UNA CLASIFICACION DE LINEAS EN EL PLANO Y PLANOS EN EL ESPACIO, MEDIANTE RANGO DE MATRICES

El presente es un trabajo sobre Geometría Analítica haciendo uso de resultados de Algebra Lineal, especialmente solución de sistemas de ecuaciones y su relación con el rango de las matrices que se pueden asociar a ellos. Fue presentado en un curso de Algebra Lineal I por *Aurea Cornejo, Lilia Lemus y Asunción Preisser*, impartido por el profesor *Humberto Madrid*.

Primeramente recordaremos algunos resultados de Algebra Lineal que utilizaremos.

Sea A' la forma escalonada de A, el rango de A, r(A), es el número de renglones distintos de cero en A'.

Ahora, si tenemos un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$
\begin{array}{l}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m
\end{array}
$$

podemos escribirlo como $A\bar{x} = \bar{b}$, siendo A la matriz formada por los coeficientes del sistema, y llamaremos a D:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1} & b_{1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{2} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m} \end{bmatrix}$$

la matriz aumentada del sistema.

Si $r(A) = n$ entonces $r(D)$ vale n ó $n+1$, y el sistema correspondiente tendrá solución si y sólo si $r(A) = r(D)$; y la solución será única si $r(A) = n$; habrá una infinidad de soluciones si $r(A)$ es $< n$. No existirá solución si y solo si $r(A)$ es $<$ que $r(D)$. Este último caso puede parecer carente de interés, pero paradójicamente, en general, los casos que no tienen solución encierran una mayor riqueza en cuanto a la información que podemos obtener de ellos, como se verá más adelante.

En Geometría Analítica tenemos las ecuaciones lineales:

$$ax + by = c \text{ y } ax + by + cz = d$$

donde a, b, c, d son reales; que representan respectivamente una línea en un plano y un plano en el espacio. Asociado con un par de líneas tenemos el sistema:

$$\begin{matrix} a_{11} x + a_{12} y = c_{1} \\ a_{21} x + a_{22} y = c_{2} \end{matrix} \quad \ldots (1)$$

y similarmente para una terna de planos:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= d_3 \end{aligned} \qquad \ldots (2)$$

Al sistema (1) le podemos asociar las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \end{bmatrix}$$

y al sistema (2) las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{bmatrix}$$

En cada caso A es la matriz del sistema y D la matriz aumentada.

Resolviendo los sistemas (1) y (2) en términos de los rangos de sus matrices asociadas y matrices aumentadas respectivamente, se encuentran las relaciones posibles que existen entre dos líneas en un plano y tres planos en el espacio.

Se demostrará que las posibles relaciones son:

I.- Entre dos líneas:

1. Se intersectan en un solo punto.

2. Son paralelas.

3. Coinciden.

II.- Entre tres planos:

1. Se intersectan en un solo punto.
2. Los tres se intersectan en una línea.
3. Los tres son paralelos.
4. Los tres coinciden.
5. Forman un prisma.

Partiremos analizando los sistemas correspondientes en términos de todas las combinaciones posibles de los rangos de las matrices A y D, respectivamente, ya que así agotamos todas las posibilidades, en vez de argumentos geométricos bastante intuitivos, que si bien son claros en R^2 y R^3, no lo son en dimensiones mayores, y éste análisis es extensivo a ellas con sus debidas modificaciones; también puede hacerse lo mismo para cónicas y conicoides como sugiere H. Eves en las páginas 104-107 de *"ELEMENTARY MATRIX THEORY", ALLYN and BACON*, (1966).

I. CLASIFICACION DE RECTAS EN EL PLANO.

Nótese que en éste caso tenemos dos incógnitas, a este número lo denotaremos como n.

1. $r(A) = r(D) = 2 = n$, existe solución y es única, o sea que existe solamente un punto que satisface el sistema (1) lo que geométricamente significa que las

rectas se intersectan en un solo punto. Recíprocamente, si las rectas tienen un sólo punto de intersección eso significa que (1) tiene solución única, lo cual implica que $r(A) = 2 = r(D) = n$, o sea que, --- $r(A) = 2 = r(D) = n$ si y sólo si las rectas se intersectan en un solo punto.

2. Si $r(A) = 1$, $r(D) = 2$ claramente el sistema no tiene solución, esto implica que las rectas no poseen un - punto en común, por lo que son paralelas. Recíprocamente, si las rectas son paralelas, obviamente no -- tienen puntos en común, lo cual implica que ningún - punto satisface simultáneamente las ecuaciones de -- las dos rectas y esto equivale a que el sistema (1) no tenga solución y por lo tanto que $r(A) = 1$ y $r(D) = 2$. O sea, $r(A) = 1$ y $r(D) = 2$ si y sólo si las líneas son paralelas.

3. $r(A) = 1 = r(D) < n$. Ya que A y D tienen el mismo rango, el sistema tendrá solución, sin embargo, observemos que el rango de ambas es menor que el número de incógnitas, lo cual implica que en las formas escalonadas de las matrices A y D respectivamente, logramos obtener un renglón de ceros a partir de efectuar operaciones elementales con el otro renglón, o sea que si:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad D' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & c'_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ;$$

vemos que una recta tiene sus coeficientes y término independiente proporcionales a la otra; si recordamos que la expresión de una recta no es única, concluímos que las rectas coinciden. Ahora bien, desde el punto de vista geométrico, si dos rectas coinciden, tienen infinidad de puntos en común, lo cual implica que el sistema correspondiente tiene infinidad de soluciones, lo que implica que $r(A) = r(D) \neq n$, si $n = 2$, tenemos entonces que $r(A) = r(D) = 1$. O sea que, $r(A) = 1 = r(D)$ si y sólo si las líneas coinciden.

II. CLASIFICACION DE PLANOS EN EL ESPACIO.

En este caso tendremos tres ecuaciones con tres incógnitas, el número de incógnitas lo denotaremos con la letra m.

1. $r(A) = r(D) = m = 3$ el sistema (2) tiene solución -

única, o sea, los planos poseen un sólo punto en común. Recíprocamente, si los planos se intersectan en un sólo punto, el sistema correspondiente tiene solución única, lo cual implica que r(A) = r(D) = 3 = m. O sea, que r(A) = r(D) = m = 3 si y solo si los planos se intersectan en un sólo punto, como se ve en la figura 1.

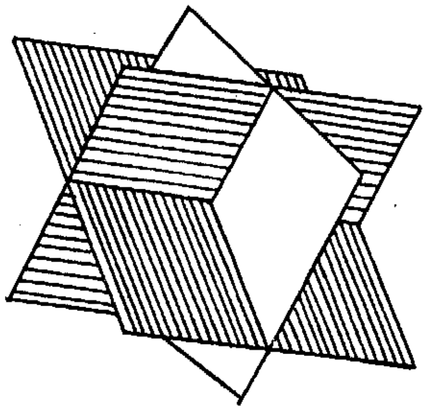

Fig. 1

2. r(A) = 2, r(D) = 3. No existe solución al sistema, pero si r(A) = 2 eso implica que un renglón es combinación lineal de los dos restantes, por ejemplo: $r_3 = qr_1 + kr_2$ (donde r_i es el renglón i-ésimo), de lo que se desprenden dos posibilidades:

   a) $q \neq 0$ y $k \neq 0$ y entonces es posible formar las matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

donde $r(A_1) = r(A_2) = r(A_3) = 2$. De aquí se ve que tomando por pares se van a intersectar en una infinidad de puntos; estas intersecciones van a ser líneas rectas, por lo que los planos forman un prisma. (fig.2)

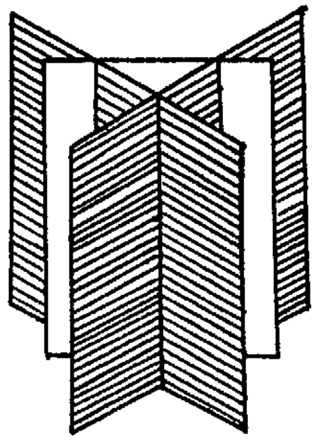

Fig. 2

b). $q = 0$ ó $k = 0$. Supongamos que $k = 0$, eso implica que un plano es paralelo a otro del par restante, por lo que un plano corta a los otros dos que son paralelos. (fig. 3)

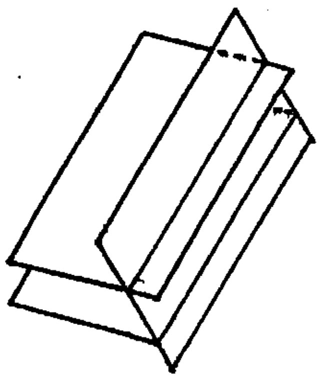

Fig. 3

Recíprocamente, si los planos forman un prisma, eso implica que la intersección de los tres es vacía, por lo que no existe solución al sistema, por lo tanto $r(A) < r(D)$. Ahora, si $r(A) = 1$, tendríamos que los planos serían paralelos o coincidirían, contrario a nuestra hipótesis de la cual partimos; por lo tanto, $r(A) = 2$ y $r(D) = 3$.

O sea que tres planos forman un prisma si y sólo si $r(A) = 2$ y $r(D) = 3$.

3. $r(A) = 1$, $r(D) = 3$. Este caso no puede suceder ya que como sabemos, si el rango de la matriz del sistema es m, el rango de la matriz aumentada solamente puede ser, o bien m, ó m+1. En este caso si $r(A) = 1$, el rango de la matriz aumentada $r(D)$ debe ser distinto de tres.

4. $r(A) = r(D) = 2$. En este caso tendremos infinidad de soluciones. Notemos que $r(A)=2$, y $r(D)=2$, esto significa que por medio de operaciones elementales en las matrices A y D hemos logrado obtener un renglón de ceros a partir de los otros dos, esto es, hemos expresado un plano como combinación lineal de los otros dos, lo cual indica que ni son paralelos los tres ni coinciden, y entonces concluímos que se intersectan en una línea. Recíprocamente, si se intersectan en una línea, el sistema (2) tiene infinidad de soluciones por lo

que $r(A) = r(D) < m$, ahora, si $r(A) = 1 = r(D)$ quiere decir que los tres planos coinciden. De lo cual deducimos que en éste caso, $r(A) = 2 = r(D) = 2$. --- (fig. 4).

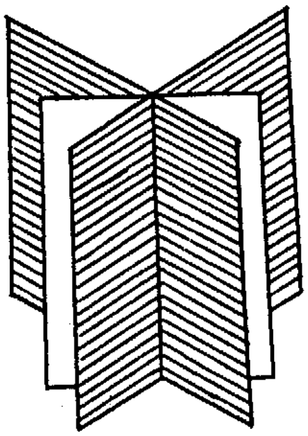

Fig. 4

5. $r(A) = 1$, $r(D) = 2$. Como $r(A) \neq r(D)$ el sistema no tiene solución; como $r(A) = 1$ eso implica que:

$$a_{11} = qa_{21} = ka_{31}$$
$$a_{12} = qa_{22} = ka_{32}$$
$$a_{13} = qa_{23} = ka_{33}$$

pero como $r(D) = 2$, las d_i's no son proporcionales entre sí, o sea, son paralelos, pudiendo coincidir dos de ellos. Recíprocamente, si suponemos que los planos son paralelos, eso implica que no tienen puntos en común, entonces el sistema (2) no tiene solu--

ción, lo que implica que $r(A) \neq r(D)$, ahora, si son paralelos, tenemos que si:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

podemos obtener la matriz escalonada A' de la forma:

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ya que los planos tienen sus coeficientes y término independiente proporcionales, por lo que $r(A) = 1$. Si sucediera que $r(D) = 1$ el sistema (2) tendría solución, lo cual es una contradicción, y tampoco puede suceder que $r(D) = 3$ (caso 3), por lo que $r(D) = 2$. O sea que, tres planos son paralelos si y sólo si $r(A) = 1$ y $r(D) = 2$. (fig. 5)

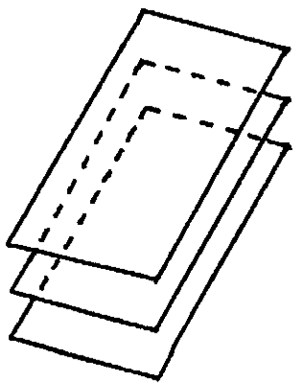

Fig. 5

6. $r(A) = 1 = r(D) < m$, existen infinidad de soluciones, observamos que si:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

como también

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} & d''_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

significa que los coeficientes y término independiente de los tres planos son proporcionales, concluímos que se trata de un mismo plano expresado en tres formas diferentes, por lo que los tres planos coinciden. Recíprocamente, si los tres planos coinciden, el sistema tiene infinidad de soluciones, lo que implica que $r(A) = r(D) < m$, ahora $r(A) = r(D) \neq 2$ y $r(A) = r(D) \neq 3$ (tendríamos caso 1 y caso 4), por lo que $r(A) = r(D) = 1$. O sea que, tres planos coinciden si y sólo si $r(A) = r(D) = 1$.

En resumen tenemos que:

I. Si tenemos dos líneas rectas en el plano, solamente pue de suceder que:

1. Se intersectan en un solo punto. ($r(A) = r(D) = 2$)
2. Sean paralelas. ($r(A) = 1$, $r(D) = 2$)
3. Coincidan. ($r(A) = r(D) = 1$)

II. Si tenemos una terna de planos en el espacio, solo pue- de suceder que:

1. Se intersectan en un solo punto. ($r(A) = r(D) = 3$)
2. Formen un prisma. ($r(A) = 2$, $r(D) = 3$)
3. Se intersectan en una línea. ($r(A) = r(D) = 2$).
4. Sean paralelos. ($r(A) = 1$, $r(D) = 2$)
5. Coincidan. ($r(A) = r(D) = 1$).

EJEMPLOS:

1. Planos que se intersectan en un solo punto

a) $$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 0 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

Sol. $1/2(1,1,0)$

b) $$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 2 \\ x - 2y + 3z &= 0 \\ 4x - y + 8z &= 12 \end{aligned}$$

$1/20(-29,44,39)$

c) $$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 4 \\ 5x + 4y + 7z &= 2 \\ x - y + 2z &= -5 \end{aligned}$$

Sol. $(-11/18, 48/18, -5/6)$

d) $$\begin{aligned} 3x + y + z &= 5 \\ x + y + 5z &= 7 \\ x - y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

$(3/2, 0, 1/2)$

2. Se intersectan en una línea.

$$3x + y - 4z = 5$$
$$2x + 3y - z = 4$$
$$x - 2y + 3z = 1$$

3. Los planos son paralelos.

$$x - 2y + z = 0$$
$$2x - 4y + 2z = 5$$
$$3x - 6y + 3z = 9$$

4. Coinciden.

$$2x + 4y - 8z = 16$$
$$6x + 12y - 24z = 48$$
$$8x + 16y - 32z = 64$$

5. Forman un prisma.

$$x + y - z = -2$$
$$x + 2y + z = 4$$
$$-x - 3y - 3z = -5$$