Miscelánea Matemática **62** (2016) 1-15 SMM

Curvas algebraicas y la pregunta de Halphen

César Lozano Huerta
Instituto de Matemáticas, UNAM
Oaxaca de Juárez, Oaxaca. México
Department of Mathematics
Harvard University. Cambridge, MA. USA
lozano@math.harvard.edu

Introducción

Jakob Steiner fue un matemático suizo del siglo XIX, que en vida se propuso compilar y modernizar la geometría sintética, conocida desde el tiempo de los griegos del siglo IV a. de C. A su muerte, su testamento dotaba de ocho mil táleros[1] de forma bianual al autor del mejor trabajo en geometría abordado sintéticamente; es decir, sin el uso de coordenadas. De este modo nació el Premio Steiner que otorgaba la Universidad de Berlín. En 1882 este premio se dividió entre Max Noether y Henri Halphen por su investigación sobre curvas algebraicas. Halphen, en un tratado de doscientas páginas [8], aborda el problema sobre la existencia de curvas en el espacio proyectivo de dimensión 3, mismo que tiene continuidad hasta nuestros días y que nos servirá de guía para presentar las ideas del presente artículo. Enunciaremos la pregunta central de [8], que llamaremos pregunta de Halphen, luego explicaremos la terminología y la geometría del problema. La pregunta, escrita en un lenguaje moderno, dice:

¿Qué pares de números (d, g) ocurren como el grado y género de una curva algebraica suave en el espacio proyectivo de dimensión 3?

Para apreciar la geometría detrás de esta pregunta, necesitamos precisar, qué es una curva algebraica y qué son el grado y el género. Primero, contestaremos estas tres cuestiones con cierta generalidad, y así responderemos burdamente la pregunta de Halphen. Al momento de

[1] Ocho años después de su muerte el tálero se remplazó por el marco alemán a una tasa de cambio de 1 tálero = 3 marcos alemanes. Ocho mil táleros actualmente serían seis mil dólares norteamericanos apróximadamente.

la publicación de [8], no existía el concepto de curva algebraica abstracta. Los geómetras estudiaban las curvas algebraicas encajadas en un espacio proyectivo, y buscaban clasificarlas; de ahí la relevancia de la pregunta central de [8]. Al intentar clasificar las curvas encajadas, el género es un invariante intrínseco, es decir, no depende del encaje y por ende es importante saber calcularlo en ejemplos concretos. En este escrito calcularemos explícitamente el género de curvas en el plano proyectivo y en ejemplos particulares de curvas en el espacio proyectivo.

Pese a que la pregunta de Halphen se planteó, al menos, hace ciento treinta años, la abordaremos con el lenguaje y punto de vista de la teoría de esquemas. No definiremos formalmente lo que es un esquema, pero uno de los objetivos de este texto es ilustrar un aspecto central de dicha teoría en el caso de curvas, el cual es: estudiar la geometría de una curva o de una familia de ellas, examinando objetos puramente algebraicos. Por tanto, asumiremos que el lector está familiarizado con los conceptos de anillo de polinomios y sus ideales.

1. Para fijar ideas

El álgebra lineal se ocupa de estudiar las características del conjunto solución de una colección de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_0 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Aquí, los coeficientes a_{ij} pertenecen a un campo $\mathbb{K}$, y el conjunto solución es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$.

La geometría algebraica se ocupa del caso general: las características del conjunto solución de una colección de ecuaciones como

$$\begin{aligned} f_1(x_0, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_m(x_0, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde cada f_r es un polinomio de n variables de grado arbitrario con coeficientes en el campo $\mathbb{K}$. A dicho conjunto solución lo llamaremos conjunto algebraico y lo denotaremos por $V(f_1, \dots, f_m)$.

A diferencia del caso donde los polinomios tienen grado 1, el conjunto solución de las ecuaciones en (1) no es un espacio vectorial, y además es sensible a las características algebraicas del campo $\mathbb{K}$ al que pertenecen los coeficientes. Por simplicidad, trabajaremos con el campo de los números complejos $\mathbb{C}$. No obstante, dado que $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 2, usar números complejos implica considerar espacios de dimensión real 2, 4 y mayores.

Al estudiar las soluciones de ecuaciones como las que aparecen en (1), las preguntas fundamentales que surgen son: ¿qué tipo de conjunto forman las soluciones?, ¿es un conjunto finito?, si este no es finito ¿es un conjunto continuo?, ¿de qué dimensión? Nos enfocaremos en entender el conjunto solución de una colección de ecuaciones del tipo (1) cuando este tenga dimensión 1 sobre los complejos; conjunto al que podríamos llamar curva. ¡Cuidado!, no hemos dicho aún qué es la dimensión de un conjunto solución; lo diremos más adelante usando la función de Hilbert. De momento, algo más fundamental es comentar dónde habita el conjunto solución $V(f_1, \ldots, f_m)$. Dado que nos interesa aprovechar las herramientas de la geometría proyectiva, estudiaremos el caso cuando dicho conjunto es un subconjunto del espacio proyectivo de dimensión n, el cual denotamos por $\mathbb{P}^n$. Abundaremos sobre este espacio más adelante y veremos que trabajar con él implica que sólo estudiaremos conjuntos algebraicos $V(f_1, \ldots, f_m)$, donde los polinomios f_r son homogéneos[2].

Resumiendo, estudiaremos el conjunto

$$V(f_1, \ldots, f_m) \subset \mathbb{P}^n,$$

cuando este tiene dimensión 1, y cada $f_r \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ es un polinomio homogéneo. La ventaja de estudiar curvas contenidas en $\mathbb{P}^n$ es que las podemos caracterizar de manera burda, usando sólo dos números enteros: el grado y el género.

2. Curvas en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$

Como primer ejemplo concreto estudiaremos curvas planas. Textos introductorios sobre el tema son [12, 15]. En esta sección, calcularemos explícitamente su género y una versión de espacio tangente. Estas curvas se llaman planas porque están contenidas en el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2$, el cual tiene dimensión 2 sobre los complejos, pero ¡dimensión 4 sobre los reales! Este espacio posee coordenadas globales $[x : y : z]$ que están sujetas a la condición $[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z]$ para todo número complejo $\lambda \neq 0$ y $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Por ejemplo, $[1 : 2 : 3]$ y $[2 : 4 : 6]$ son coordenadas del mismo punto en $\mathbb{P}^2$. Específicamente, denotando $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, se define

$$\mathbb{P}^2 := \{[x : y : z] \mid (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \text{ y } \lambda \in \mathbb{C}^*\}.$$

[2]Por definición, f es homogéneo de grado d si $f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

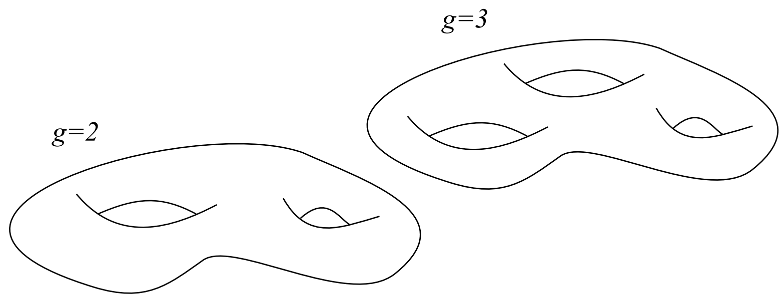

Figura 1. Curvas suaves de género 2 y 3.

Una curva plana está definida por una ecuación en las coordenadas de $\mathbb{P}^2$. Es decir, sea $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ un polinomio de tres variables con coeficientes complejos, homogéneo de grado d. Definimos una *curva algebraica plana* C como

$$C = \{[x : y : z] \ \in \mathbb{P}^2 \mid f(x, y, z) = 0\}.$$

El grado de la curva C se define como el grado del polinomio f. Escribimos $C = V(f)$ cuando deseamos hacer referencia explícita al polinomio que define la curva. Observar que la propiedad $[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z]$ para todo número complejo $\lambda \neq 0$, hace que solo tenga sentido hablar de un conjunto algebraico $V(f)$ cuando f es homogéneo.

El concepto de suavidad es fácil de imaginar, y para curvas planas sencillo de definir. Una curva plana $C = V(f)$ es suave en un punto $p \in C$ si la *recta tangente* a C en $p = [p_1 : p_2 : p_3]$, denotada como T_pC, está bien definida. Esta última se define como:

$$\frac{df}{dx}(p)(x - p_1) + \frac{df}{dy}(p)(y - p_2) + \frac{df}{dz}(p)(z - p_3) = 0.$$

Antes de definir formalmente el género, haremos un comentario sobre lo que representa geométricamente. Las curvas planas suaves, y de hecho todas las curvas suaves en $\mathbb{P}^n$, son compactas, conexas, de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$.[3] Por lo tanto, topológicamente, sólo tienen un invariante: el género. El género de una curva C es un número difícil de definir, pero muy fácil de imaginar. La figura 1 muestra dos curvas de género 2 y 3.

La figura 1 deja clara la idea de lo que significa (topológicamente) una curva suave de género 2 y 3 —salvavidas para 2 y 3 personas, respectivamente—. De esta idea intuitiva, podemos concluir que el género de una curva suave tiene que ser al menos 0; como la esfera, la cual es, en efecto, la curva de menor género.

[3]Por esto en geometría compleja a las curvas algebraicas suaves se les llama superficies de Riemann.

Lo que sigue es la parte técnica, pues definiremos formalmente el género de una curva plana. El lector notará que este número, el cual posee información geométrica, se definirá usando propiedades de los polinomios. Sea $f \in R = \mathbb{C}[x, y, z]$ un polinomio de tres variables homogéneo de grado d. Consideremos el anillo cociente $R/\langle f \rangle$, donde $\langle f \rangle$ denota el ideal generado por f. Observemos que los elementos del anillo R, al igual que los del anillo cociente $R/\langle f \rangle$, los podemos distinguir por su grado. La función que contabiliza los elementos que hay en cada grado tiene nombre propio: función de Hilbert. Por ejemplo, en el anillo R hay tres monomios de grado 1, $R_1 = (x, y, z)$, y dado que todos los polinomios de grado 1 son combinaciones lineales en x, y y z, entonces la función de Hilbert toma el valor $H_R(1) = \dim_{\mathbb{C}} R_1 = 3$. Similarmente en grado 2, el anillo R contiene seis monomios $R_2 = (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz)$ y todos los demás son combinaciones lineales de estos, luego $H_R(2) = 6$. En general, $H_R(m)$ es igual al número de monomios en grado m en R, que en este caso es $H_R(m) = \dim_{\mathbb{C}} R_m = \frac{1}{2}(m+2)(m+1)$. Si volvemos a contar, ahora para el cociente $R/\langle f \rangle$, la función que nos dice la dimensión de cada componente homogénea de grado m del anillo cociente es:

$$H_C(m) := \dim_{\mathbb{C}}(R/\langle f \rangle)_m. \tag{2}$$

A la función $H_C(m)$ le llamaremos la función de Hilbert de la curva $C = V(f) \subset \mathbb{P}^2$.

Conocer el comportamiento de $H_C(m)$ es un objetivo central de este artículo y un resultado debido a David Hilbert lo estima: existe un polinomio $P_C(m)$, que toma los valores de $H_C(m)$ para valores grandes de m [10, p. 51]. Es decir, la función $H_C(m)$ se comporta asintóticamente como un polinomio; el cual se sigue que es único. Dicho polinomio tiene información geométrica de la curva C; como lo vemos a continuación.

Sea $P_C(m)$ el polinomio asociado a la función de Hilbert $H_C(m)$ de la curva $C = V(f) \subset \mathbb{P}^2$, descrito en el párrafo anterior. Definimos el *género* de C como $g(C) := 1 - P_C(0)$. Un poco más adelante calcularemos $P_C(m)$ explicitamente. ¡Ojo! pese a que $H_C(m) = P_C(m)$ para valores grandes de m y por tanto son valores positivos, el valor de $P_C(0)$ podría ser negativo; de hecho es negativo en la mayoría de los casos cuando C es suave.

No es obvio que la noción de género que expresa la figura 1 y el número que acabamos de definir coinciden cuando la curva es suave. El lector puede (y debe) consultar [13, p. 131] para una prueba geométrica de este hecho. Es tan poco obvio que el autor de esta última referencia, David Mumford, comenta que la igualdad de estos dos números es una consecuencia del Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch. Con este comentario, Mumford enfatiza que la igualdad entre los géneros yace en la intersección de tres ramas de las matemáticas: geometría, análisis y topología. Dado que en este artículo deseamos enfatizar las ideas alrededor de la pregunta de Halphen no abordaremos la prueba de este hecho en esta ocasión.

Una de las ventajas de la definición $g(C) = 1 - P_C(0)$ es que no depende del campo $\mathbb{C}$, ni de la suavidad de C. Sólo depende de H_C, la función de Hilbert, la cual calculamos a continuación en el caso de curvas planas.

Hemos calculado antes la función $H_R(m)$, con $R = \mathbb{C}[x, y, z]$, y de manera similar podemos calcular la función $H_f(m)$. Esta última es la función que contabiliza la dimensión del espacio de polinomios de grado m en el ideal $\langle f\rangle$. Por definición, el ideal $\langle f\rangle$ se compone de todos los múltiplos de f y por tanto, un elemento de grado $d+1$ en $\langle f\rangle$ es simplemente lf, donde l es un polinomio lineal. Por lo tanto, la dimensión de la componente de grado $m \geq d+1$ en $\langle f\rangle$ es igual al número de monomios de grado $m-d$. Por única vez, usaremos la sucesión de R-módulos

$$0 \to \langle f\rangle \xrightarrow{f} R \to R/\langle f\rangle \to 0,$$

pues esta implica que $H_R = H_f + H_C$ y por tanto, para $m \geq d+1$, obtenemos :

$$\begin{aligned} H_C(m) =& \{\text{monomios de grado } m \text{ en } R\} \\ & - \{\text{polinomios de grado } m \text{ en el ideal } \langle f\rangle\} \\ =& \binom{2+m}{2} - \binom{2+m-d}{2}. \end{aligned}$$

Observando este cálculo inmediatamente nos damos cuenta de que $H_C(m)$ es un polinomio si $m \geq d+1$. Es decir, este cálculo nos ha dado $P_C(m)$. Concluimos que el género g de una curva plana C de grado d es:

$$g = 1 - P_C(0) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}. \tag{3}$$

De (3) se sigue: ¡no existen curvas planas (suaves o no) de género 2! Más aún, si fijamos el grado de la curva, entonces su género está determinado. No hay misterio sobre los pares (d, g) que ocurren como el grado y género de las curvas planas. Esto contesta satisfactoriamente la pregunta de Halphen en el plano.

3. Curvas en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$

En esta sección abordaremos la pregunta de Halphen para curvas contenidas en $\mathbb{P}^3$. El espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$ tiene coordenadas globales $[x : y : z : w]$ y a diferencia de $\mathbb{P}^2$, todas las curvas algebraicas suaves se pueden encajar en él [10, p. 310]. En términos más precisos, $\mathbb{P}^3$ se define como

$$\mathbb{P}^3 := \{[x : y : z : w] \mid (x, y, z, w) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda w) \text{ y } \lambda \in \mathbb{C}^*\}.$$

Este espacio de dimensión 3 sobre los complejos, ¡tiene dimensión 6 sobre los reales! En $\mathbb{P}^3$ una curva está definida al menos por dos ecuaciones y por tanto no podemos definir el grado como lo hicimos para curvas planas. Además, dos curvas del mismo grado pueden tener géneros distintos (adelante citaremos un ejemplo), y por ende en $\mathbb{P}^3$ no existe una ecuación como (3). La generalización de estos invariantes yace en la función de Hilbert.

En este momento nos enfrentamos a las preguntas: ¿qué es una curva en $\mathbb{P}^3$? y ¿cómo definimos su grado y género? Responderemos ambas de un solo brochazo con la ayuda de la función de Hilbert; lo que significa contestaremos examinando un objeto algebraico.

Lo que sigue es técnico pues definiremos qué es una curva algebraica en $\mathbb{P}^3$. Nos auxiliaremos de la función de Hilbert generalizando la definión (2). Dados varios polinomios homogéneos (ecuaciones) de grados arbitrarios en cuatro variables, $\{f_1, \ldots, f_k\}$, consideramos el ideal que generan $\langle f_1, \ldots, f_k\rangle \subset R = \mathbb{C}[x, y, z, w]$ y definimos la función de Hilbert de $V(f_1, \ldots, f_k)$ como:

$$H(m) := \dim_{\mathbb{C}} \left(R/\langle f_1, \ldots, f_k\rangle\right)_m .$$

Hemos dicho ya en la sección anterior que conocer el comportamiento de $H_C(m)$ es un objetivo central de este artículo, y que dicho comportamiento lo estima un resultado de David Hilbert [10, p. 51]: existe un polinomio $P(m) \in \mathbb{Q}[m]$, tal que $P(m) = H(m)$ para valores grandes de m. En la literatura, a este polinomio se le llama polinomio de Hilbert y sus coeficientes y grado tienen información geométrica importante del conjunto algebraico $V(f_1, \ldots, f_k)$ como lo indica el siguiente párrafo.

Diremos que el conjunto algebraico

$$V(f_1, \ldots, f_k) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{P}^3 |\ f_1(\boldsymbol{p}) = 0, \ldots, f_k(\boldsymbol{p}) = 0\}$$

define una curva $C \subset \mathbb{P}^3$, si su polinomio de Hilbert es de la forma $P_C(m) = Am + B$, con $A, B \in \mathbb{Z}$, y además es conexo. El grado de C se define como el número A y su *género* como $g(C) := 1 - B$. Por lo tanto, el polinomio de Hilbert de una curva C de grado d y género g se escribe como

$$P_C(m) = dm - g + 1. \tag{4}$$

El lector debe advertir que el grado de $P_C(m)$ nos dice qué tan rápido crece la función $H_C(m)$ conforme m crece y que estamos definiendo la dimensión de C como este número. El grado del polinomio de Hilbert de un conjunto algebraico (es decir, cómo se comporta asintóticamente

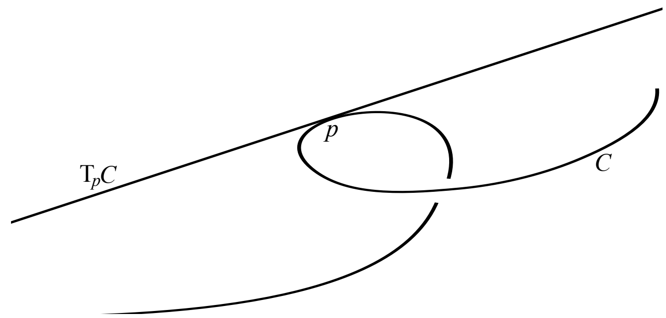

Figura 2. Recta tangente T_pC a la curva C en p.

la función de Hilbert) define su dimensión en un contexto más general [10, p. 51].

No definiremos suavidad de una curva en $\mathbb{P}^3$, sin embargo este concepto formaliza la siguiente idea: una curva C es suave en $p \in C$ si la recta tangente a C en p, denotada como T_pC, está bien definida y tiene dimensión compleja 1 [13, p. 6], ver figura 2. La curva C se dice suave si es suave para todo $p \in C$.

El lector puede también notar que en el caso $C \subset \mathbb{P}^2$, la función de Hilbert $H_C(m)$ y polinomio de Hilbert $P_C(m)$ coinciden para todos los valores de $m \geq d+1$. En general, $H_C(m) \neq P_C(m)$ para valores pequeños de m. En el caso $C \subset \mathbb{P}^3$, analizando la diferencia entre $H_C(m)$ y $P_C(m)$ para todos los valores de m se obtendrá una cota para el género de C, escrita en (7), llamada *cota de Castelnuovo*. Esto no resolverá la pregunta de Halphen, pero será un avance significativo hacia su solución como veremos en la siguiente sección.

¿Cómo se comporta el conjunto $V(f_1, \ldots, f_k)$ si omitimos la condición de suavidad? Veamos un ejemplo, el conjunto $C_0 = V(y^2 - zx, yw - z^2)$ tiene polinomio de Hilbert $P(m) = 4m$, lo cual implica que es un conjunto algebraico de dimensión 1, cuyo género es 1. Esta curva C_0 contiene el punto $p = [1 : 0 : 0 : 0]$ el cual no es suave: la recta tangente a C_0 en p no esta bien definida pues existen dos curvas suaves, L y C, contenidas en C_0 que pasan por p. Más aún, estas dos curvas forman el conjunto C_0. Por lo tanto, imponer la propiedad de suavidad a $V(f_1, \ldots, f_k)$ evita que trabajemos con conjuntos como el anterior, que constan de varias piezas suaves. Abundaremos sobre el punto singular p y las curvas C_0, C y L, dos párrafos adelante.

Hemos definido el género independientemente de la suavidad de $V(f_1, \ldots, f_k)$, y del campo $\mathbb{C}$. Esta definición además hace que el género (de hecho, el polinomio de Hilbert) sea constante en familias de curvas «bien portadas» [10, p. 261]. Este último adjetivo entrecomillado se formaliza en el concepto de *familia plana*, del cual no hablaremos aquí, pero que es importante en el estudio avanzado de curvas algebraicas [9].

Veamos tres ejemplos. Sea t un parámetro en el disco unitario $t \in \Delta = \{t \in \mathbb{C} : \ |t| \leq 1\}$.

$$\begin{aligned} E &= V(w, zy^2 - x^3 + xz^2 + z^3), && P_E(m) = 3m + 0 \\ C &= V(y^2 - zx, yw - z^2, yz - xw), && P_C(m) = 3m + 1 \\ C_t &= V(y^2 - zx, yw - z^2 + tx^2), && P_{C_t}(m) = 4m + 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Los polinomios de Hilbert listados aquí nos dicen que E tiene grado 3 y género 1, mientras C tiene grado 3 y género 0. Por otro lado, para todo t, el conjunto C_t tiene género 1. Si $t = 0$, es claro que $C \subset C_0$. Más aún, la curva C junto con la línea $L = V(y, z)$ forman C_0. El fenómeno que ocurre aquí es que C_t es suave de género 1 si $t \neq 0$, y se «quiebra» en la unión $C_0 = C \cup L$, donde las componentes C y L son suaves y cada una tiene género 0, aún cuando C_0 tiene género 1. Los puntos singulares de C_0 son $C \cap L$; en particular, el punto $p = [1 : 0 : 0 : 0]$ es singular. El conjunto C_t es un ejemplo de familia (plana) de curvas algebraicas en $\mathbb{P}^3$.

Resumiendo, el polinomio de Hilbert nos dice la dimensión, género y grado del conjunto $V(f_1, \ldots, f_k)$ sin importar si este es suave o no. Evitaremos trabajar con casos muy complicados o redundantes (como el ejemplo anterior), estudiando el caso suave.

A la luz de los ejemplos anteriores, reformulamos la pregunta original de Halphen: sea $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva suave de grado d, ¿cuáles son los números g que pueden ocurrir como el género de C? Las curvas C y E muestran que los pares $(d, g) = (3, 0)$ y $(3, 1)$ ocurren.

Supongamos $C \subset \mathbb{P}^3$ es una curva suave de grado d. Si C yace en un plano, entonces la pregunta original de Halphen la contesta la ecuación (3). Esta fórmula, sin embargo, nos dice más: el género $g(C)$ de una curva C está acotado, pues podemos proyectar dicha curva C en un plano sin cambiar su grado [13, p. 72], ver figura 3. Esto implica que

$$g(C) \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2). \tag{6}$$

Por lo tanto, para cualquier d y $g(C) \geq \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$, no existe curva en $\mathbb{P}^3$ de este grado y género.

Halphen, y poco después Guido Castelnuovo[4] [2], demostraron que si la curva C no está contenida en un plano, entonces $g(C)$ está sujeto

[4]Guido Castelnuovo (1865-1952) nació y creció en Venecia. Se educó y trabajó, la mayor parte de su vida, en Italia. Tuvo estudiantes prominentes como O. Zariski y F. Enriques. Con el advenimiento del nazismo, Castelnuovo fue perseguido bajo leyes raciales fascistas y fue orillado a esconderse; al igual que muchos otros judíos en Europa. Después de la guerra, Castelnuovo regresó a Italia y fue nombrado comisionado especial para reparar el daño que se le había hecho a la ciencia

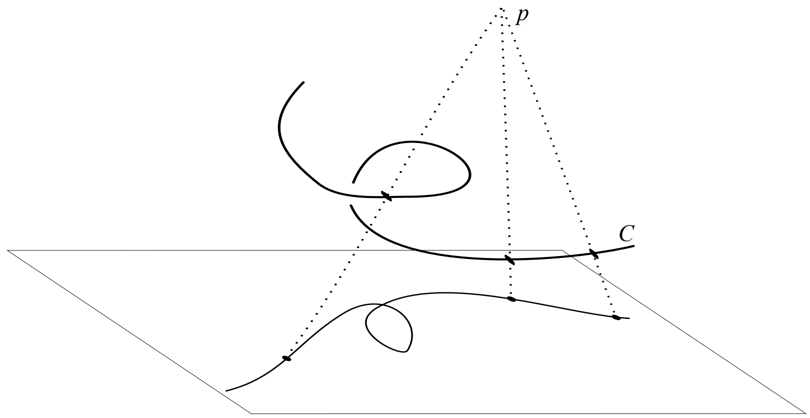

Figura 3. Proyección desde p de una curva C en un plano.

a una cota más estricta. A saber,

$$g(C) \leq \begin{cases} \frac{1}{4}d^2 - d + 1 & d \text{ par} \\ \\ \frac{1}{4}(d^2-1) - d + 1 & d \text{ impar.} \end{cases} \tag{7}$$

Esto muestra que entre 0 y la cota más alta, dada por (6), no todos los enteros ocurren. Es decir, entre 0 y $\frac{1}{2}(d-1)(d-2) = \frac{1}{2}d - d + 1$ existen «huecos» para los valores de g. Por ejemplo, se sigue de (7) que no existen curvas suaves de grado 4 y género 2, como tampoco existen curvas suaves de grado 5 y género $3, 4$ o 5.

En 1889, Castelnuovo demostró la desigualdad (7), ahora llamada cota de Castelnuovo, y su generalización a curvas en $\mathbb{P}^n$ con un argumento ingenioso que a continuación esbozaremos. Su estilo de hacer geometría algebraica influenciaría a toda una generación de geómetras italianos de principios del siglo XX —coloquialmente en estos días a dicha generación le llamamos «la escuela italiana de geometría algebraica»—. Las ideas introducidas por él en [2], devinieron en lo que hoy se llama teoría de Castelnuovo [5].

Esbocemos ahora el argumento de Castelnuovo para demostrar la desigualdad (7). Supongamos $C \subset \mathbb{P}^3$ es una curva suave de grado d y género g que no está contenida en ningún plano y está definida por los polinomios $\{f_1, \ldots, f_k\}$. Castelnuovo estima de dos maneras distintas el siguiente número

$$H_C(m) = \dim_{\mathbb{C}} \left(R/\langle f_1, \ldots, f_k\rangle\right)_m .$$

Una de esas estimaciones la conocemos para valores grandes de m: dicho número está dado por el polinomio de Hilbert, $H_C(m) = P_C(m) =$

italiana el gobierno de veinte años de B. Mussolini. Murió en Roma siendo senador de la República Italiana.

$md - g + 1$.[5] Castelnuovo obtiene el teorema al estimar este mismo número –usando geometría proyectiva– para todos los valores de m y comparar con $P(m)$. Estas estimaciones, y la comparación entre ellas, se ven así:

$$md - g + 1 \geq r(r + 2) + (m - r)d + 1,$$

donde $d = 2r + 1$. De esta desigualdad obtenemos la cota deseada (7) para el género g. La parte derecha de esta desigual, y la desigualdad misma son los elementos de la prueba de Castelnuovo que estamos omitiendo. El lector interesado en leer la prueba completa puede consultar cualquiera de las siguientes referencias, [10, p. 351] y [6, p. 251], cada una con enfoques ligeramente distintos.

Una curva con género máximo, según la desigualdad (7), tiene nombre (o más bien apellido) en la literatura: *curva de Castelnuovo*. Dicha curva tiene la propiedad notable de estar contenida en una única superficie cuádrica. Este hecho (no explícito en el párrafo anterior) brinda herramientas para estudiarlas, pues las curvas contenidas en cuádricas son bien conocidas. Por ejemplo, esta propiedad inmediatamente nos dice que una curva de Castelnuovo C de grado $d = 2k - 1$, aparece en la intersección de una cuádrica Q con una superficie S de grado k, y que $Q \cap S = C \cup L$, donde L es una línea; la curva C en (5) es una curva de Castelnuovo para la cual $k = 1$. Esta propiedad, y las ideas detrás de ella, será crucial para responder a la pregunta central de este escrito, como lo detallamos en la siguiente sección.

4. Respuesta a la pregunta de Halphen

Los argumentos expuestos hasta el momento no resuelven completamente la pregunta de Halphen pues estos no proporcionan criterios para saber cuando un par (d, g) sí ocurre. Por ejemplo, estos métodos son insuficientes para concluir si existe una curva suave de grado 7 y género 5. Sin embargo, profundizando en estas ideas en [8] se listan todos los posibles géneros de las curvas en $\mathbb{P}^3$ de grado ≤ 20. La cota de Castelnuovo, pese a no resolver la pregunta de Halphen, generó ideas que aún motivan investigación [4, 5, 14].

La pregunta de Halphen fue finalmente resuelta por L. Gruson y C. Peskine en [7]. En este artículo, se dan condiciones necesarias y suficientes para que el par de números (d, g) ocurran con el grado y género de una curva suave $C \subset \mathbb{P}^3$. Dichas condiciones son: una curva

[5] El teorema de Riemann-Roch, $h^0(m) - h^1(m) = md - g + 1$, puede usarse también en esta parte del argumento. En este artículo, es más natural usar el polinomio de Hilbert teniendo la ventaja de no depender del los números complejos, ni de la suavidad de C.

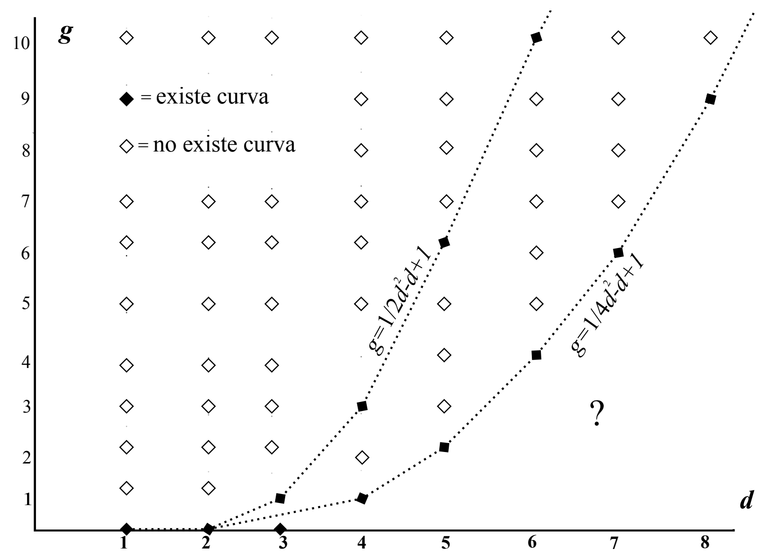

Figura 4. Curvas de grado d y género g en $\mathbb{P}^3$.

suave $C \subset \mathbb{P}^3$ de grado d y género g no contenida en ninguna superficie cuádrica existe si y sólo si

$$0 \leq g \leq \tfrac{1}{6}d^2 - \tfrac{1}{2}d + 1.$$

Esto contesta completamente la pregunta de Halphen para curvas en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$. Si volvemos a la figura 4, esta solución se ve como una parábola adicional a las dos que aparecen, a saber $g = \frac{1}{6}d^2 - \frac{1}{2}d + 1$, y la región bajo esta es donde aparecen prácticamente todas las curvas suaves de $\mathbb{P}^3$. La idea para demostrar este resultado es identificar el rango de posibles valores de g que pueden ocurrir como el género de una curva suave de grado d que yace en una superficie de un grado dado. Esto fue exactamente lo que hicimos en la sección 2 para curvas en un plano, y en la sección 3 con las curvas de Castelnuovo las cuales están contenidas en superficies cuádricas.

Como dato curioso, en uno de los libros sobre geometría algebraica más conocidos Robin Hartshorne aborda la pregunta de Halphen [10, p. 349] y lista, en una gráfica similar a la de la figura 4, varios pares (d, g) para los cuales dice: «no se sabe si existe una curva suave con este grado y género». Por supuesto, [10] se publicó en 1977 y [7] cinco años después.

El lector observará que hay cien años entre las publicaciones donde se plantea la pregunta original de Halphen en $\mathbb{P}^3$ y donde esta se resuelve [7, 8]. Lo que sucede para otros espacios proyectivos es actualmente foco de investigación. Es decir, dado un n, nos podemos preguntar por las condiciones necesarias y suficientes para que los números (d, g) ocurran como el grado y el género de una curva suave $C \subset \mathbb{P}^n$. La solución de los casos $n = 2, 3$ se expone en este artículo trabajando sobre los números complejos (Hartshorne resolvió el caso de característica positiva). Rathmann resolvió los casos $n = 4, 5$, usando los métodos de Gruson y Peskine. Estos son los casos donde la pregunta de Halphen tiene una respuesta completa y satisfactoria. Hasta donde tenemos conocimiento, para $n > 6$, la pregunta de Halphen sigue abierta en general. Véase [3], donde se ataca el caso $n > 6$ para ciertos valores de (d, g).

Epílogo

Para exponer las ideas de este artículo, usamos las coordenadas del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$; lo cual era contrario a los lineamientos originales del Premio Steiner. Después de que todos los estudiantes y seguidores de Steiner murieron, un geómetra que no hiciera uso de coordenadas era cosa difícil de hallar. Por tal razón, los lineamientos del Premio Steiner cambiaron diendo paso a técnicas más modernas (como las de Halphen), dejando poco a poco los métodos sintéticos en el olvido.

Actualmente, para estudiar curvas en $\mathbb{P}^n$ se combinan aspectos tanto extrínsecos, (usando coordenadas), como intrínsecos (libres de coordenadas). Un ejemplo prominente de esta combinación de puntos de vista es el estudio de la geometría de ciertas curvas de Castelnuovo llamadas *curvas canónicas* de género g contenidas en $\mathbb{P}^{g-1}$. El estudio de estas curvas, concentra mucha actividad e investigación en estos días en geometría algebraica. Abordar este tema sería una continuación natural de este escrito que lamentablemente no haremos. Sin embargo, el lector puede consultar [1, 6, 9, 11, 13] donde se abunda en esta dirección; y en muchas muchas otras.

Agradecimientos

Este artículo se escribió con el financiamiento de las Cátedras CONACYT, 2014-01. Agradezco al profesor Joe Harris por introducirme en este tema. Le doy las gracias a Rosa Elisa T Hernandez Acosta de la Facultad de Ciencias de la UNAM por leer cuidadosamente los borradores de este texto y, con ello, mejorar sustancialmente el español de este artículo.

Bibliografía introductoria adicional

Además de las referencias introductorias incluidas en el texto, a continuación listamos 5 textos de nivel básico que consideramos importantes y que no se mencionan en el artículo.

1. B. Hassett. *Introduction to Algebraic Geometry.* Cambridge University Press, 2007.
   Introducción a la geometría algebraica haciendo referencia siempre a problemas fundamentales del área y temas actuales de investigación.
2. K. Hulek. *Elementary Algebraic Geometry.* Student Mathematical Library, AMS. 2000.
   Este es un texto introductório a la geometría algebrica desde un punto de vista moderno. Muy recomendable.
3. F. Kirwan. *Complex Algebraic Curves.* London Mathematical Society Student Texts 23, 1992.
   Este texto es una introducción a la teoría de curvas algebraicas planas sobre los números complejos. En este texto se calcula, usando topología, la fórmula grado-género que nosotros dedujimos en la sección 2.
4. R. Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces.* Graduate Studies in Mathematics, AMS. 5, 1995.
   Texto que aborda muchos aspectos de las curvas algebraicas, en particular estudia a las curvas usando análisis complejo.
5. M. Reid. *Undergraduate Algebraic Geometry.* London Mathematical Society Student Texts 12, 1988.
   Excelente introducción a la geometría algebraica de nivel licenciatura.

Bibliografía

[1] E. Arbarelo, M. Cornalba, P. Griffiths y J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves*, vol. 1, Springer-Verlag, 1984.
[2] G. Castelnuovo, *Ricerche di geometria sulle curve algebriche*, Atti R. Accad. Sci. Torino, 1889.
[3] C. Ciliberto, «On the degree and genus of smooth curves in a projective space», *Advances in Mathematics*, vol. 81, núm. 2, 1990, 198 – 248.
[4] D. Eisenbud, M. Green y J. Harris, «Higher Castelnuovo theory», *Astérisque*, vol. 218, 1993, 187–202.
[5] D. Eisenbud y J. Harris, *Curves in Projective Space*, Université de Montréal, 1982.
[6] P. Griffiths y J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Interscience, 1978.
[7] L. Gruson y C. Peskine, «Genre des courbes de l'espace projectif», *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup*, vol. 15, 1982, 401–418.
[8] G. H. Halphen, «Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques», *Journal de l'École Polytechnique*, vol. 52, 1882, 1–200.
[9] J. Harris y I. Morrison, *Moduli of curves*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 187, Springer-Verlag, 1998.
[10] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, 1977.
[11] R. Hartshorne, *Deformation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 257, Springer-Verlag, 2009.

[12] F. Kirwan, *Complex Algebraic Curves*, vol. 23, London Mathematical Society Student Texts, 1992.

[13] D. Mumford, *Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, 1976.

[14] I. Petriakiev, «On Zero-Dimensional Schemes with Special Hilbert functions», Harvard 2006, Tesis doctoral.

[15] M. Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*, vol. 12, London Mathematical Society Student Texts, 1988.