Miscelánea Matemática **71** (2021) 31-40 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7104

La importancia de ser Banach

Antoni Wawrzyńczyk
Departamento de Matemáticas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
Ciudad de México
awaw@xanum.uam.mx

Introducción

Probar teoremas nuevos es seguramente la parte más fascinante e importante del trabajo de los matemáticos. Sin embargo, la búsqueda de las demostraciones más sencillas y de nuevos enfoques para las teorías clásicas es también muy útil. Además de su impacto en la didáctica nos permiten entender más profundamente los fenómenos estudiados y sus orígenes, lo que puede ayudar en los trabajos de investigación.

El teorema del mapeo abierto, el teorema de la gráfica cerrada y el teorema del acotamiento uniforme tienen el mismo origen. En sus respectivas demostraciones se utiliza el teorema de categoría de Baire cuyo papel fue fundamental para la aparición en los años 30 del siglo XX de una rama nueva del análisis matemático: el análisis funcional.

En realidad en aquellas demostraciones es suficiente aplicar un teorema muy sencillo, previo al teorema de Baire. Utilizando el mismo resultado se puede obtener un teorema, que en esta nota vamos a llamar Teorema Principal.

El Teorema Principal no habla directamente de operadores sino describe una propiedad estructural de espacios normados completos. Aplicándolo a operadores en los espacios de Banach obtenemos demostraciones de los tres teoremas antes mencionados de la teoría de operadores.

En sección 2 del artículo vamos a presentar el Teorema Principal sin demostración para mostrar inmediatamente como funciona para obtener con poco esfuerzo estos importantes resultados.

El lector que considere interesante este método encontrará la demostración del Teorema Principal en la tercera sección. Fácilmente reconocerá en esta demostración una construcción que inevitablemente forma parte de la demostración tradicional del teorema de la gráfica cerrada.

Palabras clave: teorema de mapeo abierto, teorema de la gráfica cerrada, teorema de acotamiento uniforme.

Agregamos en esta sección la demostración del «pequeño teorema de Baire», que es lo único de la gran y difícil teoría de categorías que es necesario para nuestro propósito.

En la última sección estudiamos un ejemplo de dos espacios de Banach definidos en el mismo espacio vectorial y observamos algunas rarezas de esta situación.

1. Teorema Principal y sus consecuencias

Para la comodidad del lector empezamos esta sección recordando las definiciones y propiedades básicas de espacios normados. Si este resumen resulta insuficiente, el lector puede consultar cualquier de los libros mencionados en las referencias [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

En la bibliografía, que no pretende ser completa, se encuentran algunos libros que tuvieron impacto especial en la historia del análisis funcional, así como algunas publicaciones más recientes y accesibles para el lector en castellano.

Una norma en un espacio vectorial real o complejo E es una función real no-negativa $E \ni x \mapsto \|x\|$ con las siguientes propiedades:

1. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cada x, $y \in E$.
2. $\|tx\| = |t|\|x\|$ para cada x y cada escalar t.
3. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Cuando una función no-negativa satisface únicamente las condiciones 1 y 2, la llamamos seminorma. Un espacio vectorial E provisto de una norma $\|\cdot\|$ se llama espacio normado. Cada espacio normado tiene su métrica natural dada por la fórmula $d(x,y) = \|x-y\|$. La norma es una función continua sobre el espacio métrico (E,d). Un espacio normado completo se llama espacio de Banach.

Teorema Principal. *Sea E un espacio vectorial real o complejo, Sean $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ normas en E tales que para todo $x \in E$*

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2.$$

Si ambos espacios $(E, \|\cdot\|_1)$ y $(E, \|\cdot\|_2)$ son de Banach, entonces existe $c > 0$ tal que

$$c\|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

para todo $x \in E$.

1.1 Teorema de isomorfismo

En su fundamental libro *Teorja operacyj* editado en el año 1931 en polaco, Stefan Banach introdujo el término «operador» al referirse a una aplicación lineal entre dos espacios normados. Un año más tarde salió la versión francesa del libro [1] y el término fue asimilado en el medio matemático.

Denotamos por $L(E,F)$ el espacio de operadores continuos entre los espacios normados E y F.

Un operador $A\colon E\to F$ es continuo si y solo si es continuo en un solo punto del dominio, por ejemplo en cero. Efectivamente, la convergencia $x_n\to x$ en E equivale a la convergencia $x_n-x\to 0$ y, suponiendo la continuidad en cero, obtenemos $Ax_n-Ax=A(x_n-x)\to 0$, es decir la continuidad de A en x.

Como primera aplicación del Teorema Principal presentamos el teorema de Banach de isomorfismo.

Teorema 1.1. *Sean E, F espacios de Banach y sea $A: E\to F$ un operador biyectivo. Entonces $A^{-1}: F\to E$ es continuo.*

Demostración. Es suficiente demostrar la continuidad del operador inverso en cero. Denotamos por $\|\cdot\|_E$ y $\|\cdot\|_F$ las normas en los espacios E y F, respectivamente. En el espacio F definimos otra norma:

$$\|x\| := \|x\|_F+\|A^{-1}x\|_E,$$

para $x\in F$.

Verificamos que el espacio F provisto de esta norma es también completo. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy con respecto a la norma nueva $\|\cdot\|$. Tenemos entonces

$$\forall\,\epsilon>0\;\exists\,N\;\forall\,n,\,m>N\quad \|x_n-x_m\|_F+\|A^{-1}x_n-A^{-1}x_m\|_E<\epsilon. \quad (1)$$

Se sigue claramente que las sucesiones (x_n) en F y $(A^{-1}x_n)$ en E son de Cauchy en los espacios correspondientes. Ambos espacios son completos, entonces existen sus límites: $x_n\to x$ y $A^{-1}x_n\to u$. Por la continuidad de A se sigue que $Au=x$. Pasando al límite $m\to\infty$ en (1) obtenemos

$$\forall\,\epsilon>0\;\exists\,N\;\forall\,n>N\quad \|x_n-x\|_F+\|A^{-1}x_n-A^{-1}x\|_E<\epsilon,$$

lo que significa que $x_n\to x$ en la norma $\|\cdot\|$. El espacio $(F,\|\cdot\|)$ es entonces completo. La desigualdad $\|x\|_F\le\|x\|$ es obvia. Por el Teorema Principal existe $c>0$ tal que

$$c\|A^{-1}x\|_E\le c(\|x\|_F+\|A^{-1}x\|_E)\le\|x\|_F.$$

Pero la desigualdad $\|A^{-1}x\|_E\le\frac{1}{c}\|x\|_F$ implica la continuidad de A^{-1} en cero. □

1.2 Teorema del mapeo abierto

Sea $(E,\|\cdot\|)$ un espacio normado. Para $x\in E$, $r>0$ se define la bola de radio r centrada en x como $B(x,r)=\{y\in E:\|x-y\|<r\}$. La bola

$B(x,r)$ es un conjunto abierto cuya cerradura coincide con el conjunto $\{y \in E : \|x-y\| \le r\}$ que vamos a denotar $\bar{B}(x,r)$.

Cuando $x=0$ escribimos $B(r) := B(0,r)$. De las propiedades básicas de la norma se sigue $B(tx) = |t|B(x)$ y $\bar{B}(tx) = |t|\bar{B}(x)$.

El teorema del mapeo abierto se deduce del teorema de isomorfismo utilizando la construcción de espacio cociente de un espacio de Banach. Recordemos la construcción del espacio cociente. Dado un subespacio vectorial cerrado V de un espacio normado E, introducimos el espacio cociente E/V cuyos elementos son los subconjuntos de E de forma $[x] := x + V$, donde x recorre E. La estructura vectorial de E/V se define en forma natural: $[x] + t[y] := [x+ty]$ para x, $y \in E$, $t \in \mathbb{K}$.

El espacio cociente se convierte en un espacio normado si definimos la norma del elemento $x+V$ como $\|\,[x]\,\|_c := \inf_{v\in V} \|x+v\|_E$. Si E es un espacio de Banach, el espacio cociente E/V es también completo, es decir, es de Banach. Para evitar confusiones denotamos por $B_c(r)$ la bola de radio r en el espacio cociente.

Directamente por la definición de la norma se demuestra que la bola $B_c(r)$ coincide con el conjunto $\{[x] : x \in B(r)\}$. Para cada sucesión $([u_n])$ convergente a cero en E/V existe una sucesión $x_n \to 0$ en E tal que $[u_n] = [x_n]$.

Dado un operador continuo $A \in L(E,F)$, tomando $V = \ker A = \{x \in E : Ax = 0\}$ podemos definir un operador $\tilde{A} \colon E/V \to F$ por la fórmula $\tilde{A}([x]) := Ax$. El operador $\tilde{A}$ es continuo e inyectivo. Obviamente $A(E) = \tilde{A}(E/V)$ y $A(B(r)) = \tilde{A}(B_c(r))$.

Teorema 1.2. *Sean E, F espacios de Banach y sea $A \in L(E,F)$ un operador suprayectivo. Entonces $A(B(r))$ es un conjunto abierto.*

Demostración. El operador $\tilde{A}$ definido en el espacio $E/\ker A$ es continuo y biyectivo. Por el teorema 1.1, $\tilde{A}$ es un isomorfismo, entonces transforma conjuntos abiertos en abiertos. En particular $A(B(r)) = \tilde{A}(B_c(r))$ es un conjunto abierto. □

1.3 Teorema de la gráfica cerrada

Se dice que un operador lineal $A \colon E \to F$ es cerrado si para cada sucesión convergente $E \ni x_n \to x$ tal que $Ax_n \to y$ se cumple $Ax = y$.

Esta condición equivale a la propiedad de que la gráfica del operador definida como $G(A) = \{(x, Ax) \in E \times F : x \in E\}$ es un conjunto cerrado en $E \times F$.

Teorema 1.3. *Sean E, F espacios de Banach y sea $A \colon E \to F$ un operador cerrado. Entonces A es continuo.*

Demostración. En el dominio E del operador definimos una segunda norma como

$$\|x\| := \|x\|_E + \|Ax\|_F.$$

Si (x_n) es una sucesión de Cauchy respecto a $\|\cdot\|$, se cumple

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N\ \forall\, n,\, m > N \quad \|x_n - x_m\|_E + \|Ax_n - Ax_m\|_F < \epsilon. \tag{2}$$

Las sucesiones (x_n) y (Ax_n) son entonces de Cauchy, por consiguiente convergen en los espacios correspondientes. Si $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$, se sigue $Ax = y$ porque el operador es cerrado. Nuevamente, tomando $m \to \infty$ en (2) obtenemos $x_n \to x$ respecto a la norma $\|\cdot\|$. El espacio $(E, \|\cdot\|)$ es también de Banach.

Ahora aplicamos el Teorema Principal que nos asegura la relación

$$c\|Ax\|_F \leq c(\|x\|_E + \|Ax\|_F) \leq \|x\|_E,$$

para alguna $c > 0$ y para todo $x \in E$. Por lo tanto, el operador A es continuo. □

1.4 Teorema del acotamiento uniforme

Teorema 1.4. *Sea E un espacio de Banach y sea F un espacio normado. Sea $\mathcal{U} \subseteq L(E, F)$ una familia de operadores tal que para todo $x \in E$ el conjunto de valores $\{Ax : A \in \mathcal{U}\}$ es acotado en F. Entonces existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$ y $A \in \mathcal{U}$*

$$\|Ax\|_F \leq M\|x\|_E.$$

Demostración. La suposición implica que para todo $x \in E$

$$p(x) := \sup_{A \in \mathcal{U}} \|Ax\|_F < \infty.$$

La función p es obviamente una seminorma. En el espacio E definimos una nueva norma:

$$\|x\| := \|x\|_E + p(x).$$

Probaremos que el espacio $(E, \|\cdot\|)$ es también de Banach.

Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en $(E, \|\cdot\|)$. Se cumple entonces lo siguiente

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall\, m, n > N \quad \|x_n - x_m\|_E + p(x_n - x_m) < \epsilon.$$

De aquí obtenemos que la sucesión (x_n) es de Cauchy con respecto a la norma original y converge a algún $x \in E$. Además para n, m suficientemente grandes $\|Ax_n - Ax_m\|_F < \epsilon$ para todo $A \in \mathcal{U}$. Los operadores $A \in \mathcal{U}$ son continuos, entonces $\|Ax_n - Ax\|_F \to 0$ y, entonces, para todo $x \in E$ se cumple que $\sup_{A\in\mathcal{U}} \|Ax_n - Ax\|_F \leq \epsilon$. Finalmente llegamos a la desigualdad

$$\|Ax_n - Ax\|_F \leq \|x_n - x\|_E + \sup_{A \in \mathcal{U}} \|Ax_n - Ax\|_F \leq 2\epsilon$$

para $n > N$. La sucesión (x_n) converge a x en el espacio $(E, \|\cdot\|)$ y por lo tanto el espacio $(E, \|\cdot\|)$ es completo.

Ambos espacios $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(E, \|\cdot\|)$ son completos y tomando en cuenta que $\|\cdot\|_E \leq \|\cdot\|$ podemos aplicar el Teorema Principal: para cierto $c > 0$ y para todos $x \in E$ se cumple

$$c \sup_{A\in\mathcal{U}} \|Ax\|_F \leq c(\|x\|_E + \sup_{A\in\mathcal{U}} \|Ax\|_F) \leq \|x\|_E.$$

Fijando $M = \frac{1}{c}$ se obtiene el enunciado deseado. $\square$

2. Demostración del Teorema Principal

En la demostración del Teorema Principal se combinan las propiedades de los espacios métricos completos con las propiedades algebraicas de espacios vectoriales. Recordemos algunos conceptos relacionados con esta estructura.

Sea E un espacio vectorial real o complejo. Un conjunto $C \subseteq E$ es *convexo* si para todo x y $y \in C$ el segmento lineal que une x con y, es decir el conjunto $I = \{tx+(1-t)y : 0 \leq t \leq 1\}$, pertenece a C. Decimos que C es *balanceado*, si para todo $x \in C$ y $|t| \leq 1$ se cumple $tx \in C$. Un conjunto $U \subseteq E$ es *absorbente* si los conjuntos $nU := \{nx : x \in U\}$, $n \in \mathbb{N}$ cubren al espacio E.

Obsérvese que, para cada norma $\|\cdot\|$ en el espacio vectorial E, las bolas $B(x,r)$ son convexas, mientras que las bolas centradas en cero son además balanceadas y absorbentes.

Proposición 2.1. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subseteq E$ un conjunto convexo y balanceado. Si $B(x,r) \subseteq C$ entonces $B(0,r) \subseteq C$.*

Demostración. Sea $y \in B(0,r)$. Como $\|y\| < r$ se cumple entonces que $x \pm y \in B(x,r) \subseteq C$. De aquí se sigue que $-x \mp y \in C$ porque el conjunto C es balanceado. Entonces tenemos que $y = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(-x+y) \in C$ por la convexidad de C. Esto demuestra que, efectivamente $B(0,r) \subseteq C$. $\square$

La propiedad de los espacios completos que necesitamos para la demostración del Teorema Principal es una versión simplificada del teorema de Baire.

Teorema 2.1. *Sea X un espacio métrico completo. Sea $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos abiertos y densos en X. Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ no es vacío.*

Demostración. Dentro del conjunto O_1 existe una bola $B(x_1, 2r_1)$, así que también $\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq O_1$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $r_1 < \frac{1}{2}$.

El conjunto $O_2 \cap B(x_1, r)$ es abierto, no vacío y contiene una bola $B(x_2, 2r_2)$. Entonces tenemos que $\overline{B(x_2, r_2)} \subseteq O_1 \cap O_2$. De nuevo, podemos suponer que $r_2 < \frac{1}{2^2}$.

Así, inductivamente vamos a obtener una sucesión descendiente de bolas cerradas $\overline{B(x_k, r_k)} \subseteq \bigcap_{j=1}^{k} O_j$ cuyos radios r_k tienden a cero. La sucesión de sus centros (x_k) es una sucesión de Cauchy, entonces es convergente a cierto x que pertenece a $\bigcap_{j=1}^{\infty} O_j$. □

Teorema Principal. *Sea E un espacio vectorial real o complejo. Sean $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ normas en E tales que para todo $x \in E$*

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2.$$

Si ambos espacios $(E, \|\cdot\|_1)$ y $(E, \|\cdot\|_2)$ son de Banach, entonces existe $c > 0$ tal que para todo $x \in E$

$$c\|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Demostración. Como en el espacio E tenemos dos normas necesitamos una notación que nos permita distinguir las bolas, los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados con respecto a las normas correspondientes. Denotamos a los espacios de Banach como

$$E_1 = (E, \|\cdot\|_1) \quad \text{y} \quad E_2 = (E, \|\cdot\|_2).$$

Además, definimos $B_i(x, r)$ como $B_i(x, r) := \{y \in E : \|x - y\|_i < r\}$, para $i = 1, 2$. Cuando $x = 0$ simplificamos poniendo $B_i(r) = B_i(0, r)$, $i = 1, 2$. Para $A \subseteq E$ denotamos por $\overline{A}^i$ la cerradura de A con respecto a la norma $\|\cdot\|_i$, para $i = 1, 2$.

La suposición $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ implica que $B_2(r) \subseteq B_1(r)$ para todo $x \in E$ y $r > 0$, mientras que el enunciado del teorema equivale a decir que existe $c > 0$ tal que $B_1(r) \subseteq \frac{1}{c} B_2(r)$.

Gracias a la propiedad $|t|B(r) = B(|t|r)$, la cual es válida para todas las normas, es suficiente probar que $B_1(1) \subseteq \frac{1}{c} B_2(1) = B_2(\frac{1}{c})$ para algún $c > 0$.

Vamos a aplicar ahora el teorema de Baire en el espacio completo E_1. Sea U_n el complemento de $\overline{B_2(n)}^1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto U_n es abierto en E_1. Si todos los conjuntos U_n fueran densos en E_1, por el teorema 2.1 tendríamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$. Sin embargo, claramente $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \emptyset$.

Por lo tanto, resulta que al menos uno de los conjuntos U_n no es denso en E_1, es decir el interior de uno de los conjuntos $\overline{B_2(n)}^1$ no es vacío. Por lo tanto, existen $N \in \mathbb{N}$ y $r > 0$ tales que para algún $x \in \overline{B_2(N)}^1$ se cumple que $B_1(x, r) \subseteq \overline{B_2(N)}^1$. El conjunto $\overline{B_2(N)}^1$ es convexo y por la proposición 2.1 se sigue

$$B_1(r) \subseteq \overline{B_2(N)}^1.$$

Utilizando una vez más la igualdad $|t|B(r) = B(|t|r)$ y denotando $R = \frac{N}{r}$ obtenemos que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$B_1\left(\frac{1}{2^n}\right) \subseteq \overline{B_2\left(\frac{R}{2^n}\right)}^1.$$

Por lo tanto, en cada vecindad (respecto a la norma $\|\cdot\|_1$) de cada elemento de la bola $B_1(\frac{1}{2^n})$ se encuentra algún elemento de la bola $B_2(\frac{R}{2^n})$. Concluimos que:

$$\forall\, v \in B_1\left(\frac{1}{2^n}\right),\ \epsilon > 0 \quad \exists\, y \in B_2\left(\frac{R}{2^n}\right) \quad \|v - y\|_1 < \epsilon. \tag{3}$$

Fijamos $x \in B_1(1)$ y empezamos la construcción por inducción. Para $n = 0$ y $\epsilon = \frac{1}{2}$ según (3) existe y_0 tal que $\|y_0\|_2 < R$ y $\|x - y_0\|_1 < \frac{1}{2}$. Aplicamos ahora (3) al vector $v = x - y_0 \in B_1(\frac{1}{2})$. Para $n = 1$ y $\epsilon = \frac{1}{2^2}$ existe y_1 tal que $\|y_1\|_2 < \frac{R}{2}$ y $\|x - y_0 - y_1\|_1 < \frac{1}{2^2}$. Continuando así, después de k pasos obtenemos y_k tal que

$$\|y_k\|_2 < \frac{R}{2^k} \quad \text{y} \quad \|x - (y_0 + y_1 + \cdots + y_k)\|_1 < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

La sucesión $u_k = \sum_{j=0}^{k} y_j$ converge a x en el espacio E_1. Pero notemos que en el espacio E_2 la misma sucesión es de Cauchy porque

$$\|u_{k+i} - u_k\|_2 \leq \textstyle\sum_{j=1}^{i} \|y_{k+i}\|_2 \leq \sum_{j=1}^{i} \frac{R}{2^{k+i}} < \frac{R}{2^k}.$$

Por lo tanto, la sucesión (u_k) es convergente también en el espacio de Banach E_2 a un elemento u que satisface

$$\|u\|_2 \leq \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \|y_j\|_2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R}{j} < 3R.$$

Ahora usaremos por fin la suposición de que la norma $\|\cdot\|_2$ es mayor que la norma $\|\cdot\|_1$; como $\|u - u_k\|_2 \to 0$, tenemos que $\|u - u_k\|_1 \to 0$ y en consecuencia $x = u$.

Acabamos a probar que cada elemento $x \in B_1(1)$ pertenece a $B_2(3R)$. Por lo tanto, con $c = \frac{1}{3R}$ se cumple $c\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. $\square$

3. Estructuras de Banach distintas en el mismo espacio

Con el Teorema Principal ya demostrado es muy natural preguntarse si dos estructuras de Banach diferentes pueden existir en el mismo espacio vectorial. La mejor respuesta es una construcción.

Ejemplo 3.1. *Consideramos los espacios l^1 y l^2 de sucesiones reales para las cuales las normas correspondientes*

$$\|(a_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{y} \quad \|(b_n)\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

están bien definidas.

Los vectores $e_j = (\delta_{jn})$, donde $\delta_{jn} = \begin{cases} 1, & j = n \\ 0, & j \neq n \end{cases}$, pertenecen a ambos espacios y tienen la misma norma, 1, en ambos espacios. Además, las combinaciones lineales $\sum_{j=1}^{k} t_j e_j$ forman conjuntos densos en l^1 y en l^2.

Observemos que los espacios l^1 y l^2 son isomorfos como espacios vectoriales y sus bases tienen la cardinalidad del continuo $\mathfrak{c}$, pues las sucesiones de la forma $\left(\frac{1}{n^t}\right)$, $t > 1$ son linealmente independientes y pertenecen a ambos espacios. La cardinalidad de las bases l^1 y l^2 es entonces al menos $\mathfrak{c}$. Por otro lado esta cardinalidad no puede ser mayor que $\mathfrak{c}$ porque el espacio de todas las sucesiones reales tiene la cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Con el fin de construir un isomorfismo de propiedades convenientes vamos a escoger en los espacios l^1 y l^2 unas bases especiales.

Cada sistema linealmente independiente en un espacio vectorial puede complementarse para obtener una base. El conjunto de vectores $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es linealmente independiente y pertenece a $l^1 \cap l^2$ entonces es posible encontrar bases $\mathcal{B}_1 \subseteq l^1$ y $\mathcal{B}_2 \subseteq l^2$ de la forma

$$\mathcal{B}_1 = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}} \cup B_1 \quad y \quad \mathcal{B}_2 = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}} \cup B_2$$

en l^1 y l^2, respectivamente, para luego construir una biyección $\Phi\colon \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ tal que $\Phi(e_j) = e_j$, para $j \in \mathbb{N}$.

Para una combinación lineal finita $\sum_\alpha t_\alpha b_\alpha$, con $b_\alpha \in \mathcal{B}_1$ definimos

$$A_\Phi(\sum_\alpha t_\alpha b_\alpha) = \sum_\alpha t_\alpha \Phi(b_\alpha)$$

lo cual nos da un isomorfismo lineal entre l^1 y l^2.

En el espacio l^1 introducimos una norma nueva:

$$\|(t_n)\|_\Phi := \|A_\Phi((t_n))\|_2.$$

El espacio $(l^1, \|\cdot\|_\Phi)$ es de Banach, porque l^2 lo es.

La sucesión $(c_n)_k = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, 0, 0, \dots)$ satisface que $A_\Phi((c_n)_k) = (c_n)_k$, y entonces converge en la norma $\|\cdot\|_\Phi$ (que es igual, en este caso, a la norma de l^2). Pero la sucesión no converge en el espacio $(l^1, \|\cdot\|_1)$. Es decir, no existen constantes A y $B > 0$ para los cuales se tenga

$$A\|(c_n)_k\|_\Phi \leq \|(c_n)_k\|_1 \leq B\|(c_n)_k\|_\Phi$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. *Por lo tanto, las normas* $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_\Phi$ *no son equivalentes.*

Observemos ciertas curiosidades relacionadas con la norma $\|\cdot\|_\Phi$ que introdujimos en el ejemplo.

En el espacio $(l^1, \|\cdot\|_1)$ tenemos una familia de funcionales lineales $\varphi_k((t_n)) := t_k$ que obviamente son continuos. Sin embargo no todos ellos pueden ser continuos en la norma $\|\cdot\|_\Phi$. Demostremos esto.

Sea I el operador identidad entre $(l^1, \|\cdot\|_1)$ y $(l^1, \|\cdot\|_\Phi)$. Observemos que si los funcionales φ_k fueran continuos para todo $k \in \mathbb{N}$ el operador I sería cerrado. Para probar esto supongamos que una sucesión $x_n \in l^1$ converge en la norma $\|\cdot\|_1$ al elemento $u = (u_k)$ y al mismo tiempo $I(x_n) = (x_n)$ converge en $(l^1, \|\cdot\|_\Phi)$ al elemento $y = (y_k)$. Si los funcionales φ_k fueran continuos con respecto a ambas normas, obtendríamos que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene $\varphi_k(x_n) \to \varphi_k(x) = x_k$ y $\varphi_k(x_n) \to \varphi_k(y) = y_k$; entonces $u_k = y_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$ es decir $u = y$ y el operador I es cerrado. Por el teorema de la gráfica cerrada el operador es continuo. Pero el teorema del isomorfismo de Banach implica que el inverso es también continuo. Es decir, obtenemos que los espacios $(l^1, \|\cdot\|_1)$ y $(l^1, \|\cdot\|_\Phi)$ son isomorfos, lo cual contradice el ejemplo de arriba.

Concluimos que al menos para algún k_0 el funcional que asocia a la sucesión (t_k) su coordenada t_{k_0} es discontinuo en la norma $\|\cdot\|_\Phi$.

Si el funcional φ_{k_0} es discontinuo, su kernel $\{x \in l^1 : \varphi_{k_0}(x) = 0\}$ es denso en el espacio. Entonces cada elemento de l^1 puede ser aproximado en norma $\|\cdot\|_\Phi$ por elementos con la coordenada k_0 nula. ¿Acaso no es esto sorprendente?

Bibliografía

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografje Matematyczne, Warszawa, 1932.
[2] H. Brézis, *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*, Alianza Ed., 1964.
[3] N. Dunford y J. Schwartz, *Linear operators, I, II*, Interscience, 1958.
[4] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, J. Wiley, 1978.
[5] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Mc Graw-Hill, 1974.
[6] A. Wawrzyńczyk, *Introducción al análisis funcional*, UAM, 1992.
[7] K. Yosida, *Functional analysis*, Springer Verlag, 1965.