MISCELÁNEA MATEMÁTICA 25 (1997) 11-27 SMM

Weierstrass: Cien años después

Luis Moreno Armella

Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV, IPN

Introducción

Cuando volvemos los ojos a la historia, es fácil concluir que el siglo XIX fue el siglo del rigor en el cálculo. Y desde esta perspectiva, las figuras de Cauchy (durante la primera mitad del siglo) y Weierstrass (segunda mitad) tienen ganado un lugar especial. Cauchy organizó todo el material producido por sus antecesores (entre quienes destaca la inmensa figura de Euler) e introdujo de manera general, una forma rigurosa y clara de recuperar muchos de los resultados (ahora teoremas) del cálculo. Por ejemplo, dio una definición clara de sucesión convergente, de función continua, de integral de una función continua, etcétera. (para mayores detalles véase Edwards, pp. 301-334). Quizá pueda compararse -teniendo cuidado en que estamos hablando de épocas y concepciones matemáticas distintas- la figura de Cauchy a la figura de Euclides, este último como sistematizador del conocimiento geométrico y quien introdujo la demostración como el instrumento de validación por excelencia dentro de las matemáticas.

Después de Euclides, la geometría no volvió a ser la misma. Después de Cauchy, el cálculo tampoco. Gradualmente, toda esa intensa investigación sobre los procesos de derivación e integración fue abriendo paso a las investigaciones, no sobre una familia particular de funciones (por ejemplo, las series de potencias), sino sobre el concepto general de función. De allí que se diera nacimiento a resultados como **el teorema del valor intermedio** (Cauchy-Bolzano) para funciones continuas definidas en un intervalo. No puede dejar de mencionarse, en relación a este teorema, la contribución de Bolzano quien comprendió la dependencia del mismo, de una construcción rigurosa de los números reales (véase Bottazzini, pp.96-101). Sin embargo, por un accidente histórico que no podemos analizar en este escrito, su trabajo permaneció al margen de los desarrollos centrales de su tiempo.

Weierstrass murió en 1897 a la edad de 82 años. Dejó tras de sí un análisis matemático consolidado, que había vivido su época de oro conocida como la aritmetización del análisis. Aunque fue una figura protagónica, no vivió ni actuó solo. Gran parte de su obra y de su influencia, tomó cuerpo a través de sus discípulos y seguidores. Basta citar los nombres de Heine, Cantor, Hölder, Mittag-Leffler y, desde luego, Sonia Kovalesky.

1 Los Comienzos.

Después de un brillante inicio como estudiante de secundaria, Weierstrass ingresó a la carrera de leyes, en la Universidad de Bonn. Ingresar no es quizá el término más apropiado, pues el joven Karl se dedicó a cualquier cosa excepto a las leyes. Hacia 1840 (había nacido en 1815) sin título universitario, comenzó su carrera como docente de secundaria. Dedicó a esta actividad su tiempo diurno, durante los siguientes quince años. Decimos *diurno* porque las noches fueron casi siempre un encuentro secreto con Abel.

El año 1854, fue de asombro doble para el mundo matemático. Riemann (1826-1866) dio a conocer su trabajo sobre las series de Fourier. Allí, para beneficio de todos, está su trabajo sobre la integral (de Riemann, desde luego), en donde se despliegan condiciones necesarias y suficientes para su existencia. Cabe mencionar que el problema sobre los *conjuntos de unicidad* de series de Fourier, partieron de este trabajo, así como el interés de Cantor en ellos, que por un camino complejo y lleno de dramatismos, lo conduciría a los conjuntos infinitos. En ese año, 1854, otro motivo de asombro provino de Weierstrass. consistió en su primera publicación en el famoso **Journal de Crelle** sobre las funciones abelianas. Una obra maestra que lo llevó hasta la universidad de Berlín en donde permanecería el resto de sus días. Este trabajo le llevó a la reconstrucción del análisis complejo.

Nosotros aquí vamos a dedicar unas páginas a su trabajo sobre la fundamentación del análisis real.

2 Sobre el rigor.

El rigor matemático es profundamente histórico. Ha evolucionado con las matemáticas; en tal proceso no es difícil ver que las exigencias corresponden siempre a una concepción de los objetos matemáticos involucrados. En un tiempo (para Gauss mismo, incluso) los matemáticos estuvieron satisfechos con el enunciado, a secas, del teorema del valor intermedio: *Una función continua que cambia de signo en un intervalo, deberá tener una raíz en dicho intervalo.*

Seguramente más de un lector se sentirá incómodo con el enunciado anterior. Habrá notado que le falta precisión. Esta reacción no es extraña. Forma parte del *medio ambiente de rigor* que adquirimos durante nuestra educación.

Comparemos las siguientes definiciones de **función continua**:

1. $f(x)$ se dirá continua si los valores numéricos de las diferencias $f(x+\alpha) - f(x)$ decrecen indefinidamente cuando decrece indefinidamente el incremento α.

2. Diremos que una cantidad y es una función continua de x si, una vez que hayamos elegido $\varepsilon > 0$, podemos demostrar que existe. $\delta > 0$ tal que, para cualquier valor entre $x_0 - \delta$ y $x_0 + \delta$, el valor correspondiente de y está entre $y_0 - \varepsilon$ y $y_0 + \varepsilon$.

La primera la podemos hallar en el Curso de Análisis de Cauchy de 1821. La segunda es de Weierstrass (1874). Podemos apreciar que hay diferencias entre ellas y también con la forma en que hoy en día, enunciamos la definición de función continua.

La sistematización debida a Cauchy, supone dado el continuo numérico. De allí que, una vez introducida la noción de sucesión, no pueda distinguirse entre sucesión convergente y lo que hoy conocemos como sucesión de Cauchy. Esto es algo evidente en su **demostración** del teorema del valor intermedio. (véase Edwards, p. 308). Weierstrass fue capaz de comprender (como Bolzano, antes que él) que el esclarecimiento conceptual de este teorema (y de muchos otros), sólo sería posible mediante una construcción rigurosa de los números reales. Dió una demostración basada en lo que hoy en día conocemos como el teorema de Bolzano-Weierstrass (1874): *Toda sucesión acotada tiene un punto de acumulación.*

Además del teorema del valor intermedio, Weierstrass demostró, mediante argumentos puramente analíticos (es decir, sin tomar en cuenta la evidencia geométrica) que una función continua definida en un intervalo cerrado, tiene un máximo y un mínimo absolutos.

Este resultado aparece en las conferencias de Weierstrass de 1861 bajo el nombre **Hauptlehrsatz**, esto es, Teorema Principal. De él dijo Hilbert en 1897, que era una herramienta indispensable para *investigaciones analíticas más refinadas* (véase Hairer–Wanner, p. 205).

Todo el programa de inyección de rigor en la estructura del análisis matemático, es lo que se conoce como **Aritmetización del Análisis**. Sin duda, su propósito central fue confinar el razonamiento matemático al ámbito numérico señalando, de paso, los peligros de una dependencia acrítica de la intuición geométrica.

3 De lo puntual a lo uniforme.

En sus **lecciones de análisis** (1821) Cauchy enunció y **demostró** el siguiente resultado:

Si $f_n: E \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuas tal que para cada x de E, la sucesión $f_n(x)$ es convergente, entonces la función $f: E \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \lim f_n(x)$ para cada $x \in E$, es continua.

Hoy en día sabemos que, con **nuestras interpretaciones**, el resultado es falso. Por ejemplo, basta tomar la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$, $E = [0, 1]$. La función límite, f, es: $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ y $f(1) = 1$, que no es continua en $x = 1$, aún cuando cada f_n lo es.

¿Cómo pudo Cauchy cometer un error de ese tamaño?

La única respuesta posible, nos parece, es que a su imagen conceptual de función continua le atribuía propiedades que no aparecían explícitamente en su definición. Algo similar ocurre en los Elementos de Euclides. Allí, Euclides toma como evidente que existen los puntos de intersección de dos circunferencias. En tratados modernos, muchas veces podemos leer que hay *allí, en Euclides, una falta de rigor*, como si el rigor fuese siempre el mismo. No es el caso. Desde luego, el análisis conceptual va generando un progreso en el sentido que la red de significaciones, la articulación conceptual, las dependencias causales de unos resultados con relación a otros, se va haciendo más clara. Weierstrass lo entendió así. En lugar de afirmar, como lo hizo Abel, que el teorema *admite excepciones* (Abel, 1826, Oeuvres 1, págs. 224-225), introdujo en 1841 el concepto de *convergencia uniforme*:

La sucesión de funciones f_n definidas sobre A converge uniformemente a la función f, (definida sobre A) si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para cada $n \geq N$, y para cada x en A, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Como bien se sabe, lo importante en esta definición es que el número N **sólo depende de** $\in$ **y no de** x. De Allí, el apelativo *uniforme* para este concepto de convergencia.

En sus conferencias de 1861 (véase Hairer-Wanner, pág. 213) puede leerse el resultado de Weierstrass:

Si $(f_n)_n$ converge uniformemente a f, y cada f_n es continua, entonces f es continua.

Desde el punto de vista clásico, esto salda la deuda de Cauchy.

Cuando se introduce un concepto como la convergencia uniforme (o cualquier otro destinado a jugar un papel central en la teoría) resulta conveniente tener otros criterios equivalentes (teoremas de caracterización, decimos hoy en día) a través de los cuales podamos establecer que nos encontramos en condiciones de usar el concepto en cuestión. Weierstrass, desde luego, comprendía esto perfectamente, así que dio lugar al siguiente criterio, con miras a su utilización en el terreno de las series de potencias.

Si para cada f_n en A, f_n está acotada (globalmente) por la constante C_n y si $\sum C_n$ es una serie convergente, entonces, la serie de funciones $\sum f_n$ converge uniformemente sobre A.

En particular, si cada f_n es continua sobre A, la función límite que define la serie es continua sobre A. A este resultado se le conoce como el *C-criterio de Weierstrass* para la convergencia uniforme. Un poco más adelante haremos uso de este resultado.

4 Derivabilidad y su ausencia.

Cuando la imagen dominante de una función es su gráfica, una conclusión natural es que tal función es derivable excepto quizá, en algunos puntos especiales donde la gráfica tiene *picos* (como el que presenta la función valor absoluto en el origen). Esta imagen de función se fue sedimentando debajo del enunciado más algebraico que definía una función como una expresión analítica. De allí que los matemáticos, desde mucho antes de Weierstrass, intentaran demostrar que una función continua (es decir, aquella cuya gráfica *tiene una sola pieza*) debía ser derivable salvo quizá en algunos puntos. Este propósito puede hallarse ya en la reformulación de los fundamentos del cálculo propuesto por Lagrange (1736-1813) en su obra **Teoría de Funciones Analíticas**. (véase Hawkins, págs. 43-54).

Más adelante, Ampère (1806) intentó otra demostración pero sin recurrir a los argumentos de analiticidad de Lagrange. La lista de intentos es larga; ya para tiempos de Weierstrass, su discípulo Hankel (1870) había demostrado que

Si g es continua sobre $[-1,1]$ pero $g'(0)$, la derivada de g en 0, no existe, entonces la función:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g(sen\, n\pi x)/n^k \qquad (k > 2)$$

es continua pero **NO** derivable en los racionales.

Este ejemplo y otros similares entre los que cuentan los de H. Schwarz, también discípulo de Weierstrass, y otro tardío de Darboux (1879), contribuyeron a la toma de conciencia sobre el grado de generalidad que había alcanzado el concepto de función. Francamente, era insuficiente seguir pensando en una función a través de su representación geométrica.

No podemos dejar de mencionar el ejemplo de Riemann (1861):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\ (n^2 x)}{n^2}$$

Debido a la convergencia uniforme de la serie, la función f es continua sobre los reales. Riemann pensó que esta función en ningún punto era derivable. Pero estaba *ligeramente equivocado* como demostró Gerver en 1970, (véase Hairer-Wanner pág. 262) ya que en $x = \pi$ y otros valores excepcionales (múltiplos irracionales de π) la función es derivable.

Hacia 1872 Weierstrass escribía:

> *Hasta hace muy poco se creía que una función continua siempre tenía una primera derivada cuyo valor podía ser infinito o indefinido sólo en algunos puntos aislados. Aún en*

el trabajo de Gauss, Cauchy, Dirichlet, matemáticos acostumbrados a la crítica severa, no puede hallarse, de acuerdo a lo que sé, una opinión distinta. (loc.cit. pág. 261).

Ese mismo año, Weierstrass dio a conocer, en su seminario, el siguiente resultado:

Si $b < 1$ y $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, entonces, la función

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x)$$

es continua para todo x y en ninguno de sus valores es derivable.

El resultado fue publicado en 1875 como parte de un artículo de Du Bois-Reymond, con el debido crédito al maestro.

Los efectos causados por la existencia de esta clase especial de funciones (continuas sin derivada en punto alguno) fueron considerables. En primer lugar, la continuidad de una función no siempre representaba **una propiedad de su gráfica** pues estos ejemplos *no son graficables* ya que continuidad-sin derivabilidad quería decir que la gráfica de la función *¡tiene un pico en cada punto!*

La continuidad se transformaba, entonces, en una propiedad descrita y verificada, cuando fuese necesario, en términos numéricos. Un análisis aritmetizado era el nuevo espacio de trabajo. Nos parece que esta es una consecuencia muy profunda del trabajo de la escuela weierstrassiana. Y este es, justamente, el segundo efecto de su trabajo: haber establecido en una nueva disciplina, una metodología de la cual, los nuevos parámetros de rigor, constituían parte medular.

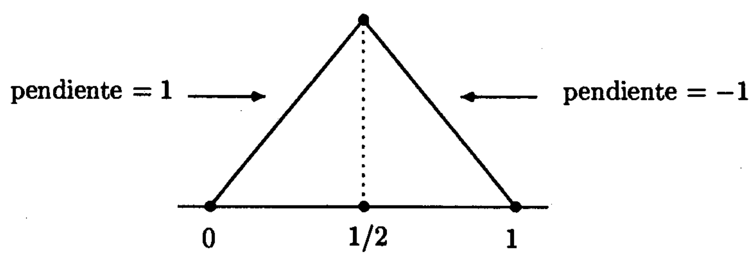
Todo el último tercio del siglo XIX estuvo bajo el influjo de esta visión. El nuevo siglo se inició con trabajos que sólo hacían creer en un futuro lleno de optimismo. Basta citar la tesis *Longitud, área y volumen* de H. Lebesgue, dedicado a **la teoría de la medida y de la integración**, una de las más bellas creaciones matemáticas de este siglo. Aunque el rigor introducido a las matemáticas ha seguido evolucionando con muy buena salud, y no parece haber razones para que la situación a este respecto cambie, ya a comienzos del siglo se escuchaban voces críticas que veían con cierta inquietud la desaparición del análisis geométrico.

En efecto, aunque la aritmetización dió una fundamentación sólida al análisis matemático, la comprensión intuitiva suministrada por la geometría seguía haciendo falta. Al menos psicológicamente (y esto no es un problema menor) para los estudiantes recién llegados al campo. No eran fáciles de aceptar objetos como las funciones continuas sin derivada. Es muy probable que la situación se haya tornado aún más ardua, para los estudiosos del análisis, cuando fueron testigos de la irrupción de otro resultado inesperado: la existencia de una función continua de la recta sobre el plano; es decir, de una **curva continua que llena un cuadrado**. Este resultado se debe a Peano (1890).

A continuación estudiaremos un ejemplo de función continua sin derivada, debido esencialmente a Van der Waerden (véase Billingsley 1982). Por varias razones preferimos el estudio de este ejemplo al original de Weierstrass (para su estudio remitimos al lector al artículo del Prof. Grabinsky en este mismo número). Nos parece que el ejemplo del maestro alemán es **deliberadamente analítico** para enfatizar el carácter aritmético que tanto le interesaba; era parte sustancial de su programa de restructuración del análisis. En cambio, el ejemplo que presentaremos, aunque necesariamente es muy analítico, abre (de nuevo) las puertas a consideraciones geométricas que van a quedar plenamente justificadas más adelante en el trabajo de von Koch.

5 Ejemplo Fundamental.

Consideremos la función $\varphi(x)$ = distancia de x al entero más cercano. Su gráfica en el intervalo $[0,1]$ es como sigue:



En dicho intervalo, podemos representar la función así:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Es importante observar que la gráfica de la función tiene esta misma forma entre dos cualesquiera enteros consecutivos.

Ahora definimos una sucesión de funciones f_n así:

$$f_n(x) = \frac{\varphi(2^n \cdot x)}{2^n}$$

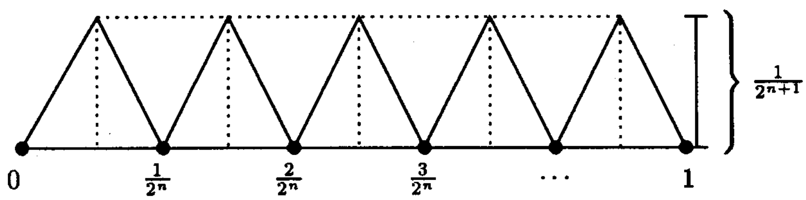
De esta manera, cada función f_n está *formada* por copias a escala de la función φ. La idea es ir produciendo una sucesión de funciones en donde cada una de ellas tenga muchos picos. Al sumar todas estas funciones vamos a obtener una función continua sin derivada.

i) Definamos pues la función $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ así:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Como $f_n(x) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$ entonces, el C-criterio de Weierstrass garantiza que la función g es continua.

ii) Al considerar la función f_n tendremos mínimos absolutos en los valores $u = i2^{-n}$, donde $i = 0, 1, 2, \ldots, 2^n$.



Si $k \geq n$ entonces $f_k(u) = 0$, $u = i2^{-n}$, pues $2^k u$ es un número natural. Recordemos que

$$\varphi(2^k u) = 0\,.$$

De manera que si $u = i \cdot 2^{-n}$, entonces,

$$g(u) = f_0(u) + f_1(u) + f_2(u) + \cdots + f_{n-1}(u)\,.$$

iii) Veamos que la función g no es derivable. Es fácil ver que cualquier x en $[0,1]$ se encuentra en un intervalo cuyos extremos son de la forma: $v_n = i2^{-n}$ y $\vartheta_n = (i+1)2^{-n}$ para algún i, por lo tanto puede verse, tal x, como *límite de las sucesiones* v_n y ϑ_n cuando

$n \to \infty$. Para estudiar la posible derivabilidad de g en x, vamos a considerar los cocientes:

$$\frac{g(\vartheta_n) - g(v_n)}{\vartheta_n - v_n}.$$

Por la observación hecha en (ii), tendremos que:

$$\frac{g(\vartheta_n) - g(v_n)}{\vartheta_n - v_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k(\vartheta_n) - f_k(v_n)}{\vartheta_n - v_n}.$$

Ahora, cada cociente:

$$\frac{f_k(\vartheta_n) - f_k(v_n)}{\vartheta_n - v_n}$$

es 1 ó -1.

Por lo tanto,

$$\frac{g(\vartheta_n) - g(v_n)}{\vartheta_n - v_n} = \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm \ldots (n\text{veces})$$

de modo que no existe el límite cuando $n \to \infty$. En conclusión g no es derivable en ningún punto.

Conviene recordar, para dar una mejor perspectiva a estos trabajos, el resultado de Lebesgue (op. cit.):

> *Si f es una función monótona, entonces f es derivable excepto sobre un conjunto de medida nula.*

Quizá esto sea lo más próximo que se pueda estar del resultado tan buscado sobre la derivabilidad de una función continua.

6 Retorno a la Geometría.

Suele ocurrir que, bajo la influencia de un modo de pensar poderoso, los científicos de una disciplina exageren las bondades o la interpretación de los nuevos enfoques. En cierto momento –comienzos del siglo XX– se empezó a escuchar la voz de una corriente que proponía equilibrar la excesiva aritmetización, con un enfoque más geométrico. Una de estas voces fue la del matemático sueco Helge von Koch. Conviene citar en extenso su punto de vista:

> *Hasta antes de Weierstrass, era una creencia bastante común entre los miembros de la comunidad científica, que toda curva continua tiene una tangente bien determinada -excepto en algunos puntos singulares. Se sabe que ocasionalmente, los geómetras han tratado de establecer este resultado, sin duda apoyándose en la representación gráfica de las curvas. Aún cuando el ejemplo de Weierstrass ha corregido esta falsa concepción de una vez y para siempre, me parece que su ejemplo no es satisfactorio desde un punto de vista geométrico... la expresión analítica oculta la naturaleza geométrica de la curva correspondiente... y no se ve por qué carece de tangente.*

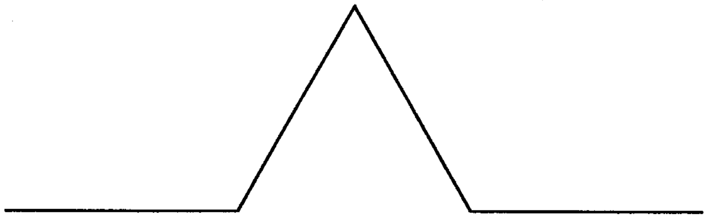
Luego continúa von Koch:

> *Por esta razón me he preguntado -y creo que esta cuestión es importante desde un punto de vista didáctico tanto para la geometría como para el análisis- si uno podría hallar una curva sin tangentes para la que los aspectos geométricos estén de acuerdo con todo el contexto. La curva que he encontrado y que es el objeto de este artículo, está definida mediante una construcción muy simple y creo, que cualquiera podrá ver intuitivamente la imposibilidad de la existencia de la tangente.*

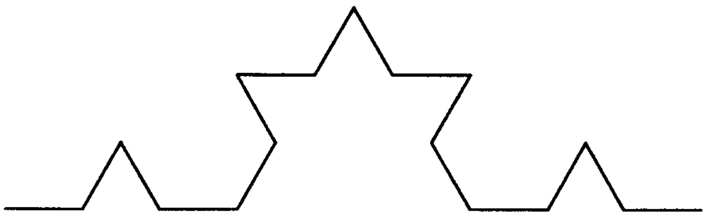
Estas citas se pueden hallar en la introducción del artículo *Sobre curvas continuas sin tangentes, constructibles mediante la geometría elemental* que apareció en 1904. Se reproduce en el libro Classics on Fractals, de G. Edgar, 1993.

Para finalizar, vamos a estudiar el ejemplo de von Koch.

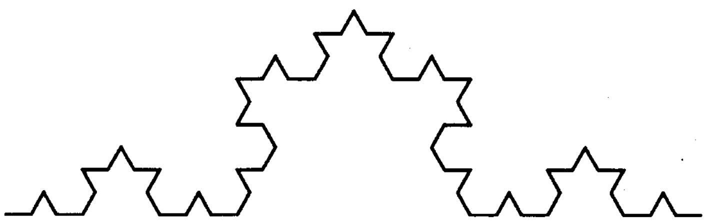
Se parte de un segmento de longitud L y se divide en tres partes iguales. Se extrae la parte (segmento) central y se reemplaza por dos segmentos iguales al extraído, tal como queda ilustrado en la figura básica siguiente:



La segunda etapa de la construcción de la curva de von Koch consiste en colocar una copia de la figura básica (la del dibujo anterior) sobre cada uno de los segmentos de los que está compuesta esta figura básica. Como la figura original está compuesta de cuatro segmentos (de igual longitud) las cuatro copias que vamos a colocar serán modelos a escala (¿cuál es la escala?) de la figura original. El resultado es el siguiente:



El procedimiento de ir colocando copias a escalas de la figura original se continúa indefinidamente. La figura que resulta como límite de este procedimiento, es la *curva* de von Koch. Para tener una mejor idea de los resultados de las etapas de la construcción, mostremos la tercera etapa:



El lenguaje de programación Logo, nos permite construír de una manera relativamente sencilla, un programa para graficar cualquiera de las etapas. Las instrucciones básicas del lenguaje que serán empleadas son: Forward (abreviada Fd) que dada en la forma Fd: N, le indica a *la tortuga* (que es la forma usual del indicador del movimiento) que avance, en la dirección en la que está *mirando*, N pasos. La otra instrucción es Right (abreviada Rt) que dada en la forma Rt α le indica a la tortuga que gire a su derecha un ángulo de α grados. Para girar a la izquierda de la tortuga, se usa Left (abreviada Lt). Entonces, para dibujar la figura básica podemos usar el programa siguiente:

```
To Koch1 :L
Fd :L/3
Lt 60
Fd :L/3
Rt 120
Fd :L/3
Lt 60
Fd :L/3
End
```

La primera línea del programa *To Koch1:L* se necesita para poner un nombre al mismo (que siempre empieza con *To*) y el parámetro :L (precedido de los dos puntos) indica que al momento de la ejecución deberá dársele un valor numérico. Por ejemplo, *Koch 100* quiere decir que se dibujará la figura básica a partir de un segmento cuya longitud es 100 unidades. ¿Qué ocurre si, siguiendo nuestra descripción por etapas, quisiéramos dibujar la segunda etapa? cada uno de los segmentos de longitud L/3 de la figura básica, debe ser reemplazado por una copia a escala de esa misma figura básica (a la que nos referiremos como Koch1). Cada una de las copias a escala que necesitamos, resulta de la ejecución del programa Koch1: L/3. Entonces, el programa para graficar la segunda etapa, que llamaremos Koch2, es el siguiente:

```
To Koch2 :L
Koch1 :L/3
Lt 60
Koch1 :L/3
Rt 120
Koch1 :L/3
```

```
Lt 60
Koch1 :L/3

End
```

Para graficar la figura correspondiente a la tercera etapa, Koch 3, necesitamos sustituir cada segmento de la figura Koch 2 por una copia de la figura básica (llamada también *generador de la curva de von Koch.* Es notorio que obtendremos el mismo resultado si sustituimos cada segmento de la figura básica por una copia a escala de la figura Koch2. Procediendo de esta última manera, el programa correspondiente a Koch 3 queda así:

```
To Koch3 :L
Koch2 :L/3
Lt 60
Koch2 :L/3
Rt 120
Koch2 :L/3
Lt 60
Koch2 :L/3

End
```

Este proceso puede continuarse hasta la etapa que se desse. Observando con cuidado los programas para graficar Koch 1, Koch 2 y Koch 3, uno pude abstraer la forma general de un programa para graficar Koch N, para cualquier N, una vez que uno tiene el programa correspondiente a Koch(N-1). Este programa es:

```
To KochN :L
Koch(N-1) :L/3
Lt 60
Koch(N-1) :L/3
Rt 120
Koch(N-1) :L/3
Lt 60
Koch(N-1) :L/3

End
```

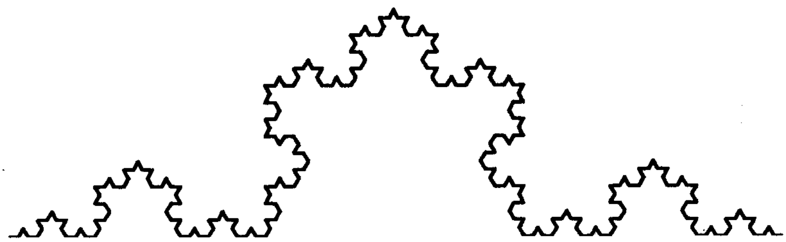
Obsérvese que Koch 1 también se puede graficar siguiendo esta forma, para la cual debemos tener, a su vez, lo que podríamos llamar Koch 0, que se reduce al trazado de un segmento: To Koch 0: L[Fd: L] End. Logo permite la construcción mediante la recursividad (que no es privativa de este lenguaje) de un programa que nos permite *de un golpe* graficar la etapa que se desee, pues en ese mismo programa estarán las instrucciones para graficar todas las etapas anteriores necesarias. Un procedimiento de esta naturaleza dependerá de dos parámetros: la longitud del segmento *inicializador*, L y el número natural correspondiente a la etapa (o *nivel*) que se quiera graficar. Tal programa (que ya debe resultar natural para el lector) es el siguiente:

```
TO KOCH :N :L
IF :N=0 [FD :L STOP]
KOCH :N-1 :L/3
LT 60
KOCH :N-1 :L/3
RT 120
KOCH :N-1 :L/3
LT 60
KOCH :N-1 :L/3

END
```

Comparando este programa con el correspondiente a Koch N: L vemos dos diferencias. La primera es que en KOCH :L : N, aparecen dos parámetros y no uno como en Koch N: L. El parámetro : L, indica siempre la longitud del segmento inicializador, a partir del cual haremos las construcciones de las etapas. El parámetro : N corresponde a la etapa que se quiere graficar. La otra diferencia entre ambos programas, KOCH: N: L y Koch N: L, aparece en la primera línea de KOCH: N: L, que es: "IF :N=0 [FD: L STOP]". Esta línea permite resolver el caso N=0, que se reduce a trazar un segmento. El efecto es el mismo que tiene la ejecución de Koch 0: L. Vale la pena que el lector haga la descripción completa para el caso N=2 en el programa KOCH: N: L. Es una actividad que recomendamos, ya que le permitirá comprender mejor cómo funciona la recursividad.

En la pantalla de una computadora sólo podremos representar un número, mas bien pequeño, de etapas del proceso debido a las limitaciones de la resolución de la pantalla. A continuación, presentamos la gráfica que corresponde a N=4 en este programa. A cada valor de N corresponde una gráfica; es como tener una sucesión donde los términos representan las gráficas que se van aproximando a la curva ideal de von Koch. Veamos la gráfica:



En su momento, las funciones continuas sin derivada, las curvas continuas que llenan un cuadrado y muchos otros ejemplos, fueron considerados como *patológicos*. Todos hemos sabido de la expresión del gran matemático Hermite, quien decía que daba la espalda a *esa plaga de funciones que no tienen derivadas*. Este tipo de expresiones son reflejo de la ideología explícita e implícita que siempre está presente en el trabajo científico. Si el lector tuviese dudas sobre esta última afirmación, bastaría remitirlo a la historia de los conflictos padecidos por Cantor durante la elaboración de su teoría de los conjuntos infinitos.

Por su elocuencia y pertinencia, consideramos interesante en este momento traer una cita en extenso de Dyson (1978):

> *Una gran revolución en ideas separa la matemática clásica del siglo XIX, de la matemática del siglo XX. La matemática clásica tuvo sus raíces en las estructuras regulares de Euclides y en la dinámica continua de Newton. La matemática moderna comienza con la teoría de conjuntos de Cantor y con la curva de Peano, que llena un cuadrado (añadimos nosotros: y con la curva de Weierstrass, la de von Koch, con la construcción geométrica, en manos de Hilbert de la curva analítica de Peano)... estas estructuras fueron vistas al comienzo como* patológicas... *más cercanas a la música atonal y a la pintura cubista... estos ejemplos fueron importantes para mostrar que el mundo de la matemática poseía*

> *una riqueza de posibilidades que iba más allá de las simples estructuras que podían verse en la naturaleza. La matemática del siglo XX se desarrolló en la creencia de que había trascendido los límites impuestos por sus orígenes naturales. Ahora como Mandelbrot nos muestra ejemplo tras ejemplo, la naturaleza ha hecho una broma a los matemáticos... las mismas estructuras patológicas inventadas para romper los nexos con la naturaleza, resulta ahora que son inherentes a la descripción de los objetos naturales que nos rodean.*

La situación descrita aquí es característica de las matemáticas: una permanente tensión entre lo concreto y lo abstracto. Lo que es abstracto en un nivel de desarrollo es concreto en un nivel posterior. Allí encuentra una explicación más profunda. Así, las *curvas patológicas* son actualmente los ejemplos primeros en la teoría de los objetos fractales. Weierstrass seguirá con nosotros.

Referencias

[1] Billingsley, P. *Van der Waerden's continuous, nowhere differentiable function.* Am. Math. Monthly, **89** (9), (1982). p. 691.

[2] Bottazzini, U. *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weiestrass.* Springer-Verlag, New York (1986).

[3] Dyson, F. *Characterizing Irregularity.* Science, 200 (1978), pp. 677–678.

[4] Edgar, G. *Classics on Fractals.* Addison-Wesley. (1993).

[5] Edwards, C. *The Historical Development of Calculus.* Springer-Verlag, New York. (1979).

[6] Hairer, E. y Wanner, G. *Analysis by its History.* Springer-Verlag, New York. (1996).

[7] Hawkins, T. *Lebesgue Theory of Integration, its Origin and Developments.* Chelsea Publishings Editions, second edition. (1970).