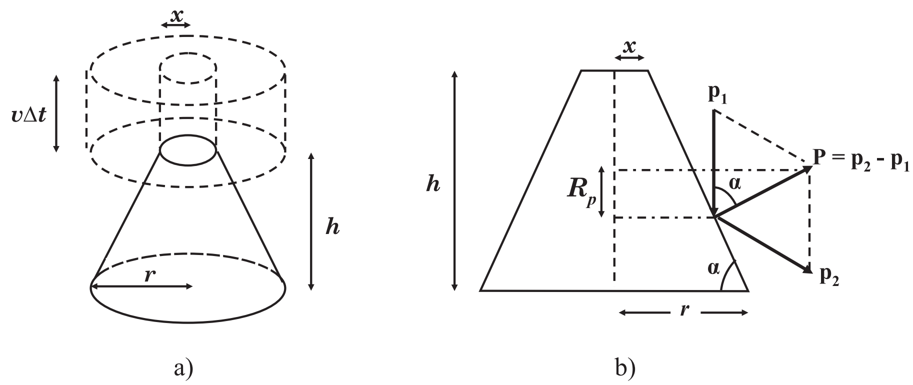

Figura 3

además, utilizando (1) con $r = x$ se tiene

$$R_s = 2\pi\rho v^2 x^2.$$

Para calcular R_c, observemos que las partículas que chocan contra el costado del cono en el tiempo Δt, son las que están en un "cilindro" hueco cuyo volumen es el mismo que el del cilindro hueco de altura $v\Delta t$, radio exterior r y radio interior x (Fig. 3a). Como el volumen del cilindro hueco está dado por

$$V = \pi(r^2 - x^2)v\Delta t$$

y la densidad del medio es

$$\rho = mN_1\Delta t/V,$$

en donde N_1 es el número de partículas que chocan con el costado por unidad de tiempo, entonces

$$N_1 = \pi(\rho/m)(r^2 - x^2)v.$$

Por simetría, el efecto total sobre el costado del cono de todas las componentes horizontales de los cambios de momento, $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, es nulo, pues éstas se anulan por parejas diametralmente opuestas. Por consiguiente, si denotamos con R_p la resistencia producida por cada partícula que choca con el costado del cono, entonces

$$R_c = N_1 R_p.$$

Note que R_p es igual a la magnitud de la proyección vertical de $\mathbf{P}$ (Fig. 3b), la cual, como se verá enseguida, está dada por

$$R_p = 2mv\cos^2\alpha,$$

en donde α es el ángulo formado por la base inferior del cono truncado y la recta que lo genera. Para justificar esta última afirmación, observe primero que $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = mv$, pues los choques son elásticos. Se sigue que $\mathbf{P}$ es perpendicular al costado del cono y al aplicar la ley de los senos se tiene

$$\frac{|\mathbf{P}|}{\operatorname{sen}(\pi - 2\alpha)} = \frac{mv}{\operatorname{sen}\alpha},$$

de donde

$$|\mathbf{P}| = 2mv\cos\alpha.$$

Como α también es el ángulo entre $\mathbf{P}$ y la vertical, entonces

$$R_p = |\mathbf{P}|\cos\alpha = 2mv\cos^2\alpha,$$

y al substituir los valores de N_1 y R_p se obtiene

$$R_c = N_1 R_p = 2\pi\rho(r^2 - x^2)v^2\cos^2\alpha. \tag{2}$$

Por consiguiente, al sumar R_s con R_c obtenemos

$$R(x) = 2\pi\rho v^2[x^2 + (r^2 - x^2)\cos^2\alpha],$$

y en vista de que

$$\cos\alpha = (r - x)/\sqrt{(r - x)^2 + h^2},$$

definiendo $K = 2\pi\rho v^2$, se consigue finalmente

$$R(x) = K\left[x^2 + (r^2 - x^2)\frac{(r - x)^2}{(r - x)^2 + h^2}\right]. \tag{3}$$

Es interesante notar que si en esta última expresión hacemos $x = 0$ y $h = r$, entonces

$$R(0) = \pi\rho v^2 r^2 = R_{\text{cil}}/2,$$

es decir, la resistencia de un cono puntiagudo, de altura y radio iguales a r, es la mitad de la resistencia de un cilindro del mismo radio. Curiosamente, como se mencionó en la introducción, ésta también es la resistencia de una esfera de radio r (vea el problema 2).

3. El cono de mínima resistencia

En la primera parte de esta sección determinamos el valor de x en el intervalo $[0, r]$ que minimiza la expresión dada para $R(x)$ en (3), luego encontramos las dimensiones del cono truncado de mínima resistencia y, finalmente, vinculamos la construcción y la forma del mismo con la razón áurea y por lo tanto con cuestiones estéticas.

3.1. La resistencia mínima

Para determinar el cono truncado de mínima resistencia debemos encontrar el valor mínimo de $R(x)$, en el intervalo $0 \leq x \leq r$. En virtud de (3) esto equivale a encontrar el mínimo de la función

$$f(x) = x^2 + (r^2 - x^2)\frac{(r-x)^2}{(r-x)^2 + h^2}, \qquad 0 \leq x \leq r.$$

Un sencillo cálculo, sumando y restando h^2 al numerador de la fracción precedente, muestra que

$$f(x) = r^2 - h^2\frac{r^2 - x^2}{(r-x)^2 + h^2}, \qquad 0 \leq x \leq r,$$

y por lo tanto minimizar $f(x)$, para $0 \leq x \leq r$, equivale a maximizar

$$g(x) = \frac{r^2 - x^2}{(r-x)^2 + h^2}, \qquad 0 \leq x \leq r.$$

A continuación resolvemos este último problema mediante un método algebraico elemental y dejamos al lector la sencilla tarea de resolverlo usando los métodos tradicionales de cálculo diferencial (vea el problema 1).

Note que si M es el valor máximo de $g(x)$, para $0 \leq x \leq r$, entonces

$$M \geq g(0) = \frac{r^2}{r^2 + h^2} > 0$$

y

$$r^2 - x^2 \leq M((r-x)^2 + h^2), \qquad 0 \leq x \leq r.$$

Agrupando términos obtenemos

$$(M+1)x^2 - 2Mrx + r^2(M-1) + Mh^2 \geq 0, \qquad 0 \leq x \leq r,$$

y multiplicando por $M+1$ encontramos que

$$((M+1)x - Mr)^2 + (Mh)^2 + Mh^2 - r^2 \geq 0, \qquad 0 \leq x \leq r. \tag{4}$$

En particular para $x = Mr/(M+1) \in [0, r]$ se tiene

$$(Mh)^2 + Mh^2 - r^2 \geq 0.$$

Ya que en (4) la igualdad ocurre justamente para el valor de $x = r*$ en el cual $g(x)$ alcanza su máximo, entonces

$$r^* = \frac{M}{M+1}r \qquad \text{y} \qquad (Mh)^2 + Mh^2 - r^2 = 0. \tag{5}$$

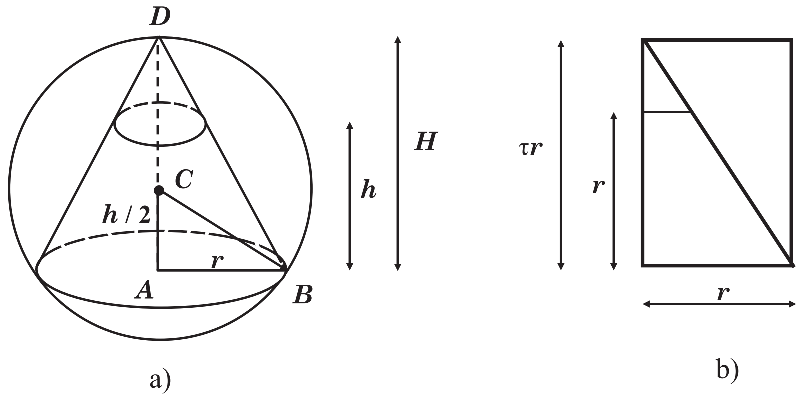

Figura 4

Como $M > 0$, de la primera de estas ecuaciones se sigue que

$$0 < r^* < r.$$

Por lo tanto, *¡el cono de mínima resistencia es plano en su base superior!*

Esta observación es sorprendente pues cualquiera esperaría que el frente del cono de mínima resistencia fuese puntiagudo. La razón por la que este resultado contradice la intuición se debe, posiblemente, a que el modelo estudiado supone un fluido ralo, condición que se cumple por ejemplo cerca de la luna o en las grandes alturas (vea también el problema 5). Esta conclusión no debe ser nueva para los lectores familiarizados con el Problema Aerodinámico de Newton, quienes seguramente recuerdan que la solución de ese problema, conocida en la literatura como el *sólido de Newton* [2, 5, 7, 10], también tiene una parte plana en su frente. Para que el lector establezca una relación concreta de este resultado con el mundo real, lo invitamos a comparar la (Fig. 1) con las fotos del Módulo de Mando Columbia del Apollo 11 que se encuentran en [11].

Para expresar el valor de r^* en términos de r y h, despejamos M de la segunda relación de (5) y teniendo en cuenta que $M > 0$ obtenemos

$$M = \frac{-h + \sqrt{h^2 + 4r^2}}{2h}.$$

De esta manera, al substituir este valor de M en la fórmula de r^* dada también en (5) se obtiene

$$r^* = r + \frac{h^2 - h\sqrt{h^2 + 4r^2}}{2r}. \tag{6}$$

3.2. Construcción geométrica de los conos aerodinámicos

Una vez conocido el valor r^* para el cual se minimiza la resistencia, es natural preguntarse si existe un procedimiento geométrico sencillo para construir un cono de altura H y base de radio r, que al truncarlo a la altura h produzca el cono de resistencia mínima. Un pequeño cálculo, utilizando (6) y la ecuación de la recta que pasa por $(r, 0)$ y (r^*, r), nos muestra que la altura H del cono deseado debe estar dada por

$$H = \frac{h}{2} + \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2}. \tag{7}$$

Esta relación sugiere construir el cono a truncar de la manera siguiente: *Dibuje un triángulo rectángulo ABC de base $\overline{AB} = r$ y altura $\overline{AC} = h/2$ y llame D a la intersección del rayo $\overrightarrow{AC}$ con la circunferencia de centro C y radio $\overline{CB}$ (Fig. 4a). Haciendo girar el triángulo rectángulo ABD alrededor de su cateto vertical se obtiene un cono que al truncarlo a la altura h produce el cono buscado.*

3.3. Conos aerodinámicos y la razón áurea

Finalmente hemos llegado al punto en el que enlazamos la solución matemática de nuestro problema con cuestiones de belleza y sensibilidad visual. Para esto, notemos que si en (7) hacemos $h = r$ entonces

$$H = \tau r,$$

en donde

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

es la bien conocida *razón áurea*. Al cono de mínima resistencia con estas dimensiones lo denominaremos *cono aerodinámico áureo* (Fig. 1). Esta relación entre el cono más aerodinámico y la razón áurea nos proporciona un sencillo procedimiento geométrico para construirlo: *Construya un triángulo rectángulo trazando la diagonal del rectángulo áureo de base r y altura τr (Fig. 4b) y hágalo girar alrededor de su cateto mayor. Al truncar el cono así formado a una altura r se obtendrá el cono truncado más aerodinámico.*

Sin lugar a dudas, la apariencia perfecta y la agradable sensación visual que nos producen los conos más aerodinámicos (Fig. 1) se deben a la sencilla y estrecha relación de éstos con la razón áurea y a la manera tan simple de obtenerlos a partir de los rectángulos áureos.

Note además que si $h = r$, entonces de la ecuación (6) tenemos

$$r^* = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) r,$$

y que al substituir $x = r^*$ en (3) se obtiene

$$R(r^*) = \frac{Kr^2}{\tau^2}, \tag{8}$$

de donde deducimos que la razón entre la resistencia $R(r) = Kr^2$ del cilindro (el cono truncado de máxima resistencia) y la resistencia $R(r^*)$ del cono áureo (de mínima resistencia) es

$$\frac{R(r)}{R(r^*)} = \tau^2, \tag{9}$$

relación que proporciona una evidencia más de la naturaleza estética del cono aerodinámico áureo.

4. Problemas

Sólo se aprende haciendo las cosas; pues aunque creas saberlas, no tendrás la certeza hasta intentarlas.
Sófocles (494-406 a. de J. C.)

1. Un sencillo (pero divertido) ejercicio, para aquellos lectores que tienen conocimientos de cálculo, es encontrar el mínimo de la función $R(x)$ dada en la fórmula (3), usando las técnicas usuales del cálculo diferencial.

2. Si el lector tiene conocimientos de cálculo integral, utilice la fórmula (2) para demostrar que la resistencia para una esfera de radio r es $R(r)/2$, recuperando así el resultado de Newton mencionado en la introducción de esta monografía.

3. Un cálculo interesante es establecer la fórmula (8), de la cual se obtiene la relación (9) que provee una razón más acerca de la naturaleza estética del cono aerodinámico áureo.

4. Fije $h > 0$ y $r > 0$ y considere un proyectil en posición vertical en forma de pirámide cuadrangular truncada de altura h, con base inferior de lado r y base superior de lado $x \in [0, r]$. Suponga

que ese proyectil se mueve hacia arriba con velocidad constante a través de un medio homogéneo. *¿Qué valor de x minimiza la resistencia que ofrece el medio al movimiento de este proyectil? ¿Aparece la razón áurea al considerar $h = r$?*

5. ¿Qué ocurre con el valor mínimo de $R(x)$, $0 \leq x \leq r$, si permitimos que h tome valores arbitrariamente grandes?

Agradecimientos. Los autores agradecen las amables observaciones del referee de Miscelánea Matemática, las cuales contribuyeron a mejorar la presentación de este trabajo. Uno de los autores, J. Cruz, agradece el apoyo del Proyecto PAI 2006 de la UAEH.

Referencias

[1] F. Brock, V. Ferone and B. Kawohl. A Symmetry Problem in the Calculus of Variations. *Calc. Var*, 4:593–599, 1996.

[2] G. Butazzo and B. Kawohl. On Newton's Problem of Mininal Resistance. *The Mathematical Intelligencer*, 15(4):7–12, 1993.

[3] G. Butazzo, V. Ferone and B. Kawohl. Minimum Problems over Sets of Concave Functions and Related Questions. *Math Nachr*, 173 (1995):71–89.

[4] M. Ghyka. *The Geometry of Art and Life.* Dover, 1977.

[5] H. Goldstine. *A History of the Calculus of Variations.* Springer, 1980.

[6] H. Huntley. *The Divine Proportion.* Dover, 1970.

[7] I. Newton. *Philosophia Naturalis Principia Mathematica.* Dover, 1934.

[8] D. Pedoe. *La Geometría en el Arte.* Editorial Gustavo Gili, 1979.

[9] Y. Plakov. *Newton's problem of the body of minimum mean resistance.* Sbornik Mathematics, **195**:7 117-1037, 2004.

[10] V. M. Tihomirov. *Stories About Maxima and Minima.* AMS-MAA, 1990.

[11] http://www.nasm.si.edu/exhibitions/attm/a11.jo.cm.1.html.