La Transformación Fi.

Autor:
Ing. Mario Fuentes Hernández.

Ingeniero Físico Industrial, egresado del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey en Junio de 1985.

Dirección:
Paseo de San Marino #4028. Col. Las Torres , Monterrey N.L.
Teléfono:
(91-83) 57-9391.

PROLOGO.

El siguiente trabajo versa sobre la Transformación Fi y la Transformación Fi Fraccionaria, este trabajo está enfocado básica_ mente a la Solución de Ecuaciones en Diferencias Finitas, Ecuaciones Diferenciales y Funciones Trascendentes Superiores, observando además las Operaciones con Operadores del Tipo Fraccionario, como lo serán la Diferenciación y la Integración Fraccionarias.

Se requerirán para el entendimiento de este trabajo tener nociones de Series, Ecuaciones Diferenciales, Ecuaciones en Diferencias Finitas y de Funciones Trascendentes.

La utilidad de la Transformación Fi se verificará en la simplificación de la obtención de las fórmulas de Rodrigues de funciones Trascendentes Superiores, ya que resulta por propia naturaleza de la Tansformación Fi dar el resultado de esa forma; se obtienen algunos resultados bastante interesantes, como son la obtención de la solución de la Ecuación Hipergeométrica e Hipergeométrica Confluente en Fórmula de Rodrigues al igual que la de las Fuciones de Bessel, también la obtención de las Funciones (no Polinomiales) de Tchebyshev y además se presentan de funciones sencillas como lo son los Polinomios de Laguerre, Hermite y Legendre; todas ellas en Fórmula de Rodrigues; resulta una ventaja en la solución de ecuaciones diferenciales en la Físico-Matemática, Mecánica Cuántica, Matemática Pura y aplicada, y en la Teoría de Control Moderno.

INDICE TEMATICO.

Tema: (Continuación).

Ecuación Hipergeométrica.

Ecuación Hipergeométrica Confluente.

Ecuación Hipergeométrica con el Cambio de Variable de a .

Ecuación Hipergeométrica Confluente con el Cambio de Variable de a .

Ecuación de Tchebyshev. (Funciones No Polinomiales).

Ejemplos de Ecuaciones Hipergeométricas:

Polinomios de Legendre.

Polinomios de Tchebyshev.

Polinomios de Laguerre.

Polinomios de Hermite.

Funciones Asociadas.

Solución de las Ecuaciones de Bessel (Funciones Bessel de Primera Clase) a partir de $J_0(x)$.

La Transformación Fi Fraccionaria y la Derivación y la Integración del Tipo Fraccionario.

Ejemplos de Integración y de Derivación Fraccionaria.

Bibliografía.

LA TRANSFORMACION FI.

INTRODUCCION:

Surgió de la idea de solucionar ecuaciones de diferencias; por un método sencillo; existen varios métodos como lo es el empleo de la Transformada Z, los Métodos Numéricos, etc...

La importacia de las Ecuaciones de Diferencia radica en el hecho de lo comunes que son y que aparecen en muy variados casos, como lo es por ejemplo la Resolución de Ecuaciones Diferenciales por el método de Series de Potencias; aparecen también en la Teoría de Control Moderno, ya que se utilizan para modelar sistemas o para implementar controladores o compensadores de sistemas discretos; además de aparecer en otras ramas de la Ciencia, como lo es la Física, las Matemáticas y la Química.

La Transformación Fi se basa en el concepto de que el término enésimo de una serie será la derivada enésima de una función evaluada en cero; dicha función será llamada la Transformación Fi de los términos enésimos de la Serie. La Serie empezará en cero y se extenderá a infinito; los términos de índices negativos serán cero por definición.

En una Ecuación de Diferencias, el término enésimo depende de los anteriores, en una ecuación de K-ésimo orden, de la forma:

$$\alpha_n = f(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-3} \ldots \alpha_{n-K})$$

Un ejemplo clásico de una ecuación de deferencias es la ecuación que nos da los números de la Serie de Fibonaci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .

La ecuación es:

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + \alpha_n$$

siendo las condiciones iniciales: $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$.

El propósito de solucionar la ecuación de diferencias expresando el trmino ensimo en función de n , o sea:

$$a_n = f(n)$$

Se llamará transformación Fi al paso de la función discreta $a_n = f(n)$ a la función continua $A(x)$ y transformación Fi Inversa al paso de $A(x)$ a a_n donde:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

Donde evidentemente $A(x)$ deberá de ser desarrollable en series de Taylor en cero.

Otras ecuaciones importantes que aparecen en la Física-Matemática, son las que nos dan los Polinomios o Funciones de Legendre, Laguerre y Hermite; las cuales correspondientemente son:

$$(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1) x P_n(x) + n P_{n-1}(x)$$

$$L_{n+1}(x) = (2n - x + 1) L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$$

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x)$$

Se principiará como es lógico con la definición de que llamaremos Transformación Fi, se observará en que forma manipularla y cuándo es útil emplearla.

Definición: (de la Transformación Fi).

Sea la sucesión infinita $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$; la Transformación Fi de dicha sucesión, denotada por $\varphi\left\{\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\right\}$, o simplemente por $\varphi\{a_n\}$, se define como sigue:

$$A(x) = \varphi\{a_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

Se denotará de ahora en adelante $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ simplemente por a_n salvo en algunos casos especiales; donde para toda $n<0$, $a_n=0$.

1) **Propiedad de Linealidad.**

Si $\varphi\{a_n\}=A(x)$ y $\varphi\{b_n\}=B(x)$ entonces $\varphi\{K_1 a_n+K_2 b_n\}=K_1 A(x)+K_2 B(x)$ para K_1 y K_2 constantes.

Demostración:

$$\varphi\{K_1 a_n+K_2 b_n\} = \sum_{n=0}^{\infty}(K_1 a_n+K_2 b_n)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{K_1 a_n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{K_2 b_n x^n}{n!} =$$

$$K_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n!} + K_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n x^n}{n!} = K_1 A(x) + K_2 B(x)$$

2) **Multiplicación por K^n (K constante).**

Si $\varphi\{a_n\}=A(x)$ entones $\varphi\{K^n a_n\} = A(Kx)$

Demostración:

$$\varphi\{K^n a_n\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{K^n a_n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{K^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}(Kx)^n = A(Kx)$$

3) Multiplicación por n.

Si $\varphi\{a_n\} = A(x)$ entones $\varphi\{n a_n\} = x \dfrac{dA(x)}{dx}$

Demostración:

$$\varphi\{n a_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n a_n x^n}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n a_n x^{n-1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \frac{d x^n}{dx} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{a_n x^n}{n!}\right) =$$

$$x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} = x \frac{dA(x)}{dx}$$

4) Diferenciación Parcial.

Si $\varphi\{a_n\} = A(x)$ y a_n es función de los parámetros $z_1, z_2, z_3 \ldots$ o sea, $a_n = f(z_1, z_2, z_3 \ldots)$ entonces: $\varphi\left\{\dfrac{\partial a_n}{\partial z_i}\right\} = \dfrac{\partial A(x)}{\partial z_i}$

Demostración:

$$A(x) = \varphi\{a_n(z_1, z_2, \ldots)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(z_1, z_2 \ldots)}{n!} x^n$$

entonces:

$$\frac{\partial A(x)}{\partial z_i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{a_n x^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial z_i} a_n(z_1, z_2 \ldots)\right] \frac{x^n}{n!} = \varphi\left\{\frac{\partial a_n}{\partial z_i}\right\}$$

5) Valor K-ésimo de a_n.

Si $\varphi\{a_n\} = A(x)$ entones $a_K = \left.\dfrac{d^K A(x)}{dx^K}\right|_{x=0} \quad \forall K \geq 0$

Demostración:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} \text{ entonces: } \frac{d^K}{dx^K} A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-K+1)\, a_n x^{n-K}}{n!} =$$

$$\sum_{n=K}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-K+1)\, a_n x^{n-K}}{n!} = \sum_{n=K}^{\infty} \frac{a_n x^{n-K}}{(n-K)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+K}\, x^n}{n!}$$

Evaluando en $x=0$, todos los demás se eliminan.
$(n=0)$

$$\left.\frac{d^K A(x)}{dx^K}\right|_{x=0} = a_K$$

6) Convolución Discreta.

Si $\varphi\{a_n\} = A(x)$, $\varphi\{b_n\} = B(x)$ y $C(x) = A(x) \cdot B(x)$ entones $\varphi^{-1}\{C(x)\} = c_n$

en donde $c_n = \displaystyle\sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} a_K b_{n-K} = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} b_K a_{n-K}$

Demostración:

$$A(x) \cdot B(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{K=0}^{n} \frac{a_K b_{n-K}}{K!\,(n-K)!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^n}{n!}$$

entonces $$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\,a_k b_{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k\,a_{n-k}$$

7) <u>Traslación en n ($+K$, K entero positivo).</u>

$$\text{Si } \varphi\{a_n\}=A(x) \text{ entonces } \varphi\{a_{n+k}\}=\frac{d^k A(x)}{dx^k}$$

<u>Demostración:</u>

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n X^n}{n!} \Rightarrow \frac{d^k A(x)}{dx^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\,a_n}{n!}X^{n-k}=\sum_{n=K}^{\infty}\frac{a_n X^{n-K}}{(n-k)!}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+k}}{n!}X^n = \varphi\{a_{n+k}\}=\frac{d^k A(x)}{dx^k}$$

8) <u>Toda Función que tenga Transformación Fi Inversa, será Analitica en Cero</u>

<u>Demostración:</u>

Como sabemos, es analítica una función en un punto, si es infinitamente dervable en dicho punto.

Entonces, como $a_k=\left.\frac{d^k A(x)}{dx^k}\right|_{x=0}$ y como la suma se extiende a infinito, entonces es infinitamente derivable, siendo por lo tanto analítica.

9) <u>Multiplicación por x .</u>

$$\text{Si } \varphi\{a_n\}=A(x) \text{ entonces } \varphi^{-1}\{xA(x)\}=n\,a_{n-1}$$

<u>Demostración:</u>

$$x\,A(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}X^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}X^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\,a_n X^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(n+1)\,a_n X^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,a_{n-1}X^n}{n!}$$
$$=\varphi\{n a_{n-1}\}$$

[recuerde que para $K<0$, $a_k=0$]

10) <u>Traslación en n ($-K$, K entero positivo).</u>

$$\text{Si } \varphi\{a_n\}=A(x) \text{ entonces } \varphi\{a_{n-k}\}=\int_0^x\int_0^{\tau_k}\cdots\int_0^{\tau_2}A(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2\cdots d\tau_k$$

<u>Demostración:</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n-k}X^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n X^{n+k}}{(n+k)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\;X^{n+k}}{(n!)(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\left(\int_0^x\int_0^{\tau_k}\cdots\int_0^{\tau_2}\tau_1^n\,d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_k\right)$$
$$=\int_0^x\int_0^{\tau_k}\cdots\int_0^{\tau_2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\tau_1^n}{n!}\right\}d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_k = \varphi\{a_{n-k}\}$$

11) Multiplicación por K^{-n}.

Si $\varphi\{a_n\}=A(x)$ entonces $\varphi\left\{K^{-n}a_n\right\}=A\left(\frac{x}{K}\right)$

Demostración:

$$\varphi\left\{K^{-n}a_n\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n K^{-n}X^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\,(x/K)^n}{n!}=A\left(\frac{x}{K}\right)$$

12) Multiplicación por X^K (K entero positivo).

Si $\varphi\{a_n\}=A(x)$ entonces $\varphi^{-1}\left\{x^K A(x)\right\}=a_{n-K}\,n\,(n-1)\cdots(n-K+1)=\frac{n!}{(n-K)!}a_{n-K}$

Demostración:

$$x^K A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n X^{n+K}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n X^{n+K}}{n!}\left[\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+K)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+K)}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(n+1)(n+2)\cdots(n+K)X^{n+K}}{(n+K)!}=$$

$$\sum_{n=0+K}^{\infty}\frac{a_n\,(n+1)(n+2)\cdots(n+K)\,X^{n+K}}{(n+K)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n-K}\,(n-K+1)(n-K+2)\cdots n\,X^n}{n!}=\varphi\left\{\frac{n!}{(n-K)!}\,a_n\right\}$$

13) División entre n.

Si $\varphi\{a_n\}=A(x)$ entonces $\varphi\left\{\frac{a_n}{n}\right\}=\int_0^x\frac{A(x)}{x}\,dx$

NOTA: Esto SIEMPRE que $A(0)=0$, o sea: $a_0=0$, o que: $\int_0^x\frac{A(x)}{x}dx$ exista.

Demostración:

$$\int_0^x\frac{A(x)}{x}\,dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n X^{n-1}}{n!}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\int_0^x X^{n-1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\,\frac{X^n}{n}=\varphi\left\{\frac{a_n}{n}\right\}\quad(a_0=0)$$

14) División entre $(n+1)$.

Si $\varphi\{a_n\}=A(x)$ entonces $\varphi\left\{\frac{a_n}{n+1}\right\}=\frac{1}{x}\int_0^x A(x)\,dx$

Demostración:

$$\frac{1}{x}\int_0^x A(x)\,dx=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n X^n}{n!}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n X^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n X^n}{(n+1)\,n!}=\varphi\left\{\frac{a_n}{n+1}\right\}$$

15) Multiplicación por $\frac{1}{n+\nu}$ (ν es real diferente de 0, −1, −2 ...)

Si $\varphi\{a_n\}=A(x)$ entones $\varphi\left\{\frac{a_n}{n+\nu}\right\}=X^{-\nu}\int_0^x X^{\nu-1}A(x)\,dx$

Demostración:

$$\varphi\left\{\frac{a_n}{n+\nu}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^n}{(n+\nu)n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^{n+\nu-\nu}}{(n+\nu)\,n!}=x^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^{n+\nu}}{(n+\nu)n!}=x^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\int_0^x x^{n+\nu-1}dx=$$

$$x^{-\nu}\int_0^x x^{\nu-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n!}\,dx = x^{-\nu}\int_0^x x^{\nu-1}A(x)\,dx.$$

16) Multiplicación por e^x .

Si $\varphi\{a_n\}=A(x)$ entonces $\varphi^{-1}\left\{e^x A(x)\right\}=\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K}a_K$

Demostración:

$$e^x A(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K}a_K\right)\frac{x^n}{n!}=\varphi\left\{\left(\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K}a_K\right)\right\}$$

17) Si no es posible encontrar la solución de una ecuación diferencial a través de la Transformación Fi Inversa, o sea encontrar a_n , significará que dicha función, que es solución de la ecuación diferencial, es discontinua, o no analítica en el origen.

18) Integral de Convolución.

Si $\varphi\{a_n\}=A(x)$ y $\varphi\{b_n\}=B(x)$ entonces $\int_0^x A(x-t)\cdot B(t)\,dt = A(x)\circledast B(x)$

entonces: $\varphi^{-1}\left\{A(x)\circledast B(x)\right\}=\sum_{K=0}^{n-1}a_K b_{n-K}=c_n\ ,\ (c_0=0)$

Demostración:

$$\int_0^x A(x-t)B(t)\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x-t)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n t^n}{n!}\right)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{K=0}^{n}\left\{\frac{a_K b_{n-K}}{K!\,(n-K)!}(x-t)^K t^{n-K}\right\}dt=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K}a_K b_{n-K}\int_0^x(x-t)^K t^{n-K}dt\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K}a_K b_{n-K}\frac{x^{n+1}}{(n+1)\binom{n}{K}}\right\}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{K=0}^{n}a_K b_{n-K}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{x^n}{n!}\sum_{K=0}^{n-1}a_K b_{n-K-1}\right\}=\varphi\left\{\sum_{K=0}^{n-1}a_K b_{n-K-1}\right\}$$

esto por la Definición de la Transformación Fi, además del proceso matemático:

$$c(x)=A(x)\circledast B(x) \qquad \varphi\{c_n\}=C(x)$$

$$\begin{cases} c_n=\sum_{K=0}^{n-1}a_K b_{n-K-1}\ , & n>0 \\ c_0=0 & n=0\end{cases}$$

TABLA DE PROPIEDADES DE LA TRANSFORMACION FI.

$K_1 a_n + K_2 b_n$	$K_1 A(x) + K_2 B(x)$	$\sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} a_K b_{n-K}$	$A(x) B(x)$
$K^n a_n$	$A(Kx)$	$\sum_{K=0}^{n-1} a_K b_{n-K-1}$	$\int_0^x A(x-t) B(t) dt$
$K^{-n} a_n$	$A(x/K)$	a_{n+K}	$\frac{d^K}{dx^K} A(x)$
$n a_n$	$x \frac{d}{dx} A(x)$	a_{n-K}	$\int_0^x \int_0^{T_K} \cdots \int_0^{T_2} A(T_1) dT_1 dT_2 \cdots dT_K$
$n^2 a_n$	$x^2 \frac{d^2 A(x)}{dx^2} + x \frac{dA(x)}{dx}$	$n a_{n-1}$	$x A(x)$
$n^K a_n$	$\left(x \frac{d}{dx}\right)^K A(x)$	$n(n-1) a_{n-2}$	$x^2 A(x)$
$\frac{\partial a_n(z_1, z_2, \ldots z_m)}{\partial z_i}$	$\frac{\partial}{\partial z_i} A(x, z_1, z_2 \ldots z_m)$	$\frac{n!}{(n-K)!} a_{n-K}$	$x^K A(x)$
a_K	$\left. \frac{d}{dx} A(x) \right\|_{x=0}$	$\frac{a}{n+\nu}$ $\{\nu \neq -1, -2, \ldots\}$	$x^{-\nu} \int_0^x x^{\nu-1} A(x) dx$

TABLA DE PARES DE TRANSFORMADAS FI.

$0^n = \delta(n)$	1	$k!\ \delta(n-k)$	x^k
1	e^x	$\operatorname{sen}(n\omega)$	$e^{x\cdot\cos\omega}\operatorname{sen}(x\cdot\operatorname{sen}\omega)$
n	$x\,e^x$	$\cos(n\omega)$	$e^{x\cdot\cos\omega}\cos(x\cdot\operatorname{sen}\omega)$
n^2	$xe^x(1+x)$	$\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{1}{n!}$	$J_0(\sqrt{x})$ *Bessel.
n^3	$xe^x(1+3x+x^2)$	$\omega^n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$	$\operatorname{sen}(\omega x)$
K^n	$e^{kx}=(e^k)^x$	$\omega^n\cos\frac{n\pi}{2}$	$\cos(\omega x)$
K^{-n}	$e^{x/k}=(e^{\frac{1}{k}})^x$	$H_n(u)$ * Hermite	e^{2ux-x^2}
$n\,K^n$	$Kx\,e^{kx}$	$n!\ P_n(u)$ *Legendre	$\frac{1}{\sqrt{1-2ux+x^2}}$
$n\ K^{-n}$	$\left(\frac{x}{k}\right)e^{x/k}$	$L_n(u)$ *Laguerre	$\frac{e^{\left(\frac{-ux}{1-x}\right)}}{1-x}$
$n!$	$\frac{1}{1-x}$	$T_n(u)$ *Tchebyshev	$\frac{e^{(u+\sqrt{u^2-1})x}+e^{(u-\sqrt{u^2-1})x}}{2}$

EJEMPLOS DE LA UTILIDAD DE LA TRANSFORMACION FI.

La Transformación Fi como se ha observado, servirá para pasar del espacio discreto al espacio continuo, y viceversa con la Transformación Fi inversa. Se emplea generalmente en la solución de Ecuaciones en Diferencias Finitas o Ecuaciones Diferenciales; tiene gran aplicación en lo referente a Funciones Especiales, como se verá mas adelante, en una sección especial dedicado a ellas.

Empezaremos definiendo algunas Transformadas y Transformadas Inversas de algunas funciones comunes.

Encontrar la Transformación Fi de $\cos n\omega$ Y $\operatorname{sen} n\omega$.

Solución:

$$a_n = \cos n\omega + i \operatorname{sen} n\omega = e^{in\omega} = \left(e^{i\omega}\right)^n \qquad ^{*}\left\{\sqrt{-1} = i\right\}$$

Como la Transformada de 1 es e^x utilizando el Teorema #2, tendremos:

$$\left(e^{i\omega}\right)^n \leftrightarrow e^{\left[e^{i\omega}\right]x} = e^{(\cos\omega + i\operatorname{sen}\omega)x} = e^{x\cos\omega}\left[\cos(x\operatorname{sen}\omega) + i\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\omega)\right]$$

$$= e^{x\cos\omega}\cos(x\operatorname{sen}\omega) + i\, e^{x\cos x}\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\omega)$$

Separando las partes Real e Imaginaria por la propiedad de Linealidad obtenemos las dos transformadas, a un mismo tiempo:

$$\varphi\left\{\cos n\omega\right\} = e^{x\cos\omega}\cos(x\operatorname{sen}\omega) \qquad \varphi\left\{\operatorname{sen} n\omega\right\} = e^{x\cos\omega}\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\omega)$$

Se encontraron las Transformadas anteriores fácilmente por la identidad de Euler.

Ahora, trataremos de encontrar la Transformada de otra función más simple:

$$\varphi^{-1}\left\{\frac{1}{1-x}\right\}$$

Su desarrollo en serie es el siguiente:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n$$

Por lo tanto su Transformada Fi Inversa es: $n!$

En cuanto a funciones Trigonométricas, tenemos por ejemplo la Suma de Cosenos; encontraremos su suma en Términos de Senos y Cosenos del Término enésimo: $b_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\omega)$

Por el Teorema de Convolución Discreta:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos k\omega = \int_0^x e^{x-t}\, e^{t\cos\omega} \cos(t \operatorname{sen} \omega)\, dt$$

Esta es la parte real de la siguiente integral:

$$I = \int_0^x e^{x-t}\, e^{t\cos\omega}\left[\cos(t \operatorname{sen}\omega) + i \operatorname{sen}(t \operatorname{sen}\omega)\right] = \int_0^x e^{x-t}\, e^{t e^{i\omega}}\, dt =$$

$$e^x \int_0^x e^{(e^{i\omega}-1)t}\, dt = e^x\left[\left(\frac{e^{(e^{i\omega}-1)t}}{e^{i\omega}-1}\right)_0^x\right] = \frac{(e^{x e^{i\omega}} - e^x)(e^{-i\omega}-1)}{2(1-\cos\omega)}$$

Cuya Transformación Fi Inversa es:

$$\frac{\left[\cos(n-1)\omega - \cos n\omega - \cos\omega + 1\right] + i\left[\operatorname{sen}(n-1)\omega + \operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen} n\omega\right]}{2(1-\cos\omega)}$$

Por lo tanto, separando la parte real de la imaginaria:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\omega = \frac{1+\cos n\omega}{2} + \frac{\operatorname{sen} n\omega \cdot \operatorname{sen}\omega}{2(1-\cos\omega)}$$

Asimismo:

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen} k\omega = \frac{\operatorname{sen} n\omega}{2} - \frac{\operatorname{sen}\omega(1-\cos n\omega)}{2(1-\cos\omega)}$$

Ecuaciones en Diferencias Finitas.

Hemos considerado hasta ahora como obtener algunos pares de Transformadas y Transformadas Inversas; ahora se empezará con lo referente a las Ecuaciones en Diferencias Finitas, que se podría decir es la parte escencial del Trabajo.

Se puede entonces con esta Transformación pasar del espacio discreto al espacio continuo y viceversa.

Esto permitirá resolver una ecuación de diferencias tal como una ecuación diferencial, esto implica que resolver una ecuación diferencial y una ecuación en diferencias finitas son procesos análogos.

Por ejemplo, para resolver la ecuación:

$$a_{n+4} + 25\, a_{n+3} + 35\, a_{n+2} + 50\, a_{n+1} + 24 a_n = 0$$

Se transforma en la ecuación diferencial siguiente; aplicando la Transformación Fi directamente: [a_n es la transformada fi^{-1} de $y(x)$, y lo escribiremos de ahora en adelante asi: $a_n \leftrightarrow y(x)$].

Esta ecuación tiene solucione de la forma $e^{\lambda x}$, cuya ecuación característica es:

$$\lambda^4 + 25\,\lambda^3 + 35\,\lambda^2 + 50\,\lambda + 24 = 0$$

entonces: $(\lambda = -1, -2, -3, -4)$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x} + c_4 e^{-4x}$$

por lo tanto, aplicando la Transformación Fi Inversa, se obtiene:

$$a_n = C_1 (-1)^n + C_2 (-2)^n + C_3 (-3)^n + C_4 (-4)^n$$

Se puede con lo anterior enunciar los siguientes dos métodos, que describiremos enseguida.

Solución de la Ecuación en Diferencias Homogénea de Coeficientes Constantes.

Sea la ecuación de diferencias finitas:

$$a_{n+k} + b_{k-1}\, a_{n+k-1} + b_{k-2}\, a_{n+k-2} \ldots + b_1\, a_{n+1} + b_0\, a_n = 0$$

Por la Transformación Fi hemos observado que es equivalente a una ecuación diferencial con fórmula o ecuación característica de la forma:

$$\lambda^{k} + b_{k-1}\lambda^{k-1} + b_{k-2}\lambda^{k-2} \ldots + b_1\lambda + b_0 = 0$$

donde las K raíces serán las soluciones de la ecuación de diferencias de la forma: $a_n = c_1\,(r_1)^n + c_2\,(r_2)^n + \ldots + c_k\,(r_k)^n$

donde los valores de las constantes C_i dependerán de las condiciones iniciales, pudiendo tener cualquier valor.

En este método existirán dos casos de soluciones a estudiar:

1) RAICES DIFERENTES de la Ecuación Característica.

Si todas o algunas de las raíces de la ecuación característica de la ecuación de diferencias son diferentes, entonces la solución que depende de ellas, tendrá la forma antes mencionada:

$$a_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n + \ldots + c_k(r_k)^n$$

2) RAICES REPETIDAS de la Ecuación Característica.

Si existe una o varias raíces repetidas m veces (se dice que es de "Multipicidad m "), entonces la solución que depende de la raíz r_i será:

$${}^{i}a_n = C_i\left\{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+2)(r_i)^n\right\} + C_{i+1}\left\{n(n-1)\ldots(n-m+3)(r_i)^n\right\} + \ldots\, C_{i+m}(r_i)^n$$

Ejemplo, resolver la Ecuación:

$$a_{n+3} + (2)a_{n+2} + (-1)\, a_{n+1} + (-2)\, a_n = 0$$

Solución:

Su ecuación característica es:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

entonces:

$$a_n = c_1 + c_2(-1)^n + c_3(-2)^n$$

Ejemplo; resolver la ecuación:

$$a_{n+4} + 2a_{n+3} - 2a_{n+1} - a_n = 0$$

Solución:

La ecuación característica es:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda = (\lambda + 1)^3(\lambda - 1) = 0$$

entonces:

$$a_n = C_1 + c_2 n(n-1)(-1)^n + c_3 n(-1)^n + c_4(-1)^n$$

Si las condiciones iniciales son: $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = -9$

entonces:

$$\begin{cases} c_1 + c_4 = 2 \\ c_1 - c_3 - c_4 = 1 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4 = 4 \\ c_1 - 6c_2 - 3c_3 - c_4 = -9 \end{cases}$$

por lo tanto:

$$a_n = 1 + 2n(n-1)(-1)^n - n(-1)^n + (-1)^n$$

$$a_n = 1 + (-1)^n \cdot (2n-1)(n-1).$$

Sea la ecuación:

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + b_2 a_{n+k-2} + \ldots + b_k a_n = f(n)$$

Entonces, la solución de la particular tendrá la forma de $f(n)$, o muy similar, multiplicada por una constante de proporcionalidad, que se determinará; de aquí el nombre del método.

Ejemplo: $a_{n+2} + 2\, a_{n+1} + a_n = (-3)^n$

Obtenemos la solución de la ecuación homogénea:

$${}^{H}a_n = c_0\,(-1)^n + c_1\, n\,(-1)^n$$

y proponemos una solución particular de la forma:

$${}^{P}a_n = K\,(-3)^n \;,\quad {}^{P}a_{n+1} = -3K\,(-3)^n \;,\quad {}^{P}a_{n+2} = 9K\,(-3)^n$$

entonces:

$$9K(-3)^n + 2(-3)K(-3)^n + K(-3)^n = (-3)^n \;,\qquad K = 1/4$$

Por lo que la solución general es la suma de la solución homogénea más la de la solución particular:

$$a_n = {}^{H}a_n + {}^{P}a_n = c_0\,(-1)^n + c_1 n(-1)^n + \frac{1}{4}(-3)^n$$

Ejemplo, resolver la ecuación:

$$a_{n+1} - a_n = \cos n$$

La solución de la Ecuación Homogénea es: ${}^{H}a_n = K$ y de la particular se propondrá de la forma: ${}^{P}a_n = A\cos n + B\operatorname{sen} n$

$${}^{P}a_{n+1} = A\cos(n+1) + B\operatorname{sen}(n+1) = A\cos n\cdot\cos 1 - A\operatorname{sen} n\cdot\operatorname{sen} 1 + B\operatorname{sen} n\cdot\cos 1 + B\cos n\cdot\operatorname{sen} 1.$$

Entonces, sustituyendo obtenemos:

$$\begin{cases} A\cos 1 + B\operatorname{sen} 1 - A = 1 \\ B\cos 1 - A\operatorname{sen} 1 - B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(\cos 1 - 1) + B\operatorname{sen} 1 = 1 \\ A(-\operatorname{sen} 1) + B(\cos 1 - 1) = 0 \end{cases}$$

donde: $A = -1/2$ y $B = \dfrac{\operatorname{sen} 1}{2(1-\cos 1)}$ por lo tanto: $a_n = K - \frac{1}{2}\cos n + \dfrac{\operatorname{sen} 1\cdot\operatorname{sen} n}{2(1-\cos 1)}$

Ejemplos del Teorema de Multiplicación por $\frac{1}{n+\nu}$

Uno de los ejemplos más interesantes es el de la obtención del dasarrollo de la Función BETA en series de potencias.

La definición de la función BETA es:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

Como el dararrollo en serie de $(1-x)^{q-1}$ es: $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-n)(-1)^n x^n}{n!}$

obtenemos:

$$a_0 = 1 \qquad a_n = (-1)^n (q-1)(q-2)(q-3)\cdots(q-n)$$

Por el teorema mencionado:

$$x^{-p} B(p,q) = x^{-p}\int_0^x x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \longleftrightarrow \frac{a_n}{n+p}$$

Evaluando en $x=1$ obtenemos lo siguiente:

$$B(p,q) = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (q-1)\cdots(q-n)}{n!\,(n+p)}$$

Ahora como la función $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ es simétrica geométricamente en $x = 1/2$

si $p=q$ entonces: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-p} B(p,p) = \frac{2}{p} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (p-1)(p-2)\cdots(p-n)\,(1/2)^n}{n!\,(n+p)}$

$$B(p,p) = 2^{1-p}\left[\frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-p)(2-p)\cdots(n-p)}{2^n\, n!\,(n+p)}\right]$$

Que converge mucho más rápido que la fórmula anterior.

Evaluando $B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ obtenemos 7.416298, por lo que $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ =3.62561 .

Un ejemplo que se puede considerar de suma importancia es la resolución de la ecuación:

$$a_{n+1} + a_n = n!$$

La solución de la misma mediante el empleo de la Transformada Zeta no es posible, ya que no existe la Transformada Zeta de $n!$.

Ahora bien, se pueden obtener dos soluciones de la ecuación nombrada, por medio de la Transformación Fi, las cuales se presentan a continuación.

1) Por el Teorema de Convolución.

$$a_{n+1} + a_n = n! \longleftrightarrow y' + y = \frac{1}{1-x} \qquad y = K_0 e^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^{x} \frac{1}{1-x}\, dx$$

$$y = K_0 e^{-x} + \int_0^x e^{-(x-t)} \frac{dt}{1-t}$$

Su Transformada Fi Inversa es:

$$\begin{cases} a_n = K_0(-1)^n + \sum_{K=0}^{n-1} (-1)^K (n-K-1)! & n \geq 1 \\ a_0 = K_0 & \end{cases} \qquad a_n = K_0(-1)^n + \sum_{K=1}^{n-1} K!\, (-1)^{n-K-1}$$

2) Integrando por Partes:

$$y = K_0 e^{-x} + \frac{0!}{1-x} - \frac{1!}{(1-x)^2} + \frac{2!}{(1-x)^3} + \cdots = K_0 e^{-x} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{1}{1-x}\right)(-1)^m$$

$$y \longleftrightarrow a_n = K_0(-1)^n + \sum_{m=0}^{\infty} (n+m)!\, (-1)^m$$

Tenemos entonces Dos Soluciones Particulares:

$$\begin{cases} {}^p a_n = \sum_{K=0}^{n-1} K!\, (-1)^{n-K-1} & n \geq 1 \\ {}^p a_0 = 0 & \end{cases} \qquad y \qquad \left\{ a_n = \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K (n+K)! \right.$$

Lo interesante de este problema es que la segunda solución no se puede evaluar numéricamente, ya que la serie diverge, pero sí es solución, y se puede comprobar esto algebráicamente.

FUNCIONES TRASCENDENTES SUPERIORES Y LOS CUATRO TEOREMAS DE RECURRENCIA DE LA TRANSFORMACION FI.

Esta es la parte más interesante del trabajo desarrollada hasta ahora sobre la Teoría de la Transformación Fi, trata de la aplicación a las Funciones Trascendentes Superiores, sobre su derarrollo en Serie y algunas ecuaciones que las generan, como es la famosa ecuación Hipergeométrica de Gauss, la ecuación de Bessel, Legendre, Laguerre y otros.

La parte más novedosa de este método de solución por la Transformación Fi de las ecuaciones mencionadas anteriormente es, en la obtención de las Fórmulas de Rodrigues de las diferentes Funciones Solución.

Bien, ahora se plantearán los Cuatro Teoremas de Recurrencia en que se basa el método de solución.

TEOREMA # 1 (Teorema de las Funciones Asociadas).

Si la Ecuación Diferencial "a" con soluciones " $f(x)$", tiene una fórmula de Recurrencia en Fi Inversa de la forma $F(n)$, entonces si se encuentra una ecuación diferencial "b" con una fórmula de Recurrencia $G(n)$ y ésta $G(n)=F(n+m)$, entonces su solución es la m-ésima derivada de las funciones " $f(x)$".

Demostración:

$$\text{Si} \quad f(x) \leftrightarrow a_n \quad \text{entonces:} \quad \frac{a_{n+k}}{a_n} = F(n)$$

$$\text{Si} \quad f^{(m)}(x) \leftrightarrow b_n \quad \text{entonces:} \quad \frac{b_{n+k}}{b_n} = G(n)$$

y como $b_n = a_{n+m}$ entonces: $G(n) = F(n+m)$

TEOREMA # 2.

Si la solución de una ecuación diferencial tiene como solución a $f(x)$ y tiene una fórmula de recurrencia en el dominio de Fi Inversa de la forma $F(n)$; entonces, si se encuentra una ecuación diferencial con una fórmula de recurrencia $G(n)$ de la forma:

$$G(n) = \frac{\binom{n+k}{m}}{\binom{n}{m}} F(n-m)$$

entonces su solución será: $x^m f(x)$

Demostración:

Si $f(x) \leftrightarrow a_n$ entonces: $\dfrac{a_{n+k}}{a_n} = F(n)$

Si $x^m f(x) \leftrightarrow b_n$ entonces: $\dfrac{b_{n+k}}{b_n} = G(n)$

como $b_n = a_{n-m}\dfrac{n!}{(n-m)!}$ entonces:

$$G(n) = \frac{(n-m)!\ (n+k)!}{n!\ (n-m+k)!} F(n-m) \rightarrow G(n) = \frac{\binom{n+k}{m}}{\binom{n}{m}} F(n-m)$$

TEOREMA # 3. (Cambio de Variable de X a $X^K = Z$ [K entero]).

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ y solo existe a_n para X^{kn} entonces si $\dfrac{a_{n+k}}{a_n} = F(n)$

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{(n+1)\ (nk)!}{[(n+1)k]!} F(nk)$, donde: $a_n \leftrightarrow f(x)$ y $b_n \leftrightarrow f(\sqrt[k]{z})$.

Demostración:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{kn} X^{kn}}{(kn)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{kn} Z^n}{(kn)!}$$

$$f(\sqrt[k]{z}) = g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left\{ \frac{a_{kn}\ n!}{(kn)!} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} b_n$$

obtenemos:

$$\rightarrow b_n = \frac{a_{kn}\, n!}{(kn)!}$$

entonces:
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)\,(nk)!}{[(n+1)\,k]!}\, F(nk)$$

TEOREMA # 4. (Cambio de variable de X a $X = Z^K$ [K entero]).

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n X^n}{n!}$ y se desea que $X = Z^K$ convirtiéndose en: $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n Z^n}{n!}$ existiendo solamente b_n para n múltiplo entero de K, entonces si: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = F(n)$ entonces: $\frac{b_{n+K}}{b_n} = \frac{(n+K)!}{\left(\frac{n}{K}+1\right) n!}\, F\left(\frac{n}{K}\right)$

Demostración:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n X^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n Z^{Kn}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\,(Kn)!}{(Kn)!\; n!}\, Z^{Kn} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{nK}\, Z^{nK}}{(nK)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n Z^n}{n!}$$

entonces:
$$b_{nK} = \frac{a_n\,(Kn)!}{n!}$$

Por lo tanto:

$$\frac{b_{(n+1)K}}{b_{nK}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{[K(n+1)]!\; n!}{(n+1)!\;(Kn)!} = F(n) \cdot \frac{[K(n+1)]!}{(n+1)\,(Kn)!}$$

$$\frac{b_{n+K}}{b_n} = \frac{(n+K)!}{\left(\frac{n}{K}+1\right) n!}\, F(n/K)$$

Como primer ejemplo del empleo de la Transformación Fi, veremos como obtener las Funciones Generatrices de varias Funciones Especiales; como son, los Polinomios de Hermite, los Polinomios de Legendre y los Polinomios de Laguerre.

Obtención de las Fórmulas de Recurrencia de Varias Funciones Especiales.

1) Polinomios de Hermite.

La función Generatriz de los polinomios de Hermite debe de cumplir con lo que especifica la siguiente fórmula:

$$G(u,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(u)}{n!}x^n$$

siendo $G(u,x)$ la Función Generatriz, y $H_n(u)$ los polinomios de Hermite.

La ecuación de diferencias que gobierna a los polinomios de Hermite es la siguiente:

$$2u\,H_n(u)-2n\,H_{n-1}(u)=H_{n+1}(u)$$

Si hacemos $a_n=H_n(u)$ entonces se transforma en la siguiente ecuación de diferencias:

$$2u\,a_n-2n\,a_{n-1}=a_{n+1}$$

cuya Transformación Fi es:

$$2(u-x)\,G=G'$$

donde resolviendo la ecuación diferencial nos queda:

$$G=e^{2ux-x^2}$$

entonces la función generatriz de los polinomios de Hermite es:

$$G(u,x)=e^{2ux-x^2}$$

2) Polinomios de Legendre.

La ecuación de recurrencia de los Polinomios de Legendre es:

$$(n+1)\,P_{n+1}(u) = (2n+1)\,u\,P_n(u) - n\,P_{n-1}(u)$$

Se hace un cambio de variable, ya que la función generatriz de dichos polinomios debe de ser la siguiente forma:

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u)\,x^n$$

entonces el cambio de variable será:

$$a_n = n!\,P_n(u)$$

lo cual nos da una ecuación de diferencias diferente:

$$a_{n+1} - u\,(2n+1)\,a_n + n^2\,a_{n-1} = 0$$

cuya Transformación Fi es:

$$(1 - 2ux + x^2)\,Y' = (u - x)\,Y$$

entonces, resolviendo la ecuación diferencial obtenemos:

$$Y(u,x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2ux + x^2}}$$

3) Polinomios de Laguerre.

Los polinomios de Laguerre deben de obedecer la siguiente ecuación de diferencias:

$$L_{n+1}(u) + (-2n + u - 1)\,L_n(u) + n^2\,L_{n-1}(u) = 0$$

Como la función generatriz de dichos polinomios debe de ser de la forma:

$$Z(u,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(u)}{n!}\,x^n$$

entonces directamente se transforma en la ecuación diferencial:

$$(1 - 2x + x^2) Z' = (1 - u - x) Z$$

cuya solución es:

$$Z = \frac{e^{\frac{-ux}{1-x}}}{1 - x}$$

Entonces la Función Generatriz de los Polinomios de Laguerre es:

$$Z(u,x) = \frac{e^{\left(\frac{-ux}{1-x}\right)}}{1 - x}$$

FORMULAS DE RODRIGUES.

La parte del trabajo más trascendente desarrollada, será la que se tratara a continuación.

Solución de la Ecuación Diferencial de Legendre; empezaremos con el método clásico de Series de Potencias, llegando a la solución expresada en la fórmula de Rodrigues.

La ecuación de Legendre es:

$$(1-x^2)\,y'' - 2x\,y' + m(m+1)\,y = 0$$

Por series de potencias, tenemos que: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\quad {}^*\underline{a_n \neq \varphi^{-1}\{y\}}$

Obtenemos la ecuación de Recurrencia:

$$(n+1)(n+2)\,a_{n+2} - (n-1)\,n\,a_n - 2n\,a_n + m(m+1)\,a_n = 0$$

$$a_{n+2} = -\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+1)(n+2)}\,a_n$$

Desarrollando:

$$y = a_0\left\{1 - \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-2)(m+1)(m+3)}{4!}x^4 - + \dots\right\} +$$
$$a_1\left\{x - \frac{(m-1)(m+2)}{3!}x^3 + \frac{(m-1)(m-3)(m+2)(m+4)}{5!}x^5 - + \dots\right\}$$

Esta es la solución formal de la ecuación de Legendre; pero los polinomios de Legendre pueden escribirse también como:

$$P_m(x) = \frac{(2m)!}{(m!)^2\,2^m}\left[x^m - \frac{m(m-1)}{2(2m-1)}x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 4\cdot(2m-1)(2m-3)}x^{m-4} - + \dots\right]$$

esto empezando en término m-ésimo. Podemos reescribir la fórmula como:

$$P_m(x) = \sum_{n=0}^{[m/2]} (-1)^n \frac{(2m-2n)!}{2^m\,n!\,(m-n)!\,(m-2n)!}\,x^{m-2n}$$

donde $[m/2]$ es el mayor entero $\leqslant \frac{m}{2}$.

Ahora: $P_m(x) = \sum_{n=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^n}{2^m n!\,(m-n)!} \cdot \frac{(2m-2n)!}{(m-2n)!} x^{m-2n} =$

$$\sum_{n=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^n}{2^m n!\,(m-n)!} \frac{d^m}{dx^m} x^{2m-2n} = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} \sum_{n=0}^{[m/2]} \frac{m!}{n!\,(m-n)!} (x^2)^{m-n} (-1)^n =$$

$$\frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} \sum_{n=0}^{[m/2]} \binom{m}{n} (x^2)^{m-n} (-1)^n \rightarrow \frac{1}{2^m m! \cdot dx^m} \frac{d^m}{} (x^2-1)^m = P_m(x)$$

La cual es la Fórmula de Rodrigues de los Polinomios de Legendre.

Como se puede ver es bastante tedioso, primeramente sacar la solución; segundo, sacar la expresión para el polinomio de Legendre de grado m ; después de esto se dificulta con la aplicación de la función mayor entero; en resumen es difícil.

Ahora se presentará una variación del método solución, la cual tendrá la propiedad de llegar a la expresión de la Fórmula de Rodrigues sin tanta manipulación algebráica.

La Ecuación de Legendre es:
==========================

$$(1-x^2)\, y'' - 2x\, y' + m(m+1)\, y = 0$$

Su Transformación Fi inversa toma la siguiente forma:

$$a_{n+2} = \left[n(n+1) - m(m+1)\right] a_n$$

Con el cambio de variable $a_n = b_{n+m}$ resulta entonces:

$$\frac{b_{n+2}}{b_n} = (n-2m)(n+1) \quad ó \quad \frac{b_{n+1}}{b_{n-1}} = n(n-1-2m)$$

Si $b_n \longleftrightarrow f(x)$, entonces por lo tanto:

$$f' = (x^2 f' + x f) - x f - 2m x f \quad , \quad (1-x^2) f' = -2m x f$$

donde: $f = K(1-x^2)^m$

entonces si $a_n \leftrightarrow y$ se obtendrá:

$$y = K\,\frac{d^m\,(1-x^2)^m}{d\,x^m}$$

donde se escoge:

$$K = \frac{(-1)^m}{2^m\,m!}$$

Por lo que la solución de la ecuación de Legendre es:

$$y(x) = P_m(x) = \frac{d^m(1-x^2)^m}{d\,x^m}\cdot\frac{(-1)^m}{2^m\,m!}$$

Observamos que el proceso es mucho mas corto y sencillo, que el procedimiento clásico seguido por Rodrigues en la descripción anterior.

Ahora solucionaremos la ecuación de Laguerre, encontrando su solución expresada como <u>la Fórmula de Rodrigues de los Polinomios de Laguerre</u>.

La ecuación cuya solución son los polinomios de Laguerre es:

$$x\,y'' + (1-x)\,y' + m\,y = 0$$

Sea $y = e^x f(x)$, entonces se transforma en:

$$x\,f'' + f'\cdot(x+1) + f\cdot(1+m) = 0$$

cuya transformación Fi inversa es:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\,\frac{n+1+m}{n+1}$$

Suponiendo la función $f(x)$ como la derivada m-ésima de alguna función $g(x)$, entonces; si:

$$\begin{cases} a_n \leftrightarrow f(x) \\ b_n \leftrightarrow g(x) \end{cases}$$

Si $b_{n+m} = a_n$ entonces:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{-(n+1)}{n+1-m}$$

y como $K = 1$ donde:

$$\frac{\binom{n+K}{m}}{\binom{n}{m}} = \frac{n+1}{n+1-m}$$

como $(-1)^n \leftrightarrow e^{-x}$ donde $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{n+1}{n+1-m} F(n-m)$, $F(n-m) = -1$

entonces: $\varphi\{b_n\} = K x^m e^{-x}$, $e^{x}\varphi\{a_n\} = K e^x \dfrac{d^m (x^m e^{-x})}{dx^m}$

Entonces: $L_m(x) = K e^x \dfrac{d^m (x^m e^{-x})}{d x^m}$

donde se escoge $K = \dfrac{1}{m!}$ y por lo tanto: $L_m(x) = \dfrac{e^x}{m!} \dfrac{d^m}{dx^m}(x^m e^{-x})$

Obteniendo así la Fórmula de Rodrigues de los Polinomios de Laguerre.

Ahora solucionaremos en una forma muy parecida la ecuación que tiene como solución los Polinomios de Hermite.

La ecuación de Hermite es:

$$y'' - 2xy' + 2my = 0$$

Si $y = e^{x^2} f(x)$ entonces se transforma la ecuación anterior en:

$$f'' + 2xf' + 2(m+1)f = 0$$

cuya Transformación Fi inversa es:

$$a_{n+2} = -2(n+m+1)\, a_n$$

Si $b_{n+m} = a_n$ entonces: $\dfrac{b_{n+2}}{b_n} = -2(n+1)$ o bien: $\dfrac{b_{n+1}}{b_{n-1}} = -2n$

Cuya Transformación Fi es: $f' = -2xf$

donde la solución de esta ecuación diferencial es: $f = K e^{-x^2}$

entonces obtenemos: $y = K e^{x^2} \dfrac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}$ donde se escoge: $K = (-1)^m$

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}$$

Que es la Fórmula de Rodrigues de los Polinomios de Hermite.

Estudiaremos el comportamiento de las funciones Hipergeométrica e Hipergeométrica Confluente, en el Dominio de la Transformación Fi.

La Ecuación HIPERGEOMETRICA.

$$x(1-x)\,y'' + [c-(a-b-1)x]\,y' - ab\,y = 0$$

La Transformación Fi inversa de esta ecuación es:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)}$$

Sea $b_{n+\nu} = a_n$ donde $\nu = a-1$, obtenemos, además si $-\nu+c=1-m$ entonces

$$m = 1+\nu-c = a-c: \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n-\nu+a)(n-\nu+b)}{(n-\nu+c)}, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)(n-a+1+b)}{(n-a+1+c)}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)(n-m+m-a+1+b)}{(n+1-m)} = \frac{n+1}{n+1-m}\cdot(n-m+a-c-a+1+b) = \frac{n+1}{n+1-m}\cdot(n-m+1+b-c)$$

obtenemos si: $\begin{cases} b_n \leftrightarrow x^m f(x) \\ c_n \leftrightarrow f(x) \end{cases}$ $\quad \dfrac{c_{n+1}}{c_n} = (n+1+b-c) \leftrightarrow f' = x f' + (1+b-c) f$

$$(1-x)f' = (1+b-c)\,f$$

entonces: $\dfrac{df}{f} = \dfrac{-dx}{1-x}(c-b-1)$, $\; f = K(1-x)^{c-b-1}$ por lo tanto: $\begin{cases} c_n \leftrightarrow f(x) \\ b_n \leftrightarrow x^m f(x) \\ a_n \leftrightarrow \dfrac{d^\nu}{dx^\nu}(x^m f(x)) \end{cases}$

Entonces, sustituyendo los parámetros descritos tendremos la solución de la Ecuación Hipergeométrica expresada en Fórmula de Rodrigues.

$$F(a,b,c;x) = K\,\frac{d^{a-1}}{dx^{a-1}}\left\{x^{a-c}(1-x)^{c-b-1}\right\}$$

La Ecuación HIPERGEOMETRICA CONFLUENTE.

$$x y'' + (c-x) y' - a y = 0$$

Su Transformación Fi Inversa es:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+a}{n+c}$$

Sea $b_{n+\nu} = a_n$, si $\nu = a-1$ tenemos: $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{n+1}{n+1-a+c}$

si $m=a-c$, entonces: $b_n \leftrightarrow x^m e^x$ donde será: $x^{a-c} e^x$

como $b_n \leftrightarrow f(x)$ y $a_n = \dfrac{d^\nu f(x)}{dx^\nu}$ entonces: $$F(a,c;x) = K \frac{d^{a-1}}{dx^{a-1}} \left\{ x^{a-c} e^x \right\}$$

Que es la Fórmula de Rodrigues de la Ecuación Hipergeométrica Confluente de Gauss.

Ahora si proponemos una solución de la forma: $y = e^x f(x)$ obtenemos:

$$y = e^x F(c-a, c; x) = e^x \frac{d^{c-a-1}}{dx^{c-a-1}} \left\{ x^{-a} e^x \right\}$$

Las Ecuaciones Hipergeométrica e Hipergeométrica Confluente con cambio de Variable de x a z^2.

La Ecuación Hipergeométrica queda de la siguiente forma:

$$(1-z^2) y'' + \left(\frac{2c-1}{z} - z(2a+2b+1) \right) y' - 4ab y = 0$$

Donde su Transformación Fi Inversa es:

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+2a)(n+2b)}{(n+2c)}$$

Si $2c=1-m$ entonces $m=1-2c$ y $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=\dfrac{(n+1)(n-m+1-2c+2a)(n-m+1-2c+2b)}{(n+1-m)}$

Si: $\begin{cases} a_n \leftrightarrow z^m f(z) \\ b_n \leftrightarrow f(z) \end{cases}$ $\qquad \dfrac{b_{n+2}}{b_n}=(n+1+2a-2c)(n+1+2b-2c)$

Si $C_{n+\nu}=b_n$ donde $\nu=2a-2c$ tenemos:

$$\frac{C_{n+2}}{C_n}=(n+1)(n+1-2a+2b)\ ,\ \frac{C_{n+1}}{C_{n-1}}=n(n-2a+2b)\ ,\ C_{n+1}=n^2C_{n-1}+2n(c-a)\,C_{n-1}$$

Cuya Transformación Fi Inversa es:

$$f_c'=z^2f_c'+zf_c+2(b-a)zf_c\ ,\ (1-z^2)f_c'=2zf_c\left(\tfrac{1}{2}+b-a\right)$$

$$f_c=K(1-z^2)^{a-b-1/2}$$

Y como tenemos: $\begin{cases} C_n \leftrightarrow f_c(z) \\ b_n \leftrightarrow \dfrac{d^\nu}{dz^\nu}f_c(z) \\ a_n \leftrightarrow z^m\dfrac{d^\nu}{dx^\nu}f_c(z) \end{cases}$

Por lo tanto, sustituyendo:

$$F(a,b,c;z^2)=K\,z^{1-2c}\frac{d^{2a-2c}}{dz^{2a-2c}}\left\{(1-z^2)^{a-b-1/2}\right\}$$

La Ecuación Hipergeométrica Confluente , de igual forma se transforma en:

$$y''+\left[\frac{2c-1}{z}-2z\right]y'-4acy=0$$

Cuya Transformación Fi inversa es:

$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=2\frac{(n+1)(n+2a)}{(n+2c)}$$

Si $1-m=2c$ entonces: $\dfrac{a_{n-2}}{a_n}=2\left(\dfrac{n+1}{n+1-m}\right)\left(n-m+2\left(\tfrac{1}{2}+a-c\right)\right)$

Si $a_n\leftrightarrow z^m f(z)$ y $b_n\leftrightarrow f(z)$;

$$\frac{b_{n+2}}{b_n}=2(n+1+2(a-c)) \text{ o bien: } \frac{b_{n+1}}{b_{n-1}}=2(n+2(a-c))$$

Si $C_{n+\nu}=b_n$ y además: $\nu=2(a-c)$

Cuya Transformación Fi nos da: $f'=2zf$

Cuya solución es: $f=Ke^{z^2}$

Resumiendo:
$$\begin{cases} c_n \leftrightarrow Ke^{z^2} \\ b_n \leftrightarrow K\dfrac{d^{2(a-c)}}{dz^{2(a-c)}}e^{z^2} \\ a_n \leftrightarrow Kz^{1-2c}\dfrac{d^{2a-2c}}{dz^{2a-2c}}e^{z^2} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$F(a,c;z^2)=Kz^{1-2c}\frac{d^{2a-2c}}{dz^{2a-2c}}e^{z^2}$$

Hemos terminado con lo que es la solución de las Ecuaciones Hipergeométrica e Hipergeométrica Confluente de Gauss con diferentes variables independientes, ahora antes de proseguir con los ejemplos correspondientes a esto, veremos un tipo de ecuación que supuestamente segun la experiencia debería de ser su solución una Fórmula de Rodrigues que nos diera como resultado un Polinomio, o sea una función polinomial y no una serie infinita.

Bien, se observó que la ecuación de Tchebyshev no se comporta como se debería esperar, o sea que su resultado sean los Polinomios de Tchebyshev, sino que se obtuvo una Fórmula de Rodrigues para las "Funciones de Tchebyshev", que son series infinitas.

La ecuación de Tchebyshev es:

$$(1-x^2)\,y''-xy'+p^2y=0$$

Su Transformación Fi Inversa es:

$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=(n-p)(n+p)$$

Sea $a_n=b_{n+p-1}$ entonces $a_{n-p+1}=b_n$ por lo cual: $\dfrac{b_{n+2}}{b_n}=(n+1-2p)(n+1)$

O bien: $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=(n-2p)n$

Cuya Transformación Fi inversa es:

$$z'=x^2z'+xz-2pzx\rightarrow(1-x^2)z'=-2xz\,(p-1/2)$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{-2x}{1-x^2}\,dx\,(p-1/2)\;\longrightarrow\;z=K\,(1-x^2)^{p-1/2}$$

Y como:

$$\begin{cases} b_n\leftrightarrow z \\ a_n\leftrightarrow \dfrac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}z \end{cases}\qquad y=K\,\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\,(1-x^2)^{p-1/2}$$

En el caso de que $p=0$ tenemos: $y=\displaystyle\int_0^x K\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=K\,\mathrm{sen}^{-1}x+C$

La cual es solución de la ecuación diferencial, entonces las funciones de Tchebyshev seran:

$$T_0(x)=\mathrm{sen}^{-1}x \qquad T_2(x)=-3x\sqrt{1-x^2}$$

$$T_1(x)=\sqrt{1-x^2} \qquad T_3(x)=-5(1-4x^2)\sqrt{1-x^2}\quad\ldots.$$

Como vemos, es un caso extraño el que no se haya producido una fórmula de Rodrigues la cual nos produsca Polinomios, y nos de Funciones que son Series Infinitas.

$$T_n(x)=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,(1-x)^{n-1/2}$$

Daremos ahora, algunos ejemplos de la Ecuación Hipergeométrica e Hipergeométrica Confluente donde además se tenga como variables independientes a χ y a χ^2.

1) Polinomios de Legendre.

Estan definidos como: $F\left(n+1,-n,1;\frac{1-x}{2}\right)$

Si $u=\frac{1-x}{2}$, $du=\frac{-dx}{2}$ lo cual afecta solo a la constante de proporcionalidad de la solución.

Haciendo las sustituciones necesarias:

$$y=\frac{K}{2^{2n}}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^n(1+x)^n\right]=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)=P_n(x)$$

La cual cumple con la solución.

2) Polinomios de Tchebyshev.

Se definen como: $F\left(-n,n,\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right)$

y como: $F(a,b,c;x)=F(b,a,c;x)$

Sustituyendo, obtenemos:

$$y=K\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{\left(\frac{1-x}{2}\right)^{n-1/2}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1/2}\right\}=K\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^{n-1/2}=T_n(x)$$

La cual es la solución que habíamos encontrado anteriormente.

3) Polinomios de Laguerre.

Se definen como: $F(-n,1;x)$

y como habíamos comprobado anteriormente que:

$$F(a,c;x)=e^x F(c-a,c;-x)$$

tendremos haciendo los cambios de variable pertinentes:

$$y=Ke^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

Al hacer el cambio en χ solo afecta a la variable de proporcionalidad, no afectando en sí a la solución.

4) Polinomios de Hermite.

Se definen como: $F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right)$

Entonces, adoptamos la fórmula: $F(a,c;z^2) = z^{1-2c}\frac{d^{2a-2c}}{dz^{2a-2c}}e^{z^2}$

en $F(a,c;z^2) = e^{z^2}F(c-a, c; z^2)$

En este caso se sustituye z por (iz) donde $i=\sqrt{-1}$, dentro de la

función: $\begin{cases} a = -n/2 \\ c = 1/2 \end{cases}$ y como: $\begin{cases} x = iz \\ dx = i\,dz \end{cases}$ que no afecta; solamente en la contante

de proporcionalidad de la solución, entonces:

$$y = K e^{z^2}\left[\left.\frac{d^n e^{z^2}}{dz^n}\right|_{z=iz}\right] = c\, e^{z^2}\frac{d^n e^{-z^2}}{dz^n}$$

La cual es la fórmula de Rodrigues de los Polinomios de Hermite.

FUNCIONES ASOCIADAS.

Considerando la facilidad de resolver las ecuaciones antes mencionadas, podemos entonces también con la Transformación Fi resolver o bien reducir las ecuaciones que tienen como resultado las funciones asociadas de Legendre, Laguerre, Hermite y otros, fácilmente, ya que solamente se hace un cambio de variable para transformarlas en las ecuaciones originales que nos dan las funciones normales de Legendre, etc... El cambio de variable es solamente el de una suma en el subíndice de la ecuación de diferencias. Es algo muy sencillo que se deja al lector.

Otra de las aplicaciones más interesantes de el uso de la Transformación Fi es el de encontrar la solución de la ecuación de Bessel, la cual se presenta adelante.

Solución de la Ecuación de Bessel (Funciones Bessel de Primer Orden) a partir de $J_0(x)$.

La ecuación de Bessel es:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

Cuya Transformación Fi Inversa es:

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = -\frac{(n+2)(n+1)}{(n+2+\nu)(n+2-\nu)}$$

Si $x^2 = z$ tenemos entonces, por el teorema #3:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = -\frac{(2n+2)(2n+1)(n+1)(2n)!}{(2n+2+\nu)(2n+2-\nu)(2n+2)!}$$

Si $\left\{ \begin{array}{l} b_n \leftrightarrow z^{\nu/2} f(z) \\ c_n \leftrightarrow f(z) \end{array} \right.$ entonces: $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{-1}{4(n+1+\nu)}$

Si $d_{n+\nu} = c_n$, por lo tanto: $\dfrac{d_{n+1}}{d_n} = \dfrac{-1}{4(n+1)} \rightarrow d_n = \left(\dfrac{-1}{4}\right)^n \dfrac{1}{n!} K$

De donde resumiendo:

$$d_n \leftrightarrow K J_0(\sqrt{z}) \qquad c_n \leftrightarrow K \frac{d^\nu}{dz^\nu} J_0(\sqrt{z}) \qquad b_n \leftrightarrow K z^{\nu/2} \frac{d^\nu}{dz^\nu} J_0(\sqrt{z})$$

Como la solución de la ecuación es $J_\nu(x)$ obtenemos que $a_n \leftrightarrow J_\nu(x)$ donde:

$$a_n \leftrightarrow K x^\nu \frac{d^\nu}{d(x^2)^\nu} J_0(x) = J_\nu(x)$$

Donde se escoge $K = (-2)^\nu$, por lo que la solución de la ecuación de Bessel es:

$$J_\nu(x) = (-2x)^\nu \frac{d^\nu}{d(x^2)^\nu} J_0(x)$$

LA TRANSFORMACION FI FRACCIONARIA Y LA DERIVACION E INTEGRACION DEL TIPO FRACCIONARIO.

Definición:

Definimos a la Transformación Fi Fraccionaria, de orden γ, denotada por $\varphi_\gamma\{a_n\}$ como:

$$\varphi_\gamma\{a_n\}=\sum_{n=\gamma}^{\infty}\frac{a_n x^n}{\Gamma(n+1)}$$

donde n variara de la forma: $n=\gamma, \gamma+1, \gamma+2, \gamma+3, \gamma+4 \ldots$, siendo γ real diferente de : -1, -2, -3, . . .

Definición:

Denotamos por $\mathbf{I}^\nu$ al operador de orden ν (ν real), donde implicara integrar ν veces ($\nu > 0$) en $\int_0^x$, o derivar ν veces ($\nu < 0$), $\frac{d}{dx}$ la función sobre la cual opera.

Teorema #1)

La relación de la Transformación Fi Fraccionaria con la Transformación Fi normal es:

$$\varphi_\gamma\{a_n\}=x^\gamma\varphi\left\{\frac{n!\,a_{n+\gamma}}{\Gamma(n+\gamma+1)}\right\}$$

Demostración:

$$\varphi_\gamma\{a_n\}=\sum_{n=\gamma}^{\infty}\frac{a_n x^n}{\Gamma(n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+\gamma}\,x^{n+\gamma}}{\Gamma(n+\gamma+1)}=x^\gamma\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+\gamma}\,x^n}{\Gamma(n+\gamma+1)}=$$

$$x^\gamma\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,a_{n+\gamma}}{\Gamma(n+\gamma+1)}\frac{x^n}{n!}=x^\gamma\varphi\left\{\frac{n!\,a_{n+\gamma}}{\Gamma(n+\gamma+1)}\right\}$$

entonces: $$\varphi_\gamma\left\{a_n\right\} = x^\gamma\, \varphi\left\{\frac{a_{n+\gamma}\, n!}{\Gamma(n+\gamma+1)}\right\}$$

Teorema #2)

Sea $f(x)=\varphi_\gamma\{a_n\}$, entonces $\mathbf{I}^\nu f(x)$ será igual a $\varphi_{\gamma+\nu}\left\{a_{n-\nu}\right\}$

Demostración:

$$\varphi_\gamma\left\{a_n\right\} = \sum_{n=\gamma}^{\infty} \frac{a_n x^n}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+\gamma}\, x^{n+\gamma}}{\Gamma(n+\gamma+1)}$$

En el dominio de la Transformada de Laplace: $\mathcal{L}\left\{f(x)\right\}=F(s)$

entonces: $x^n \leftrightarrow \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$

$$\mathcal{L}\left\{\varphi_\gamma\{a_n\}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+\gamma}}{\Gamma(n+\gamma+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+\gamma+1)}{s^{n+\gamma+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+\gamma}}{s^{n+\gamma+1}}$$

ahora integrando ν veces equivale a multiplicarlo por $s^{-\nu}$, entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{I}^\nu \varphi_\gamma\{a_n\}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+\gamma}}{s^{n+\gamma+\nu+1}}$$

cuya Transformada Inversa de Laplace es:

$$\mathbf{I}^\nu \varphi_\gamma\{a_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+\gamma}}{\Gamma(n+\gamma+\nu+1)} x^{n+\gamma+\nu} = \sum_{n=\gamma+\nu}^{\infty} \frac{a_{n-\nu}}{\Gamma(n+1)} x^n = \varphi_{\gamma+\nu}\left\{a_{n-\nu}\right\}$$

Nota: Aquí se supone que $\gamma+\nu \neq -1,-2\ldots$ y que cuando $a_{n-\nu}$ o a_n donde $n-\nu$ o $n=-1,-2\ldots$ serán iguales los términos $a_{n-\nu}$ o a_n a cero, pero en el caso de que el subíndice sea negativo pero mayor a $n+\gamma$ o γ respectivamente sera igual a $a_{n-\nu}$ o a_n, en caso contrario seran idénticamente cero por definición.

Corolario:

$$\mathbf{I}^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-u)^{\nu-1} f(x)\, dx$$

Por lo tanto: (Definición de la Función Gamma)

$$\Gamma(\nu) = \frac{1}{\mathbf{I}^\nu f(x)} \int_0^x (x-u)^{\nu-1} f(x)\, dx$$

Encontrar $\mathbf{I}^{1/2} f(x)$, donde $f(x) = (1-x)^{1/2}$

Solución: $f(x) \leftrightarrow a_n = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(\frac{1}{2})}$

$$\mathbf{I}^{1/2} f(x) = \varphi_{1/2}\left\{a_{n-1/2}\right\} = \varphi_{1/2}\left\{\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1/2)}\right\} = \sum_{n=1/2}^{\infty} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1/2)} \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})} x^{n+1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{x}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3/2)} = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\, x^{-3/2} \int_0^x x^{1/2} \frac{dx}{1-x} = \frac{2}{x\sqrt{\pi}} \left\{\sqrt{x} - \tanh^{-1}\sqrt{x}\right\}$$

Encontrar $\mathbf{I}^{-1/2} J_0(\sqrt{x})$

Solución:

$$J_0(\sqrt{x}) \leftrightarrow a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{n!} \qquad \mathbf{I}^{-1/2} J_0(\sqrt{x}) = \varphi_{-1/2}\left\{a_{n+1/2}\right\} = \sum_{n=-1/2}^{\infty} \frac{a_{n+1/2}\, x^n}{\Gamma(n+1)} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{x^{n-1/2}}{n!\,\Gamma(n+1-1/2)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\, x^{-1/4} \cdot x^{-1/4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{x^n}{n!\,\Gamma(n+1/2)} =$$

$$\frac{x^{-1/4}}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \frac{\sqrt{2}\; x^{n-1/4}}{n!\,\Gamma(n+1-1/2)} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x}}}\, J_{-1/2}(\sqrt{x})$$

Bibliografía:

DIFFERENTIAL EQUATIONS with Applications and Historical Notes.

Georges F. Simmons.

McGraw-Hill Book Company. 1972.

(International Series in Pure and Applied Mathematics).

Capítulos: 3, 5, 6 y 10.

Encontrar $\mathbf{I}^{1/2} f(x)$, donde $f(x) = (1-x)^{1/2}$

Solución: $f(x) \leftrightarrow a_n = \dfrac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)}$

$$\mathbf{I}^{1/2} f(x) = \varphi_{1/2}\left\{a_{n-1/2}\right\} = \varphi_{1/2}\left\{\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1/2)}\right\} = \sum_{n=1/2}^{\infty} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1/2)} \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\,[n+3/2]} x^{n+1/2} = .$$

$$\sqrt{\frac{x}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3/2)} = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\, x^{-3/2} \int_0^x x^{1/2} \frac{dx}{1-x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, x} \int_0^x \frac{\sqrt{x}}{1-x}\, dx = \frac{2}{x\sqrt{\pi}}\left\{\sqrt{x} - \tanh^{-1}\sqrt{x}\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi x}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\operatorname{arctanh}\sqrt{x}}{x}$$

Encontrar $\mathbf{I}^{-1/2} J_0(\sqrt{x})$

Solución:

$$J_0(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{n!} = a_n \qquad \mathbf{I}^{-1/2} J_0(\sqrt{x}) = \varphi_{-1/2}\left\{a_{n+1/2}\right\} = \sum_{n=1/2}^{\infty} \frac{a_{n+1/2}\, x^n}{\Gamma(n+1)} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, x^{n-1/2}}{\Gamma(n+1/2)} = x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{x^n}{n!\,\Gamma(n+1-1/2)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} x^{-1/4} x^{-1/4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{x^n}{n!\,\Gamma(n+1-1/2)}$$

$$= \frac{x^{-1/4}}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{\sqrt{2}\, x^{n-1/4}}{n!\,\Gamma(n+1-1/2)} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x}}}\, J_{-1/2}(\sqrt{x})$$

Bibliografía:

DIFFERENTIAL EQUATIONS with Applications and Historical Notes.

Georges F. Simmons.

McGraw-Hill Company, 1972.

(International Series in Pure and Applied Mathematics).

Capítulos : 3, 5, 6 y 10 .