Miscelánea Matemática **41** (2005) 1–9 SMM

La conjetura de Saari
Una nota histórica y algo más

Ernesto Pérez-Chavela
Departamento de Matemáticas
UAM-Iztapalapa

1. Planteamiento de la conjetura

El marco de referencia para el estudio de la conjetura de Saari es la mecánica celeste, importante rama de las matemáticas que tiene como principal objetivo el estudio del problema de los n–cuerpos, es decir de analizar y predecir los movimientos de n–masas en el cielo moviéndose bajo la influencia de las fuerzas gravitacionales. Este es un problema realmente viejo si pensamos en la evolución del hombre, podemos atrevernos a decir que una de las primeras visiones del ser humano al adoptar una posición erguida fue el cielo y sus estrellas; aprendiendo muy rápidamente que la posición de las estrellas le permitía orientarse, pudiendo de esta forma ir de un lugar a otro y regresar a aquellos sitios que le parecían más seguros y que le proveían de recursos; tiempo después estos conocimientos le permitieron conducir sus rebaños de manera eficaz. Lo anterior sugiere que la mecánica celeste es la profesión más antigua del mundo, afirmación que da pauta a polemizar sobre el punto.

Históricamente, el papel jugado por los antiguos astrónomos y astrólogos de la humanidad fue esencial en el desarrollo del problema de los n–cuerpos; sin embargo, es hasta Newton y el descubrimiento del cálculo, cuando se hace el planteamiento del problema en la forma que lo conocemos actualmente. Conside-remos a los cuerpos celestes como masas puntuales en el espacio, así el i–ésimo cuerpo celeste de masa m_i está colocado al tiempo t en la posición $r_i(t)$. Partiendo del hecho de que los cuerpos se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias y aplicando la segunda ley de Newton ($F = ma$), vemos que las ecuaciones de movimiento para el problema de los n–cuerpos están dadas por:

$$m_i\ddot{r}_i = \sum_{j\neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}(r_j - r_i) = \frac{\partial U}{\partial r_i}, \tag{1.1}$$

donde $r_{ij} = |r_j - r_i|$ y U es la función potencial dada por $U = \sum_{j<i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$.

El término cúbico en el denominador de la ecuación (1.1) viene de multiplicar la magnitud de la fuerza por el vector unitario $(r_j - r_i)/|r_j - r_i|$ para obtener la dirección de la fuerza correspondiente. El origen del sistema lo fijamos en el centro de masa, por lo que a lo largo de este trabajo supondremos que $\sum_{i=1}^n m_i r_i = 0$.

Si definimos el vector de posición como $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$, entonces el vector momento es $p = Mr$ donde M es la matriz diagonal $M = \mathrm{diag}(m_1,m_1,m_1, \cdots, m_n,m_n, m_n)$; de esta manera el sistema (1.1) puede ser escrito en forma Hamiltoniana, donde el Hamiltoniano es una primera integral de movimiento conocida como la energía total del sistema dada por

$$H(r,p) = \frac{1}{2}p^t M^{-1} p - U(r), \tag{1.2}$$

$T = \frac{1}{2}p^t M^{-1} p$ es la energía cinética del sistema (ver [14] para mayor detalle).

Es claro que el sistema (1.1) no está definido cuando dos o más partículas están en una misma posición, es decir, cuando hay colisión de dos o más cuerpos, para aclarar esto definamos

$$\Delta_{ij} = \{(r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{R}^{3n} \mid r_i = r_j\} \quad \text{y} \quad \Delta = \bigcup_{i<j} \Delta_{ij}.$$

Dado r en $\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ identificamos su espacio tangente con $\mathbb{R}^{3n}$. Entonces el espacio fase del sistema (1.1) es

$$\Omega = (\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta) \times T\mathbb{R}^{3n}, \tag{1.3}$$

donde $T\mathbb{R}^{3n}$ es el haz tangente de $\mathbb{R}^{3n}$. Para cada punto $(r,p) \in \Omega$, la teoría de ecuaciones diferenciales nos dice que por este punto pasa una única solución definida en un intervalo maximal, la cual es analítica.

El problema es que, en general para $n \geq 3$, no sabemos la forma de las soluciones ni si el intervalo maximal donde están definidas es finito o infinito. El primer caso corresponde a las singularidades del sistema (1.1), un tema apasionante y complejo que espero contarles en otra ocasión; en este pequeño escrito me restringiré a las soluciones enteras, es decir, a aquellas definidas para todo tiempo t. Resumiendo brevemente todo lo anterior tenemos que, en el problema de los n–cuerpos para $n=2$ (conocido como el problema de Kepler), se conocen de forma explícita todas las soluciones. Pero para $n \geq 3$ se conoce muy poco, siendo una gran dificultad las singularidades del sistema.

Ya que aquí estamos interesados en estudiar las soluciones acotadas del sistema (1.1), necesitamos definir algunos nuevos conceptos.

Definición 1.1. Decimos que una configuración $r=(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ es central (CC), si para cada i el vector de posición y el vector de aceleración son proporcionales y la constante de proporcionalidad es la misma para todos los cuerpos.

En forma algebraica, $r=(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ es una configuración central si

$$\ddot{r}_i = \lambda r_i \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.4}$$

Usando las ecuaciones de movimiento (1.1), tenemos que una configuración central debe satisfacer

$$\nabla_i U = \lambda m_i r_i \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.5}$$

Ya que la conjetura de Saari se refiere a movimientos planos, a partir de aquí restringiremos nuestro análisis al estudio de las ecuaciones (1.1) y (1.5) definidas en $\mathbb{R}^2$. Es fácil verificar que dada una configuración central, ésta es invariante bajo homotecias y rotaciones, así que cuando contemos CC lo haremos módulo estos movimientos euclidianos. En este contexto, en el problema de los 3–cuerpos, existen exactamente 5 CC, dos en forma de triángulo equilátero (correspondientes a las dos posibles orientaciones de un triángulo en el plano) y 3 colineales (correspondientes a cada una de las posibles permutaciones de las partículas). Fue apenas en el 2004 que R. Moeckel y M. Hampton [4] demostraron que el número de CC para $n=4$, es finito, aunque la cota que dan los autores dista mucho de ser óptima. Para $n \geq 5$ no se sabe siquiera si el número de CC es finito o no. El problema sobre la finitud de las CC fue planteado por S. Smale [13] como uno de los principales problemas a resolver en el siglo XXI. Desafortunadamente para los mecánicos celestes no fue incluido entre los problemas del millón de dólares.

La importancia y aplicaciones de las CC son muchas y variadas; por ejemplo, se conoce que la colisión total en el problema de los n–cuerpos es asintótica a una CC y que muchos escapes de partículas también son asintóticos a CC, descubrimiento que ha sido de gran utilidad para los astrofísicos. Pero sin duda, la principal aportación de las CC, es que ellas generan las únicas soluciones explícitas del problema de los n–cuerpos, conocidas como soluciones homográficas, donde las partículas se mueven de tal forma que la configuración que forman al variar el tiempo t siempre es similar a la CC original, es decir:

Definición 1.2. Decimos que una solución $r(t) = (r_1(t), \cdots, r_n(t))$ es homográfica, si existe una función escalar $\nu(t)$ y una matriz de rotación $R(t)$ tal que, para toda $i = 1, 2, \cdots, n$ y para todo tiempo t, se tiene

$$r_i(t) = \nu(t)R(t)r_i^o,$$

donde $q = (r_1^o, r_2^o, \cdots, r_n^o)$ es una CC.

Existen dos casos límite de soluciones homográficas, el primero corresponde a soluciones que están contrayéndose o dilatándose sin rotación, es decir, donde $R(t)$ es la matriz identidad; este tipo de soluciones son llamadas homotéticas. El otro caso límite corresponde a soluciones donde la configuracion está sólo rotando, es decir donde $\nu(t) = 1$, caracterizadas por

$$r_i(t) = R(t)r_i^o \quad 1 = 1, 2, \cdots n,$$

y son llamadas equilibrios relativos.

En estas últimas soluciones el sistema rota alrededor del centro de masa como si se tratara de un cuerpo rígido, la velocidad angular ω es constante y las distancias mutuas no cambian cuando t varía. El nombre de equilibrio relativo viene del hecho de que si a nuestro sistema de referencia lo hacemos rotar alrededor del centro de masa con la misma velocidad angular ω, entonces en el nuevo sistema, las partículas permanecen en reposo.

Ya que estamos interesados en el estudio de soluciones acotadas, la forma natural de medir los movimientos acotados es un viejo concepto de la física conocido como momento de inercia (una forma cuadrática positiva definida para los matemáticos más puristas) y definido por

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i |r_i|^2 = \frac{1}{2\mu} \sum_{i \neq j} m_i m_j r_{ij}^2.$$

Donde $\mu = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ es la masa total del sistema. Tenemos ahora todos los elementos para establecer la conjetura postulada por D. Saari en 1970, a partir de un amplio estudio de los movimientos acotados en el problema de los n–cuerpos, la cual dice:

“Toda solución plana del problema de los n–cuerpos que tiene momento de inercia constante es un equilibrio relativo”

2. Sobre la conjetura

La historia de las CC y los equilibrios relativos es muy vieja: en 1764, L. Euler publicó un bello tratado sobre el problema de los tres cuerpos donde demuestra que, si tres partículas de masas arbitrarias son colocadas sobre una línea, de tal forma que la razón entre sus distancias satisfacen una complicada fórmula que depende sólo de las masas (para los fines de este artículo resulta irrelevante escribirla) y si además se dan ciertas velocidades iniciales, entonces las partículas se mueven periódicamente en elipses, manteniendo en todo momento la configuración colineal, con la razón de distancias invariantes.

En 1772, J.L. Lagrange redescubrió las soluciones de Euler y encontró una segunda familia de órbitas periódicas, mostrando que si tres masas arbitrarias son colocadas en los vértices de un triángulo equilátero y si las velocidades iniciales son escogidas adecuadamente, entonces las partículas se mueven periódicamente en elipses preservando la configuración de triángulo equilátero, el triángulo podrá cambiar de tamaño, pero siempre será equilátero.

Las familias de orbitas periódicas descubiertas por Euler y Lagrange son soluciones homográficas. En ambas familias, si la velocidad inicial asignada es igual a cero, entonces las partículas se mueven en dirección del centro de masa, dando lugar a una colisión triple en tiempo finito; éstas son las soluciones homotéticas definidas en la sección anterior. Las órbitas elípticas donde se mueven las partículas degeneran a segmentos de línea. Cuando las tres partículas se mueven en círculos, tenemos los equilibrios relativos; en este caso todas las partículas se comportan como una linda coreografía, donde todas las masas bailan la misma danza.

Antes de regresar a la conjetura de Saari, recordemos la identidad de Lagrange-Jacobi, fórmula que relaciona la segunda derivada del momento de inercia con la energía potencial o haciendo uso de (1.2), con la energía cinética, dada por

$$\ddot{I} = U + 2h, \tag{2.1}$$

haciendo uso de la ecuación para la energía total del sistema $h = T - U$ (1.2), la identidad de Lagrange-Jacobi puede también escribirse como

$$\ddot{I} = T + h. \tag{2.2}$$

Por lo tanto, para los movimientos donde el momento de inercia es constante, tenemos que $\ddot{I} = 0$, de donde

$$U = -2h, \quad T = -h. \tag{2.3}$$

La ecuación (2.3) establece que si el momento de inercia es constante entonces tanto la energía potencial como la energía cinética son constantes y la energía total h es negativa. Tenemos también el siguiente resultado

Proposición 2.1. *Si el momento de inercia es constante, entonces todas las distancias mutuas r_{ij} son acotadas superior e inferiormente.*

Demostración. Ya que el momento de inercia I y la energía potencial U son constantes, tenemos que

$$I = \frac{1}{\mu}\sum_{i<j} m_i m_j r_{ij}^2 \geq \frac{m_i m_j}{\mu} r_{ij}^2 \tag{a}$$

y

$$U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \geq \frac{m_i m_j}{r_{ij}}. \tag{b}$$

Por tanto, por (a) y (b) tenemos que

$$0 < \frac{m_i m_j}{U} \leq r_{ij} \leq \sqrt{\frac{\mu I}{m_i m_j}}.$$

La proposición anterior muestra que si el momento de inercia es constante, entonces el movimiento es acotado y no existe colisión entre las partículas. Con todo lo anterior uno podría pensar que la conjetura de Saari es fácil de resolver, sin embargo no es así . Desde que fue planteada en 1970, ha sido atacada sin éxito alguno por muchos matemáticos , de hecho, a lo largo de los años aparecieron dos artículos afirmando tener la prueba de la conjetura, un tiempo después los dos sucumbieron a un escrutinio más estricto ([8], [9]).

En los últimos años el interés en la conjetura tomó nuevos bríos debido al sorprendente resultado de Chenciner y Montgomery [2] sobre la existencia de la solución en forma de ocho para el problema de los tres cuerpos con masas iguales; hay evidencias numéricas de que esta órbita tiene momento de inercia *casi constante*, pero hasta el momento no hay ninguna demostración analítica de este hecho.

En 2002 C. McCord prueba la conjetura para el problema de los tres cuerpos con masas iguales [5]. En 2003 R. Moeckel con ayuda de una computadora, obtiene una demostración de la conjetura para el problema general de los tres cuerpos [7]. En la última sección de este escrito voy a mostrarles nuestra pequeña contribución en el camino de entender más sobre la conjetura. En [3], nosotros probamos la conjetura para el problema colineal de los n–cuerpos.

3. El problema colineal de los n-cuerpos

El problema colineal de los n–cuerpos es un caso muy particular del problema general de los n–cuerpos, donde las partículas están sobre una línea que rota en el plano alrededor del centro de masa. Es bien conocido (ver por ejemplo, [14]), y fácil de checar que toda solución colineal es plana.

Sea $\mathbf{K}$ el momento angular total y $\mathbf{K}_i$ el momento angular del cuerpo P_i alrededor del centro de masas. Denotemos por $\mathbf{M}_i$ el momento de fuerza para el cuerpo P_i. $\mathbf{F}_{ij}$ es la fuerza actuando sobre P_i por la acción de P_j; en nuestro caso tenemos que $\mathbf{F}_{ij} = \nabla_{\mathbf{r}_{ij}} U$. Contamos ahora con todos los elementos para probar el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Toda solución colineal del problema de los n–cuerpos con momento angular distinto de cero es una solución homográfica.*

Demostración : Ya que $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{F}_{ij}$ son colineales, la torca (tasa de cambio del momento angular) se anula

$$\dot{\mathbf{K}}_i = \mathbf{M}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = 0. \tag{3.1}$$

Esto implica que $\mathbf{K}_i$ es un vector constante. Sea K_i la componente de $\mathbf{K}_i$ ortogonal al plano de movimiento, entonces $K_i = c_i$, donde c_i es una constante. Por otro lado, la componente del momento angular ortogonal al plano de movimiento también se puede escribir como

$$K_i = c_i = m_i r_i^2(t)\omega(t), \tag{3.2}$$

donde la velocidad angular ω es la misma para todas las partículas, ya que ellas están sobre una línea. A priori r_i y la velocidad angular ω pueden depender del tiempo.

Consideremos ahora la razón entre las componentes del momento angular de cualesquier dos cuerpos P_i y P_j. Usando la ecuación (3.2), tenemos que

$$\frac{c_i}{c_j} = \frac{m_i}{m_j}\frac{r_i^2}{r_j^2}, \tag{3.3}$$

lo cual implica que la razón entre distancias es

$$\frac{r_i(t)}{r_j(t)} = \sqrt{\frac{m_j c_i}{m_i c_j}}. \tag{3.4}$$

Por lo tanto, la configuración geométrica de los n–cuerpos permanece similar a ella misma cuando t varía, es decir, la solución es homográfica.

El caso particular del problema colineal de los 3–cuerpos fue demostrado por primera vez por Pizzetti, en 1904 [10, 14]. Aún en este caso nuestra demostración es más corta, más simple y más general. La conjetura de Saari resulta ser un corolario del Teorema (3.1).

Corolario 3.2. *Si el momento de inercia I es constante a lo largo de una solución, entonces ésta es un equilibrio relativo.*

Demostración: La componente del momento angular ortogonal al plano de movimiento se puede escribir como

$$K = \sum_{i=1}^{N} K_i = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \omega I = C, \tag{3.5}$$

ya que I y K son constantes, también lo es ω. Usando la ecuación (3.2), concluímos que todas las distancias mutuas son constantes. Esto completa la demostración del corolario, y por ende, de la conjetura de Saari para el caso colineal.

En [3], nosotros demostramos la conjetura de Saari en el caso colineal, para una familia muy amplia de potenciales que dependen sólo de las distancias mutuas entre las partículas.

Referencias

[1] A. Albouy and A. Chenciner, *Le problème des n corps et les distances mutuelles*, Invent. Math. **131** (1998), 151–184.

[2] A. Chenciner and R. Montgomery, *A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal massess*, Annals of Math. **152**, (2000), 881–901.

[3] F. Diacu, E. Pérez-Chavela and M. Santopetre *Saari's Conjecture for the Collinear n-Body Problem.* Transactions, AMS. (por aparecer).

[4] M. Hampton and R. Moeckel, *Finiteness of Relative Equilibria of the Four-Body Problem*, preprint http//www.math.umn.edu/rick/research/

[5] C. McCord, *Saari's conjecture for the three-body problem with equal massess*. Celestial Mech. Dynam. Astronom. **89**, (2004), 99–118.

[6] K. Meyer and G.R. Hall, Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem, Applied Mathematical Sciences, 90, Springer: New York (1992).

[7] R. Moeckel, *A Computer Assisted Proof of Saari's Conjecture for the Planar Three-Body Problem*, preprint http//www.math.umn.edu/rick/research/

[8] J. I. Palmore, *Relative equilibria and the virial theorem*, Celestial Mech. Dynam. Astrnom. **19**, (1979), 167–171.

[9] J. I. Palmore, *Saari's conjecture revisited*, Celestial Mech. Dynam. Astrnom. **25**, (1981), 79–80.

[10] P. Pizzetti, *Casi particolari del problema dei tre corpi*, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei s.5 **13**, (1904), 17–26.

[11] D. Saari, *On bounded solutions of the n-body problem*, Periodic Orbits, Stability and resonances , G.E.O., Giacaglia (Ed.), D. Riedel, Dordrecht, 76-81 (1970).

[12] C. Simó, *New families of Solutions in N-Body Problems*, Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000), 101–115, Progr. Math., 201, Birkhäuser, Basel (2001).

[13] S. Smale, Mathematical problems for the next century, in *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, and B. Mazur, editors, Amer. Math. Society, 2000, pp. 271–294.

[14] A. Wintner, The Analytical Foundations of Celestial Mechanics, Princeton University Press (1941).