Miscelánea Matemática **69** (2019) 43-73 SMM

Sobre los grupos de Galileo y de Poincaré

Sergio A. Holguín Cardona
Instituto de Matemáticas, Unidad Oaxaca
Universidad Nacional Autónoma de México
Oaxaca, Oax.
sholguin@im.unam.mx
y
Iván Téllez Téllez
Instituto de Matemáticas, Unidad Oaxaca
Universidad Nacional Autónoma de México
Oaxaca, Oax.
tellez@im.unam.mx

1. Introducción

El presente artículo surge de unas notas que los autores escribieron para un minicurso en Física-Matemática de la IV Escuela de Invierno en Matemáticas, organizada por la Unidad Oaxaca del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México (IMUNAM) en diciembre del 2018. Las escuelas realizadas en Oaxaca han estado dirigidas principalmente a estudiantes avanzados de los programas de licenciaturas en matemáticas y física, por lo que los temas se eligen y se presentan siempre a un nivel básico, procurando así que resulten accesibles a los estudiantes. Por consiguiente, en este artículo los autores se han enfocado en presentar los temas con argumentos que sean fáciles de seguir para estudiantes con conocimientos de *Cálculo en Varias Variables*, *Teoría de Grupos*, *Álgebra Lineal* y algunos conceptos elementales de *Geometría Diferencial* y *Topología*.

Los objetos principales de este artículo son los grupos de Galileo $\mathcal{G}$ y de Poincaré $\mathcal{P}$. Los grupos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ han jugado un papel fundamental en la «física clásica» (pre-relativista) y la «física moderna» y constituyen ejemplos importantes de grupos con propiedades interesantes desde el punto de vista algebraico y geométrico. Es importante resaltar que la literatura existente sobre estos grupos es de difícil acceso y sus propiedades se encuentran con frecuencia dispersas en textos de física con un

Palabras clave: Grupo de Galileo; grupo de Poincaré; grupo de Lorentz.

enfoque teórico y algunos textos avanzados sobre grupos y álgebras de Lie. Lo anterior conlleva a que tanto matemáticos como físicos tengan dificultades a la hora de entender dichos grupos y sus propiedades, e.g. en física es común que $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ se presenten usando las nociones físicas de «marcos inerciales», lo cual hace que los mismos sean complicados de entender para estudiantes de matemáticas. Por otra parte, algunas de las propiedades de estos grupos pueden ser entendidas en forma simple usando resultados elementales de teoría de grupos y álgebra lineal y en raras ocasiones se presentan estas ideas a los estudiantes de física. A juicio de los autores, lo anterior amerita escribir un artículo de revisión donde se introduzcan los grupos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ en forma matemática y se estudien algunas de sus propiedades básicas, de esta manera la exposición puede resultar de algún valor para ambas audiencias: por una parte acerca a los matemáticos a dichos grupos, los cuales constituyen ejemplos interesantes de grupos de Lie, y por otra parte, se justifican algunas propiedades de estos grupos usando argumentos de teoría de grupos y geometría. Argumentos que por cierto no aparecen con frecuencia en los textos de física. Un buen artículo de revisión que aborda en parte las transformaciones de Lorentz y el grupo de Poincaré es [13], en el presente artículo se estudian los grupos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ y se presentan algunas de sus propiedades básicas usando argumentos de textos clásicos de un nivel intermedio en matemáticas y física como [1, 2, 16].

1.1 Origen del grupo de Galileo

Las nociones de *espacio* y *tiempo* de la mecánica se remontan a la época de Galileo (1564-1642) y Newton (1642-1727). A grosso modo y usando un lenguaje moderno, el *espacio* viene representado por $\mathbb{R}^3$ con la métrica euclidiana g y el *tiempo* viene representado por $\mathbb{R}$ con la métrica del valor absoluto. Históricamente, basado en observaciones físicas y en la noción de *observador inercial*, Galileo encuentra expresiones algebraicas para las transformaciones de coordenadas entre observadores inerciales. Las expresiones anteriores podían escribirse como transformaciones afines asociadas al espacio y al tiempo y podían componerse en forma natural, dichas transformaciones fueron llamadas *transformaciones de Galileo*. El conjunto de estas transformaciones –bajo la composición– forma un grupo $\mathcal{G}$ que en física es llamado el *grupo de Galileo*. Las transformaciones de Galileo pueden también deducirse matemáticamente imponiendo dos propiedades para transformaciones afines de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Concretamente, el grupo de Galileo es el grupo de transformaciones afines que dejan invariantes los intervalos temporales entre cualquier par de puntos de $\mathbb{R}^4$ y que preservan la distancia euclidiana asociada a g entre ciertos puntos de $\mathbb{R}^4$ llamados «eventos simultáneos»

[1]. Hasta fin del Siglo XIX, el grupo de Galileo fue considerado como el grupo que codificaba las propiedades del *espacio y tiempo Newtoniano* y fue usado ampliamente a lo largo de toda la *Mecánica Clásica*.[1]

1.2 Origen del grupo de Poincaré

En 1905 Einstein escribe tres artículos que revolucionaron la física en su momento y cambiaron para siempre la forma en que se entendían conceptos físicos fundamentales. En uno de estos, llamado *Zur Elektrodynamik bewegter Körper (Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento)* [5] Einstein proponía una forma distinta, a la descrita por la Mecánica Clásica, de entender el espacio y el tiempo. Como es bien sabido, las ideas de Einstein se comprobaron después experimentalmente y terminaron por modificar nuestra concepción del *espacio* y el *tiempo* mismos. A grosso modo, en dicho artículo Einstein introducía una descripción del espacio y el tiempo como una sola estructura llamada *espacio-tiempo*, estructura que vendría representada por $\mathbb{R}^4$ junto con un «tensor métrico» o pseudo-métrica η y proponía dos postulados para una nueva teoría física. En la actualidad esta teoría es conocida como la *Teoría de la Relatividad Especial* y los postulados son comúnmente llamados el *principio de la relatividad* y el *principio de constancia de la velocidad de la luz*. Quizás valga la pena mencionar que Einstein llega a dichos postulados después de meditaciones profundas sobre la *Teoría Electromagnética* y los resultados que arrojaba un experimento célebre de la época, resultados que por cierto evidenciaban un «conflicto» existente entre la Teoría Electromagnética y la Mecánica Clásica.[2] Posteriormente, a principios del Siglo XX Minkowski y Poincaré se interesaron en las ideas de Einstein. De hecho, Minkowski y Poincaré estudiaron de forma independiente las matemáticas de la relatividad especial y las implicaciones de la misma en *Geometría Diferencial* y *Teoría de Grupos*, mayores detalles sobre las contribuciones de ambos matemáticos pueden encontrase en [18]. En particular, Poincaré

[1] La Mécanica Clásica es en esencia la reformulación de la cinemática de Galileo y la mecánica de Newton que fue llevada a cabo posteriormente por Lagrange, Euler y Hamilton, entre otros. Dicha mecánica fue considerada como la teoría subyacente a toda la física hasta finales del Siglo XIX, al punto de que inclusive el electromagnetismo fue escrito inicialmente usando coordenadas del espacio y tiempo Newtoniano.

[2] El electromagnetismo predecía que la luz era una onda electromagnética que se desplazaba en el «vacío» a velocidad $c = 2.99792458 \cdot 10^8$m/s $\approx 3 \cdot 10^8$m/s, lo que dio lugar a la creencia de la existencia de un medio conocido como «eter luminífero» (medio en el cual la luz se propagaría a velocidad c). Por otra parte, la forma en que se representaban el espacio y el tiempo en la Mecánica Clásica implicaba la existencia de una propiedad general conocida como la *regla de adición de velocidades de Galileo*. En concordancia con esta propiedad, Michelson y Morley diseñaron en 1887 un experimento que permitiría medir la diferencia entre c y el valor de la velocidad de la luz con respecto a la tierra (debido al movimiento relativo de la misma con respecto al supuesto medio). El experimento fracasó, i.e., no se detectó diferencia alguna entre dichas velocidades. Detalles sobre este período fascinante de la historia de la física pueden encontrarse en [6].

notó que las transformaciones de coordenadas que estaban relacionadas a la noción de espacio-tiempo de Einstein formaban un grupo $\mathcal{P}$, dicho grupo es hoy en día conocido como el grupo de Poincaré.

Notación: A lo largo del artículo se seguirá la siguiente convención de índices, letras de la mitad del alfabeto griego como μ, ν, ρ denotan índices de «espacio-tiempo» y toman valores $0, 1, 2, 3$, con el índice 0 denotando la coordenada «temporal». Letras de la mitad del alfabeto latino como i, j, k denotarán indices de «espacio» y tomarán valores $1, 2, 3$. Cantidades con índices del tipo $A = (A^\mu)$, $b = (b^i)$ son usualmente entendidas como columnas con cuatro y tres componentes respectivamente. A menos de que se especifique lo contrario, las sumas se realizarán siempre sobre los índices que aparezcan dos veces en un término. Así por ejemplo

$$\sum A^\mu B_{\mu\rho}\,, \qquad \sum x^i A_{ki}$$

indican sumas con $\mu = 0, \ldots, 3$ e $i = 1, 2, 3$, respectivamente.

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se define el grupo de Galileo $\mathcal{G}$, en particular se muestra que $\mathcal{G}$ puede encajarse como un subgrupo de $Gl_5(\mathbb{R})$. Se define el subgrupo G de $\mathcal{G}$, el cual resulta de quitar las traslaciones en $\mathcal{G}$. Se muestra que G tiene un subgrupo normal G_+ y se prueba que G/G_+ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. En la sección 3 se definen el grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ así como algunos de sus subgrupos; se define el grupo de Lorentz $\mathcal{L}$ y se muestra que este último contiene como subgrupos normales a los grupos de Lorentz propio $\mathcal{L}_+$ y ortocrono $\mathcal{L}^\uparrow$, por consiguiente también al grupo de Lorentz propio ortocrono $\mathcal{L}_+^\uparrow = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}^\uparrow$ y se prueba que $\mathcal{L}/\mathcal{L}_+^\uparrow$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. En la sección 4 se introducen conceptos de geometría, topología y grupos de Lie que serán necesarios en la siguiente sección, se describen brevemente los conceptos de variedad suave, grupos y álgebras de Lie y se ilustran dichos conceptos con ejemplos. En la sección 5 se estudia la estructura topológica de los grupos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ y se muestra que ambos son subgrupos de Lie de $Gl_5(\mathbb{R})$ de dimensión 10. Se muestra que los subgrupos G y $\mathcal{L}$ de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ son grupos de Lie de dimensión 6. Se describe la componente conexa que contiene a la identidad en G y $\mathcal{L}$ y se prueba que ambos grupos tienen dos y cuatro componentes conexas respectivamente; finalmente se muestra que esta propiedad se extiende a los grupos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$.

Agradecimientos: Los autores agradecen de manera especial a los dos revisores anónimos del artículo por sus comentarios, sin duda las aportaciones de ambos ayudaron a mejorar considerablemente el mismo. El primer autor agradece a Hugo García Compeán por algunos comentarios relacionados con el grupo de Poincaré. El segundo autor agradece a CONACYT por su apoyo mediante el proyecto 265667 de FORDECYT.

2. Grupo de Galileo

El *espacio y tiempo Newtoniano* está modelado por

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \{(t, x_1, x_2, x_3) : t,\ x_i \in\ \mathbb{R}\}.$$

A cada punto $p = (t, x) \in \mathbb{R}^4$ se le denomina *evento*. Con t la coordenada temporal (el tiempo en el que «ocurre» el evento p) y $x \in \mathbb{R}^3$ las coordenadas espaciales (véase [1, p. 4]).

Considere la *función tiempo* $\tau : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por $\tau(p) = t$. El intervalo de tiempo entre dos eventos $p = (t, x_1, x_2, x_3)$ y $p' = (t', x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{R}^4$ está dado por $\tau(p - p') = t - t'$. Dos eventos $p = (t, x_1, x_2, x_3)$ y $p' = (t', x_1', x_2', x_3')$ se dicen *simultáneos* si $\tau(p) = \tau(p')$ y la *distancia* entre dos eventos simultáneos se define como

$$\begin{aligned} d(p, p') = \|p - p'\| &= \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2} \\ &= \sqrt{\sum (x_i - x_i')^2}\,, \end{aligned}$$

la cual coincide con la norma euclidiana de $p - p' \in \mathbb{R}^4$.

Las *transformaciones de Galileo* son las transformaciones afines del espacio y tiempo Newtoniano que preservan los intervalos de tiempo y la distancia entre eventos simultáneos, i.e., son las transformaciones $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dadas por

$$T(p) = L(p) + b, \qquad \forall p \in \mathbb{R}^4,$$

donde $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es una transformación lineal, $b \in \mathbb{R}^4$ está fijo y tales que

$$\tau(T(p_1) - T(p_2)) = \tau(p_1 - p_2) \tag{1}$$

y

$$d(T(p_1), T(p_2)) = d(p_1, p_2) \qquad \text{si} \quad \tau(p_1) = \tau(p_2). \tag{2}$$

Ejemplo 2.1. *Las siguientes transformaciones son transformaciones de Galileo.*

(i) Movimiento uniforme rectilíneo:

$$T_1(t, x) = (t, x + tv), \qquad \text{con} \quad v \in \mathbb{R}^3.$$

(ii) Traslaciones en el espacio y en el tiempo:

$$T_2(t, x) = (t + s, x + a), \qquad \text{con} \quad (s, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3.$$

(iii) Transformaciones ortogonales en el espacio:

$$T_3(t,x) = (t, R(x)), \qquad \text{con} \quad R \in O(3).$$

Aquí $O(3)$ es el grupo de transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^3$, i.e.,

$$O(3) = \{L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \textit{lineal} \ : \langle L(x), L(y)\rangle = \langle x, y\rangle\}.$$

con $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$ el producto punto en $\mathbb{R}^3$.

Lema 2.1. *Sea $\mathcal{G}$ el conjunto de transformaciones de Galileo. Cada $T \in \mathcal{G}$ es composición de transformaciones del tipo (i) - (iii) descritas en el ejemplo anterior.*

Demostración. Si T es una transformación de Galileo entonces preserva intervalos de tiempo: $\tau(T(p_1) - T(p_2)) = \tau(p_1 - p_2)$ para todo $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^4$. En particular, haciendo $p_2 = 0$ tenemos que $\tau(L(p_1)) = t$ para todo $p_1 \in \mathbb{R}^4$. De esto se sigue que

$$T(t,x) = L(t,x) + b = (t, L_1(t,x), L_2(t,x), L_3(t,x)) + b\,,$$

con $L_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ lineal. La linealidad de los L_i implica que

$$L_i(t,x) = L_i(t,0) + L_i(0,x) = tv_i + L_i(0,x)\,,$$

con v_i constante.

Falta determinar $L(0,x) = (0, L_1(0,x), L_2(0,x), L_3(0,x))$. Note que si $p = (0,x)$ entonces $d(T(p), T(0)) = d(p, 0)$ puesto que T preserva distancias para eventos simultáneos. Al sustituir T, esta ecuación se reduce a $\|L(0,x)\| = \|x\|$. Por lo tanto, la aplicación $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $R(x) = L(0,x)$ es una aplicación lineal que preserva la norma. Vamos a demostrar que R preserva el producto punto. Por un lado

$$\|R(x-y)\|^2 = \|Rx\|^2 + 2\langle Rx, Ry\rangle + \|Ry\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle Rx, Ry\rangle + \|y\|^2$$

y por otro lado

$$\|R(x-y)\|^2 = \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Igualando las últimas dos expresiones se sigue que $\langle Rx, Ry\rangle = \langle x, y\rangle$, y así $R \in O(3)$.

Finalmente, con $b = (s,a) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ constantes se tiene

$$\begin{aligned} T(t,x) &= (t, L_1(t,x), L_2(t,x), L_3(t,x)) + b \\ &= (t, tv_1 + L_1(0,x), tv_2 + L_2(0,x), tv_3 + L_3(0,x)) + (s,a)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$T(t,x) = (t+s, Rx + tv + a)\,. \tag{3}$$

□

El lema 2.1 implica que cada transformación de Galileo T queda determinada por $s \in \mathbb{R}$, $v, a \in \mathbb{R}^3$ y $R \in O(3)$ y viceversa.

Teorema 2.1. *El conjunto $\mathcal{G}$ es un grupo con la composición de funciones. El grupo $\mathcal{G}$ es llamado el grupo de Galileo.*

Demostración. Sean T_1, $T_2 \in \mathcal{G}$. De (3) se tiene que

$$T_1(t,x) = (t+s_1, R_1x+tv_1+a_1)\,, \qquad T_2(t,x) = (t+s_2, R_2x+tv_2+a_2)\,,$$

con $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$ y $R_1, R_2 \in O(3)$. De donde

$$T_1 \circ T_2(t,x) = (t+s_1+s_2, (R_1R_2)x+t(R_1v_2+v_1)+s_2v_1+R_1a_2+a_1)\,. \quad (4)$$

Ya que $O(3)$ es un grupo, $R_1R_2 \in O(3)$ y de (4) se obtiene que $T_1 \circ T_2 \in \mathcal{G}$. La identidad $I(t,x) = (t,x)$ es un elemento de $\mathcal{G}$ y actúa como elemento neutro bajo composición de funciones. Adicionalmente, ya que $R^{-1} = R^{\mathrm{t}}$ para todo $R \in O(3)$, se sigue de la expresión para la composición (4) que la inversa de T está dada por

$$T^{-1}(t,x) = (t-s, R^{\mathrm{t}}x + sR^{\mathrm{t}}v - R^{\mathrm{t}}a - tR^{\mathrm{t}}v)\,.$$

Finalmente, la asociatividad se sigue de la asociatividad de la composición de funciones. □

Consideremos ahora el espacio afín de $\mathbb{R}^5$ dado por

$$V = \{(t,x,1) \in \mathbb{R}^5 : (t,x) \in \mathbb{R}^4\}\,,$$

y sea $T \in \mathcal{G}$ dada por (3), a dicha T se le puede asociar la matriz real de 5×5

$$\iota(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ v & R & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

con $s \in \mathbb{R}$, $v, a \in \mathbb{R}^3$ y $R \in O(3)$. Note que para cada punto $p = (t,x,1) \in V$

$$\iota(T)(p) = (t+s, R(x)+a+tv, 1)\,,$$

por lo que $\iota(T)$ preserva a V y a la regla de correspondencia de T en $\mathbb{R}^4$. Se sigue entonces el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *El grupo de Galileo $\mathcal{G}$ es isomorfo al subgrupo de $Gl_5(\mathbb{R})$ definido por*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ v & R & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}) : s \in \mathbb{R},\ v, a \in \mathbb{R}^3 \ y\ R \in O(3) \right\}.$$

Demostración. La multiplicación de dos matrices en este conjunto está dada por

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1 \\ v_1 & R_1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & s_2 \\ v_2 & R_2 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}& \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1+s_2 \\ v_1+R_1v_2 & R_1R_2 & v_1s_2+R_1a_2+a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}&, \end{aligned} \tag{6}$$

por lo tanto el conjunto es cerrado bajo el producto de matrices. La identidad se obtiene al hacer $R_2 = I$, $s_2 = 0$ y $a_2 = v_2 = 0$ y el inverso está dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ v & R & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s \\ -R^{\mathrm{t}}v & R^{\mathrm{t}} & R^{\mathrm{t}}(sv-a) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La asociatividad se sigue de la asociatividad del producto de matrices.

Al usar (6), la aplicación $\iota : \mathcal{G} \to M_5(\mathbb{R})$ definida en (5) y la expresión (4), se tiene que $\iota(T_1 \circ T_2) = \iota(T_1)\iota(T_2)$ y así ι es un homomorfismo de grupos. Para terminar basta ver que ι es inyectiva, lo cual resulta evidente de (5) y del hecho de que cada $T \in \mathcal{G}$ queda determinada por $s \in \mathbb{R}$, $v, a \in \mathbb{R}^3$ y $R \in O(3)$. □

Si $R \in O(3)$ entonces $RR^{\mathrm{t}} = I$, por lo que $(\det(R))^2 = 1$ y así $\det(R) = \pm 1$. De donde

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ v & R & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(R) = \pm 1$$

y por consiguiente $\mathcal{G}$ tiene dos componentes disjuntas

$$\mathcal{G}_+ = \{A \in \mathcal{G} : \det(R) = 1\} \quad \text{y} \quad \mathcal{G}_- = \{A \in \mathcal{G} : \det(R) = -1\}.$$

Por otro lado, note que tomando $s = 0$ y $a = 0$ en (5) se sigue que el conjunto

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : R \in O(3),\, v \in \mathbb{R}^3 \right\} \tag{7}$$

es un subgrupo de $\mathcal{G}$, el cual tiene a su vez dos componentes disjuntas dadas por:

$$G_+ = \{A \in G : \det(R) = 1\} \quad \text{y} \quad G_- = \{A \in G : \det(R) = -1\}. \tag{8}$$

Ya que la función $\det : G \to \mathbb{Z}_2$ es un homomorfismo de grupos, $\ker(\det) = G_+$ es un subgrupo normal de G y podemos considerar al grupo cociente G/G_+. Véase [15, p. 76].

Proposición 2.2. *El grupo cociente G/G_+ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.*

Demostración. Primero probaremos que $G_- = AG_+$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -I & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $\det(AB) = \det(A) = -1$ para todo $B \in G_+$, por lo que $AG_+ \subseteq G_-$. Por otro lado, $AB \in G_+$ para todo $B \in G_-$ y puesto que $A^2 = I$ se sigue que todo $B \in G_-$ satisface $B = A(AB)$, es decir $G_- \subseteq AG_+$ y por lo tanto $G_- = AG_+$.

Si $CG_+ \in G/G_+$ con $C \in G_-$ entonces, por lo demostrado anteriormente, $C = AB$ con $B \in G_+$. Luego $CG_+ = G_-$ y se tienen solo dos clases de equivalencia. □

3. Grupo de Poincaré

Considere el par $(\mathbb{R}^4, \eta)$, donde $\mathbb{R}^4$ es inicialmente el espacio vectorial real con producto escalar $\eta : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definido por

$$\eta(x, y) = \sum \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \,, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^4 \tag{9}$$

con $\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Note que el producto escalar η es simétrico, bilineal y no degenerado.[3] No obstante, debido a que $\eta_{00} = -1$ el producto η no es positivo definido.

Consideremos en este espacio las transformaciones afines $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tales que

$$\eta(x - y, x - y) = \eta(T(x) - T(y), T(x) - T(y)) \,, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^4 \,. \tag{10}$$

Si (10) se cumple para algún T, se dice que T preserva la *distancia espacio-temporal*. Teniendo en cuenta que las transformaciones son afines $T(x) = \Lambda x + a$ con $\Lambda = (\Lambda^\rho{}_\mu)$ una matríz y $a = (a^\rho)$, equivalentemente, en componentes

$$T(x)^\rho = \sum \Lambda^\rho{}_\mu x^\mu + a^\rho \,.$$

La expresión (10) impone una condición algebraica para Λ, propiamente

$$\eta(z, z) = \eta(\Lambda z, \Lambda z) \,, \qquad \forall z \in \mathbb{R}^4 \,. \tag{11}$$

Ya que η es bilineal y simétrica

$$4\,\eta(x, y) = \eta(x + y, x + y) - \eta(x - y, x - y) \,, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^4 \,. \tag{12}$$

---

[3]Sea $\eta(x, y) = 0$ $\forall y \in \mathbb{R}^4$ y suponga que $x \neq 0$. Si $x^\mu \neq 0$ es una componente de x, tomando y tal que $y^\mu = 1$ y $y^\nu = 0$ para $\nu \neq \mu$, se obtiene $\eta(x, y) = x^\mu$.

Usando (12) se sigue que la condición (11) es equivalente a

$$\eta(x,y)=\eta(\Lambda x,\Lambda y)\,,\qquad \forall x,y\in\mathbb{R}^4\,. \tag{13}$$

Sustituyendo los vectores de la base usual en (13) se obtiene

$$\eta_{\mu\nu}=\sum\eta_{\rho\sigma}\Lambda^{\rho}_{\ \mu}\Lambda^{\sigma}_{\ \nu}\,,\qquad \text{equiv.}\qquad \eta=\Lambda^{\mathrm{t}}\eta\Lambda\,. \tag{14}$$

Es conveniente denotar a cada T que satisface la condición (14) como $T=T_{\Lambda,a}$ y así, en términos matriciales escribimos

$$T_{\Lambda,a}(x)=\Lambda x+a\,. \tag{15}$$

Teorema 3.1. *El conjunto $\mathcal{P}$ de las transformaciones afines $T_{\Lambda,a}$, definidas en (15) y que satisfacen la propiedad algebraica (14), es un grupo bajo la composición de funciones. El grupo $\mathcal{P}$ es llamado el grupo de Poincaré.*

Demostración. Si $T_{\Lambda,a}$, $T_{\bar\Lambda,\bar a}\in\mathcal{P}$ entonces

$$T_{\bar\Lambda,\bar a}\circ T_{\Lambda,a}(x)=T_{\bar\Lambda,\bar a}(\Lambda x+a)=\bar\Lambda\Lambda x+\bar\Lambda a+\bar a\,,$$

y como Λ y $\bar\Lambda$ satisfacen (14), también $\bar\Lambda\Lambda$ satisface (14)[4]. Por lo tanto

$$T_{\bar\Lambda,\bar a}\circ T_{\Lambda,a}=T_{\bar\Lambda\Lambda,\bar\Lambda a+\bar a}\,. \tag{16}$$

Ya que la matriz identidad $I\in M_4(\mathbb{R})$ satisface trivialmente (14), de la expresión (16) es claro que $T_{I,0}$ es la identidad en $\mathcal{P}$. Ahora, tomando el determinante en (14) se sigue que $-1=\det(\eta)=-(\det(\Lambda))^2$ y por consiguiente se tiene la condición

$$\det(\Lambda)=\pm1\,. \tag{17}$$

De lo anterior se sigue que existe la inversa Λ^{-1} de cualquier Λ que satisfaga (14), más aún, multiplicando (14) a la derecha por $(\Lambda^{-1})^{\mathrm{t}}$ y a la izquierda por Λ^{-1} se obtiene

$$(\Lambda^{-1})^{\mathrm{t}}\eta\Lambda^{-1}=(\Lambda^{\mathrm{t}})^{-1}\Lambda^{\mathrm{t}}\eta\Lambda\Lambda^{-1}=\eta$$

y así Λ^{-1} satisface (14). Por consiguiente $(T_{\Lambda,a})^{-1}=T_{\Lambda^{-1},-\Lambda^{-1}a}$ es un elemento en $\mathcal{P}$ y la asociatividad es inmediata al ser el producto en $\mathcal{P}$ una composición de funciones. $\square$

Ahora, como se mostró en la sección 2, del homomorfismo (5) se sigue que $\mathcal{G}$ es un subgrupo de $Gl_5(\mathbb{R})$. Una propiedad similar se sigue para $\mathcal{P}$ si se considera la inclusión

$$T_{\Lambda,a}\mapsto\begin{pmatrix}\Lambda & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{18}$$

con $\Lambda\in\mathcal{L}$, $a\in\mathbb{R}^4$ una columna y 0 una fila de cuatro ceros. Ya que esta inclusión es un homomorfismo de grupos, se obtiene el siguiente resultado.

[4]De propiedades básicas de matrices se sigue $(\bar\Lambda\Lambda)^{\mathrm{t}}\eta(\bar\Lambda\Lambda)=\Lambda^{\mathrm{t}}(\bar\Lambda^{\mathrm{t}}\eta\bar\Lambda)\Lambda=\Lambda^{\mathrm{t}}\eta\Lambda=\eta\,$.

Proposición 3.1. *El grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ es isomorfo al subgrupo de $Gl_5(\mathbb{R})$ determinado por la imagen de (18).*

De la descripción de $\mathcal{P}$ hecha en el teorema 3.1, en particular de (16), se sigue que

$$T_{\bar{\Lambda},0} \circ T_{\Lambda,0} = T_{\bar{\Lambda}\Lambda,0}\,, \tag{19}$$

y por lo tanto se puede identificar a cada $T_{\Lambda,0}$ con la matriz Λ. Bajo dicha identificación el *grupo de Lorentz*

$$\mathcal{L} = \{\Lambda \in M_4(\mathbb{R}) : \Lambda^{\mathrm{t}}\eta\Lambda = \eta\}$$

es un subgrupo de $\mathcal{P}$. De (17) se tiene que $\det(\Lambda) = \pm 1$ para toda $\Lambda \in \mathcal{L}$ y por lo tanto podemos considerar al subgrupo de Lorentz propio

$$\mathcal{L}_+ = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det(\Lambda) = 1\}.$$

El grupo $\mathcal{L}_+$ es un subgrupo normal de $\mathcal{L}$, lo cual se puede deducir del hecho de que la función $\det : \mathcal{L} \to \mathbb{Z}_2$ es un homomorfismo de grupos cuyo kernel es $\mathcal{L}_+$. Véase [15, p. 76].

Observe que al poner $\mu = \nu = 0$ en (14) se tiene

$$-1 = \sum \eta_{\rho\sigma}\Lambda^{\rho}_{\ 0}\Lambda^{\sigma}_{\ 0} = -(\Lambda^0_{\ 0})^2 + \sum(\Lambda^i_{\ 0})^2,$$

de donde

$$(\Lambda^0_{\ 0})^2 = 1 + \sum(\Lambda^i_{\ 0})^2 \geq 1\,. \tag{20}$$

Así, para toda $\Lambda \in \mathcal{L}$ se tiene $\Lambda^0_{\ 0} \geq 1$ ó bien $\Lambda^0_{\ 0} \leq -1$. Note que ambas cotas se alcanzan puesto que tanto la matriz identidad I como la matriz $\operatorname{diag}(-1,1,1,1)$ están en $\mathcal{L}$.

Proposición 3.2. *El conjunto $\mathcal{L}^{\uparrow} = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \Lambda^0_{\ 0} \geq 1\}$ es un subgrupo normal de $\mathcal{L}$. A este subgrupo se le conoce como el grupo de Lorentz ortocrono.*

Demostración. Primero demostraremos unas desigualdades. De (20) se sigue que, para cualquier $\Lambda \in \mathcal{L}$, la norma del vector $(\Lambda^1_{\ 0}, \Lambda^2_{\ 0}, \Lambda^3_{\ 0})$ es $\sqrt{(\Lambda^0_{\ 0})^2 - 1}$. Además, observe que si $\Lambda \in \mathcal{L}$ entonces $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}$ y por lo tanto $\Lambda^{\mathrm{t}} = \eta\Lambda^{-1}\eta$. Luego $\Lambda\eta\Lambda^{\mathrm{t}} = \eta$ y así $\Lambda^{\mathrm{t}} \in \mathcal{L}$, por consiguiente la norma del vector $(\Lambda^0_{\ 1}, \Lambda^0_{\ 2}, \Lambda^0_{\ 3})$ es también $\sqrt{(\Lambda^0_{\ 0})^2 - 1}\,$.

Para Λ, $\bar{\Lambda} \in \mathcal{L}$ se tienen las expresiones

$$(\Lambda\bar{\Lambda})^0_{\ 0} = \Lambda^0_{\ 0}\bar{\Lambda}^0_{\ 0} + \sum \Lambda^i_{\ 0}\bar{\Lambda}^0_{\ i}\,, \quad \left|\sum \Lambda^i_{\ 0}\bar{\Lambda}^0_{\ i}\right| \leq \sqrt{(\Lambda^0_{\ 0})^2 - 1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0_{\ 0})^2 - 1}\,,$$

donde la segunda expresión resulta de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Así se obtiene

$$\begin{aligned}\Lambda^0_{\ 0}\bar{\Lambda}^0_{\ 0} - \sqrt{(\Lambda^0_{\ 0})^2-1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0_{\ 0})^2-1} &\leq (\Lambda\bar{\Lambda})^0_{\ 0} \\ &\leq \Lambda^0_{\ 0}\bar{\Lambda}^0_{\ 0} + \sqrt{(\Lambda^0_{\ 0})^2-1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0_{\ 0})^2-1}\,. \quad (21)\end{aligned}$$

Un cálculo directo muestra que $xy-\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}\geq 1$ si $x,\ y\geq 1$ ó $x,\ y\leq -1$ y que $xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}\leq -1$ si $x\leq -1$ y $y\geq 1$ (ambas desigualdades se dejan como ejercicio al lector). Por lo tanto de (21) se tiene la siguiente tabla de multiplicación en $\mathcal{L}$

$\Lambda^0_{\ 0}$	$\bar{\Lambda}^0_{\ 0}$	$(\Lambda\bar{\Lambda})^0_{\ 0}$
$+$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$

En la tabla anterior el signo $-$ (resp. signo $+$) denota un número real menor o igual a -1 (resp. mayor o igual a 1). Así, el producto es cerrado en $\mathcal{L}^{\uparrow}$ y la inversa de un elemento $\Lambda\in\mathcal{L}^{\uparrow}$ es un elemento de $\mathcal{L}^{\uparrow}$. Concluimos que $\mathcal{L}^{\uparrow}$ es un subgrupo de $\mathcal{L}$.

Para demostrar que $\mathcal{L}^{\uparrow}$ es normal observe que para todo $\Lambda\in\mathcal{L}$, $\Lambda^0_{\ 0}$ y $(\Lambda^{-1})^0_{\ 0}$ deben tener el mismo signo, de lo cual se sigue que si $\bar{\Lambda}\in\mathcal{L}^{\uparrow}$ entonces $(\Lambda\bar{\Lambda}\Lambda^{-1})^0_{\ 0}\geq 1$. □

De lo anterior se sigue que existen cuatro componentes disjuntas de $\mathcal{L}$, propiamente

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} &= \{\Lambda\in\mathcal{L} : \det(\Lambda)=1, \Lambda^0_{\ 0}\geq 1\};\\ \mathcal{L}^{\downarrow}_{+} &= \{\Lambda\in\mathcal{L} : \det(\Lambda)=1, \Lambda^0_{\ 0}\leq -1\};\\ \mathcal{L}^{\uparrow}_{-} &= \{\Lambda\in\mathcal{L} : \det(\Lambda)=-1, \Lambda^0_{\ 0}\geq 1\};\\ \mathcal{L}^{\downarrow}_{-} &= \{\Lambda\in\mathcal{L} : \det(\Lambda)=-1, \Lambda^0_{\ 0}\leq -1\}. \quad (22)\end{aligned}$$

De las propiedades del determinante y de la tabla anterior se sigue que solo $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ es un subgrupo de $\mathcal{L}$, este es el *grupo de Lorentz propio ortocrono*. Note que $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}=\mathcal{L}_{+}\cap\mathcal{L}^{\uparrow}$ es normal en $\mathcal{L}$ puesto que es intersección de subgrupos normales en $\mathcal{L}$ (véase [15, p. 81]).

La observación anterior sobre $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ se puede reformular de la siguiente manera. La tabla de la proposición 3.2 implica que la función sgn : $\mathcal{L}\to$

$\mathbb{Z}_2$ definida por $\operatorname{sgn}(\Lambda) = \operatorname{sgn}(\Lambda^0_{\ 0})$ es un homomorfismo de grupos. De esto se sigue que la función $\det \times \operatorname{sgn} : \mathcal{L} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ definida por $(\det \times \operatorname{sgn})(\Lambda) = \det(\Lambda) \times \operatorname{sgn}(\Lambda^0_{\ 0})$, es un homomorfismo de grupos y por lo tanto el grupo $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} = \ker(\det \times \operatorname{sgn})$ es un subgrupo normal de $\mathcal{L}$.

Teorema 3.2. *El grupo cociente $\mathcal{L}/\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ es isomorfo a un subgrupo discreto de $\mathcal{L}$ isomorfo al grupo de Klein $V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

Demostración. La inversión temporal y espacial

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

pertenecen a $\mathcal{L}$ y generan al subgrupo de cuatro elementos $V_4 = \{I, T, P, -I\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Note que los elementos de V_4 son representantes de las cuatro componentes descritas; $I \in \mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$, $T \in \mathcal{L}^{\downarrow}_{-}$, $P \in \mathcal{L}^{\uparrow}_{-}$ y $-I \in \mathcal{L}^{\downarrow}_{+}$. Vamos a demostrar que $T\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} = \mathcal{L}^{\downarrow}_{-}$, $P\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} = \mathcal{L}^{\uparrow}_{-}$ y $-I\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} = \mathcal{L}^{\downarrow}_{+}$.

Demostraremos $T\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} = \mathcal{L}^{\downarrow}_{-}$, las demás igualdades se siguen análogamente. Si $\Lambda \in \mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ entonces $\det(T\Lambda) = \det(T) = -1$ y $(T\Lambda)^0_{\ 0} \leq -1$, esto demuestra $T\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \subset \mathcal{L}^{\downarrow}_{-}$. Si $\Lambda \in \mathcal{L}^{\downarrow}_{-}$ entonces $T\Lambda$ satisface $\det(T\Lambda) = 1$ y $(T\Lambda)^0_{\ 0} \geq 1$. Luego $T\Lambda \in \mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ es tal que

$$T(T\Lambda) = T^2\Lambda = \Lambda$$

por lo que $\mathcal{L}^{\downarrow}_{-} \subset T\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ y concluimos que $\mathcal{L}^{\downarrow}_{-} = T\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$.

Para una clase arbitraria $\Lambda\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \in \mathcal{L}/\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ tenemos que Λ pertenece a una de las cuatro componentes de $\mathcal{L}$ y, por lo demostrado en el párrafo anterior, $\Lambda = \Lambda_1\Lambda_2$ con $\Lambda_1 \in V_4$ y $\Lambda_2 \in \mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$. Luego $\Lambda\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ es una de las cuatro clases descritas. $\square$

En la literatura se define a $O(p, q)$ como el grupo de transformaciones lineales que preservan la 2-forma de signatura (p, q) definida por $\operatorname{diag}(-1, \ldots, -1, 1, \ldots, 1)$ y a $SO(p, q)$ como el subgrupo de $O(p, q)$ de transformaciones con determinante 1. Usando esta notación $\mathcal{L} = O(1, 3)$ y se tiene que $\mathcal{L}_+ = SO(1, 3)$ y $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} = SO^+(1, 3)$. Note que si

$$A = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

entonces Λ preserva a η si y solo si $A^{\mathrm{t}}\Lambda A$ preserva a $\eta' = \operatorname{diag}(-1,-1,-1,1)$ y por lo tanto $O(1,3) \cong O(3,1)$ via la transformación $\Lambda \mapsto A^{\mathrm{t}}\Lambda A$.

4. Geometría Diferencial y Topología

En física se dice comúnmente que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{G}$ son grupos de Lie de «diez parámetros» o «diez dimensionales». Esta sección contiene conceptos matemáticos que serán usados en la sección 5 para establecer en forma precisa dichos enunciados.

4.1 Variedades suaves en $\mathbb{R}^n$

Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y considere la norma euclidiana $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ definida por $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Si $p \in \mathbb{R}^n$, se define la *bola de centro en p y radio ϵ* como el conjunto

$$B_\epsilon(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|p - x\| < \epsilon\}.$$

Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es *abierto* si para cada punto $p \in U$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(p) \subset U$.

Ejemplo 4.1. *Los siguientes son ejemplos de abiertos en $\mathbb{R}^n$.*

(i) La bola abierta $B_\epsilon(p)$, con $p \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$.

(ii) Los rectángulos abiertos $R = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, con $a_i < b_i$ para $i = 1, \dots, n$.

Se invita al lector a escribir los detalles (encontrar las bolas correspondientes).

Se sigue de la definición de abierto que todo conjunto en $\mathbb{R}^n$ es abierto si y solo si es unión de bolas abiertas (o rectángulos abiertos). Ejemplos explícitos de abiertos se pueden obtener considerando la imagen inversa de un abierto bajo una función continua.[5]

Una función f de un abierto de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es *diferenciable* o *suave*, si todas sus derivadas parciales (de cualquier orden) existen y son continuas. Si U y V son abiertos de $\mathbb{R}^n$, una función $f : U \to V$ suave con inversa suave $f^{-1} : V \to U$ se dice que es un *difeomorfismo*.

Ejemplo 4.2 (Coordenadas polares)**.** *Considere los conjuntos abiertos*

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\},$$
$$V = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \theta \in (0, \pi/2)\},$$

[5]Si $U \subset \operatorname{Im} f$ es abierto, entonces para $f(p) \in U$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f(p)) \subset U$ y por continuidad existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(p)\| < \epsilon$ si $\|x - p\| < \delta$; así $f(B_\delta(p)) \subset B_\epsilon(f(p))$ y por consiguiente $B_\delta(p) \subset f^{-1}(U)$.

y la función $f : U \to V$ definida por

$$f(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x)) .$$

Su inversa $f^{-1} : V \to U$ está dada por $f^{-1}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Note que f y f^{-1} son suaves en los puntos donde están definidas y así f es un difeomorfismo.

La siguiente definición se puede consultar en [16, p. 109].

Definición 4.1. Un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ es una variedad suave de dimensión k si para cada punto x de M se verifica la siguiente condición:

(M) Existe un conjunto abierto U que contiene a x, un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $f : U \to V$ tal que

$$f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times 0) = \{y \in V : y^{k+1} = \cdots = y^n = 0\}.$$

Ejemplo 4.3. *En $\mathbb{R}^3$ un punto, una línea y un plano son ejemplos de variedades de dimensión $0, 1$ y 2, respectivamente. En $\mathbb{R}^n$ un abierto es una variedad de dimensión n.*

En efecto, note que si M es uno de los conjuntos del ejemplo 4.3, entonces para cada punto $p \in M$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(p) \cap M$ es difeomorfo a una bola de la dimensión correspondiente. Análogamente, se sigue que todo subespacio de dimensión $d \leq n$ de $\mathbb{R}^n$ es una variedad suave de dimensión d en $\mathbb{R}^n$. Un ejemplo importante de variedad suave de dimensión 1 en $\mathbb{R}^2$ es la circunferencia:

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

La condición de ser variedad suave se verifica para todo punto (x,y) con $x > 0$ y $y > 0$ usando el difeomorfismo del ejemplo 4.2. Para encontrar un difeomorfismo en los otros puntos de S^1 se usa una rotación en el plano y se compone con el difeomorfismo anterior.

Una observación fundamental sobre la definición 4.1 es que la verificación de la condición (M) requiere que M sea un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se advierte al lector que existen variedades suaves que pueden ser descritas sin necesidad de hacer referencia a $\mathbb{R}^n$. Un ejemplo bien conocido es el *espacio proyectivo* $\mathbb{P}^2$, el cual se define como sigue. En $N = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ defina $(x,y,z) \sim (x',y',z')$ si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(x',y',z') = \lambda(x,y,z)$. El espacio $\mathbb{P}^2$ es el conjunto de clases de equivalencia en N bajo la relación de equivalencia $\sim$ y se dice que $\mathbb{P}^2$ es el cociente de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ por la acción de $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Note que esta descripción no usa ecuaciones (como en el caso de la circunferencia) y no deja claro si $\mathbb{P}^2$ es un subconjunto de algún $\mathbb{R}^n$, a pesar de que se pueden imaginar las clases de equivalencia como líneas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen a las que se les ha removido el origen.

Es cierto que $\mathbb{P}^2$ es una variedad suave, pero para probarlo se necesita una definición que no haga referencia al «espacio ambiente» $\mathbb{R}^n$. De hecho, es un ejercicio clásico de un primer curso formal en *Geometría Diferencial* mostrar que $\mathbb{P}^2$ es una variedad diferenciable de dimensión 2. Para los fines de este artículo bastará la definición 4.1, puesto que los objetos de estudio introducidos podrán describirse como subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Se invita al lector a que lea el capítulo 16 de [14], en donde se describen el espacio proyectivo y otras variedades suaves de dimensión 2 sin usar ecuaciones. Las referencias [8] y [12] son excelentes textos introductorios al concepto de variedad suave, y los textos [10], [11], [17] y [19] introducen la definición de variedad suave en abstracto. En adelante usaremos la palabra variedad para referirnos a una variedad suave en el sentido de la definición 4.1.

Ahora se dará un criterio que permite identificar algunas variedades suaves de $\mathbb{R}^n$ sin necesidad de comprobar la condición (M) de la definición 4.1. Véase el teorema 5.1 en [16]. En adelante usaremos la notación $f'(x)$ para referirnos a la derivada de la función f en el punto x, i.e., $f'(x)$ es la matriz jacobiana de f. Recuerde que el rango de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la dimensión de su imagen y el rango de una matriz A es el número de filas (o columnas) linealmente independientes de A.

Teorema 4.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $g : A \to \mathbb{R}^p$ una función suave tal que $g'(x)$ tiene rango p para todo punto x tal que $g(x) = 0$. Entonces $g^{-1}(0)$ es una variedad suave de dimensión $n - p$ en $\mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 4.4. *Considere la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = x^2 - y^2 - 1$. Note que g es suave y que $g^{-1}(0) = S^1$. Además $g'(x) = (2x, 2y)$ tiene rango 1 para todo $(x, y) \in S^1$. Luego S^1 es una variedad suave de dimensión 1 en $\mathbb{R}^2$, como ya se había mostrado.*

Usando el teorema 4.1 se puede verificar que un conjunto de $\mathbb{R}^n$ es variedad suave si satisface ciertas ecuaciones. En particular, nuestros ejemplos estarán definidos por ecuaciones que involucran matrices cuadradas.

4.2 Grupos de Lie

La siguiente definición se puede consultar en [4] ó [8].

Definición 4.2. Un grupo de Lie de dimensión k es una variedad suave G de dimensión k con estructura de grupo y tal que las funciones de multiplicación $(g, h) \mapsto gh$ e inversión $g \mapsto g^{-1}$ son suaves.

Del párrafo siguiente al ejemplo 4.3 se tiene que todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión d es una variedad suave de dimensión d. Si

$M_n(\mathbb{R})$ es el conjunto de matrices reales $n \times n$, como espacio vectorial $M_n(\mathbb{R})$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$ (con la suma y producto por escalar definidas entrada por entrada). Se sigue que $M_n(\mathbb{R})$ es una variedad suave de dimensión n^2. Este espacio además está dotado de un producto: el producto de matrices.

Ya que la función determinante $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua, por el comentario posterior al ejemplo 4.1 se sigue que la imagen inversa de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ bajo la función det es un abierto en $M_n(\mathbb{R})$. Así, según el ejemplo 4.3, este conjunto es una variedad de dimensión n^2. Esta variedad es el grupo

$$Gl_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\},$$

el grupo de matrices reales invertibles de tamaño $n \times n$. Su estructura de grupo queda determinada por la mutiplicación de matrices.

Ejemplo 4.5. *$Gl_n(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie de dimensión n^2. En $Gl_n(\mathbb{R})$ la mutiplicación y la inversión son suaves, puesto que sus componentes son funciones polinomiales de las componentes de los argumentos, divididas por* $\det(A)$ *en el caso de la inversión (véase [9, p.177] para una fórmula de la inversa).*

En la sección 5 se probará que $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ son grupos de Lie. Para lo cual, se considerarán como subgrupos de $Gl_5(\mathbb{R})$ y se usará el teorema 4.1 para darles estructura de variedad suave. Las técnicas usadas serán similares a las usadas en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.6. *El grupo $O(3)$ de matrices ortogonales de* 3×3 *es un grupo de Lie de dimensión* 3. *Note que $O(3)$ apareció en forma implícita en el ejemplo 2.1.*

Para ver el ejemplo 4.6 en detalle, observe que $O(3)$ es un subgrupo de $Gl_3(\mathbb{R})$ y considere la función $F : Gl_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ definida por $F(A) = AA^{\mathrm{t}} - I$. Note que $F^{-1}(0) = O(3)$. La derivada de F en el punto $A \in Gl_3(\mathbb{R})$ es la aplicación lineal

$$DF_A : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R}), \qquad DF_A(h) = Ah^{\mathrm{t}} + hA^{\mathrm{t}}.$$

Si $A \in O(3)$ entonces el kernel de esta aplicación es

$$\mathrm{Nul}(DF_A) = \{hA : h \in M_3(\mathbb{R}) \text{ y } h + h^{\mathrm{t}} = 0\}.$$

Este es un espacio vectorial isomorfo al espacio de matrices antisimétricas de 3×3, el isomorfismo es la multiplicación a la derecha por A; por lo tanto $\mathrm{Nul}(DF_A)$ tiene dimensión 3. Se sigue que la dimensión del rango es $\dim \mathrm{Ran}(\mathrm{DF_A}) = 9 - 3 = 6$ para toda $A \in O(3)$. Así al usar el teorema 4.1 se tiene que $O(3)$ es una variedad suave de dimensión $9 - 6 = 3$.

El siguiente resultado será importante en la sección 5.

Lema 4.1. *El grupo de Lie* $SO(3) = \{A \in O(3) : \det(A) = 1\}$ *es conexo.*

Demostración. Para toda matriz $Q \in SO(3)$ existe $P \in O(3)$ tal que $Q = P^{\mathrm{t}} A_\theta P$ con

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Véase [3, p. 143]. De esta factorización se sigue que la curva $\alpha(s) = P^{\mathrm{t}} A_{s\theta} P$ con $s \in [0,1]$ satisface $\alpha(0) = I$, $\alpha(1) = Q$ y $\alpha(s) \in SO(3)$ para todo $s \in [0,1]$ ya que

$$\det(\alpha(s)) = \det(P^{\mathrm{t}}) \det(A_{s\theta}) \det(P) = \det(A_{s\theta}) = 1\,. \qquad \square$$

En un grupo de Lie H todos los elementos que se pueden conectar a la identidad mediante una curva continua contenida en H forman un subgrupo normal. A este subgrupo se le conoce como *la componente conexa a la identidad* de H. Por ejemplo, en el lema 4.1 hemos demostrado que $SO(3)$ es la componente conexa a la identidad de $O(3)$.

4.3 Álgebras de Lie

En esta subsección se estudiará brevemente la relación entre grupos de Lie y su espacio tangente a la identidad. Para aclarar este último término será necesaria la siguiente definición (véase [16, p. 111]).

Definición 4.3. Sea M una variedad suave de dimensión k en $\mathbb{R}^n$. Un sistema de coordenadas alrededor del punto $x \in M$ consta de abiertos $W \subset \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^n$ y una función suave $f : W \to \mathbb{R}^n$ que satisface

a) $f(W) = M \cap U$,
b) $f'(y)$ tiene rango k para todo $y \in W$,
c) $f^{-1} : f(W) \to W$ es continua.

Las componentes de la función f son llamadas coordenadas alrededor de $x \in M$.

Ejemplo 4.7. *a*) *Usando el teorema 4.1 se verifica que la 2-esfera*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

es una variedad suave de dimensión 2 *en* $\mathbb{R}^3$. *Un sistema de coordenadas alrededor de* $(0,0,1)$ *está dado por los conjuntos*

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}\,, \quad U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}\,,$$

con $f : W \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $f(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$. *Se verifica que* $f(W) = U \cap S^2$ *y que la derivada de* f *en el punto*

$(x, y) \in W$ está dada por la matriz

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \tag{23}$$

cuyo rango es 2 para todo $(x, y) \in W$. La inversa de f es la función $f^{-1} : f(W) \to W$ dada por $f^{-1}(x, y, z) = (x, y)$.

b) *Según el ejemplo 4.3, un abierto U de $\mathbb{R}^n$ es una variedad suave de dimensión n en $\mathbb{R}^n$. Un sistema de coordenadas alrededor de $x \in U$ es la función identidad en U, cuyo rango es n para todo $x \in U$.*

Los siguientes conceptos son tomados de [16, p. 115]. El *espacio tangente de $\mathbb{R}^n$ en el punto $a \in \mathbb{R}^n$* es el espacio

$$T_a(\mathbb{R}^n) := \{(a, x) : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

El espacio $T_a(\mathbb{R}^n)$ tiene estructura de espacio vectorial con la suma y producto por escalar definidos por $(a, u)+(a, v) = (a, u+v)$ y $\lambda(a, v) = (a, \lambda v)$. Para referirse a los elementos de $T_a(\mathbb{R}^n)$ se usa la notación $v_a \in T_a(\mathbb{R}^n)$.

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es una función suave, se define la aplicación lineal $f_* : T_a(\mathbb{R}^k) \to T_{f(a)}(\mathbb{R}^n)$ mediante

$$f_*(v_a) = (Df_a(v))_{f(a)}.$$

Si M es una variedad suave de dimensión k y $f : W \to \mathbb{R}^n$ es un sistema de coordenadas alrededor de $f(a) = x \in M$ entonces, la definición 4.3 implica que la aplicación lineal $f_* : T_a(\mathbb{R}^k) \to T_{f(a)}(\mathbb{R}^n)$ tiene rango k, luego f_* es inyectiva en su imagen y por lo tanto $f_*(T_a(\mathbb{R}^k))$ es un subespacio vectorial de dimensión k en $T_{f(a)}(\mathbb{R}^n)$. Se puede probar que este subespacio no depende del sistema de coordenadas alrededor de $x \in M$ (véase [16, p. 115]). A este subespacio se le denota por T_xM y se denomina *espacio tangente de M en x*.

Ejemplo 4.8.

a) *En el ejemplo 4.7 -a) dimos un ejemplo de sistema coordenado f alrededor del punto $(0, 0, 1)$. El espacio tangente al punto $u = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \in S^2$ está generado por los vectores $f_*((1, 0)_u) = (u, v_1)$ y $f_*((1, 0)_u) = (u, v_2)$ en $T_u(\mathbb{R}^3)$ donde v_1 y v_2 son las columnas de la matriz (23). Note que v_1 y v_2 son linealmente independientes y que $\langle u, v_1\rangle = 0$ y $\langle u, v_2\rangle = 0$, por lo que para todo $u \in f(W)$ se tiene*

$$T_u(S^2) \cong \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle u, v\rangle = 0\}.$$

El lector puede verificar que este mismo isomorfismo se tiene para todo $u \in S^2$.

b) *Ya que la derivada de la identidad es la identidad, se sigue del ejemplo 4.7 -b) que si* $U \subset \mathbb{R}^n$ *es abierto entonces* $T_uU = T_u(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$ *para todo punto* $u \in U$.

La siguiente definición se puede consultar en [7, p. 108].

Definición 4.4. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial junto con una aplicación bilineal antisimétrica $[\cdot\,,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisface la identidad de Jacobi:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0\,, \qquad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}\,.$$

En adelante, con el fin de aligerar la notación, no haremos referencia expresa al punto base del espacio tangente si se entiende por el contexto cual es dicho punto.

Ejemplo 4.9. *Se sigue de los ejemplos 4.5 y* $4.8 - b)$ *que*

$$T_A Gl_n(\mathbb{R}) \cong M_n(\mathbb{R})$$

para toda $A \in Gl_n(\mathbb{R})$. *En el caso particular del espacio tangente a la identidad,* $T_I(Gl_n(\mathbb{R}))$, *definimos el corchete*

$$[A,B] := AB - BA. \tag{24}$$

Haciendo uso de la asociatividad del producto de matrices, se verifica que este corchete satisface la identidad de Jacobi y por lo tanto $M_n(\mathbb{R})$ *es un álgebra de Lie.*

Para todo grupo de Lie que es subgrupo de $Gl_n(\mathbb{R})$, se tiene que T_IG es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$ y tiene estructura de álgebra de Lie con el corchete (24). Puesto que todos los grupos de Lie que vamos a considerar son subgrupos de $Gl_n(\mathbb{R})$, ya no se mencionará cuál es su estructura de álgebra de Lie en el tangente a la identidad.

Al espacio tangente a la identidad de un grupo de Lie G se le denota con la letra gótica $\mathfrak{g}$ y se dice que es *el álgebra de Lie de* G.

Si M es una variedad suave y $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ es una curva suave con $\operatorname{Im}\gamma \subset M$ y tal que $\gamma(0) = x$, entonces $\gamma'(0) \in T_xM$. Esta observación así como la siguiente serán importantes en lo que sigue.

Una función muy importante en el estudio de los grupos y álgebras de Lie es la función exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$, la cual se puede definir usando subgrupos a un parámetro (véase [7, p. 114]). En el caso de $Gl_n(\mathbb{R})$, $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to Gl_n(\mathbb{R})$ está determinada por la serie

$$\exp(X) = I + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots\,, \tag{25}$$

la cual converge para todo $X \in M_n(\mathbb{R})$ y satisface propiedades análogas a las de la función exponencial usual, e.g., se pueden demostrar los siguientes lemas. Véase [4, pp. 22-23].

Lema 4.2. *La función exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *es un difeomorfismo en una vecindad del origen en* $\mathfrak{g}$.

Lema 4.3. *Todo grupo de Lie conexo* G *está generado por una vecindad de la identidad en* G.

5. Los grupos de Galileo y Poincaré como grupos de Lie

En las secciones 2 y 3 se estudiaron a los grupos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ como transformaciones afines de $\mathbb{R}^4$ y se mostró que ambos pueden considerarse como subgrupos de $Gl_5(\mathbb{R})$. La finalidad de esta sección es estudiar a dichos grupos como subgrupos de Lie de $Gl_5(\mathbb{R})$.

Teorema 5.1. *Los grupos* $\mathcal{G}$ *y* $\mathcal{P}$ *son grupos de Lie de dimensión 10.*

Demostración. Los grupos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ son subgrupos de $Gl_5(\mathbb{R})$ mediante las inclusiones (5) y (18). Falta demostrar que $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ son variedades suaves de dimensión 10.

Considere la aplicación $F : Gl_5(\mathbb{R}) \to M_5(\mathbb{R})$ dada por

$$B = \begin{pmatrix} c_1 & v_1 & c_2 \\ v_3 & A & v_4 \\ c_3 & v_2 & c_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1 - 1 & v_1 & 0 \\ 0 & AA^{\mathrm{t}} - I & 0 \\ c_3 & v_2 & c_4 - 1 \end{pmatrix},$$

donde $c_i \in \mathbb{R}$, $v_i \in \mathbb{R}^3$ y $A \in M_3(\mathbb{R})$. Note que F se define tal que $F^{-1}(0) = \mathcal{G}$.

La derivada de F en B es la aplicación lineal $DF_B : M_5(\mathbb{R}) \to M_5(\mathbb{R})$ dada por

$$H = \begin{pmatrix} k_1 & h_1 & k_2 \\ h_3 & h & h_4 \\ k_3 & h_2 & k_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k_1 & h_1 & 0 \\ 0 & Ah^{\mathrm{t}} + hA^{\mathrm{t}} & 0 \\ k_3 & h_2 & k_4 \end{pmatrix}.$$

El kernel de DF_B es

$$\mathrm{Nul}(DF_B) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_2 \\ h_3 & h & h_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : Ah^{\mathrm{t}} + hA^{\mathrm{t}} = 0 \right\}.$$

De esta expresión se observa que si $A \in O(3)$ entonces $\dim(\mathrm{Nul}(DF_B)) = 10$, por lo que la dimensión del rango es $\dim(\mathrm{Ran}(DF_B)) = 15$ para todo $B \in F^{-1}(0) = \mathcal{G}$. Al usar el teorema 4.1, se sigue que $\mathcal{G} = F^{-1}(0)$ es una variedad suave de dimensión $5^2 - 15 = 10$.

La demostración de que $\mathcal{P}$ es una variedad suave de dimensión 10 es análoga. Hay que usar la aplicación $F : Gl_5(\mathbb{R}) \to M_5(\mathbb{R})$ definida por

$$B = \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A^{\mathrm{t}}\eta A - \eta & 0 \\ c & d-1 \end{pmatrix},$$

donde $A \in M_4(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^4$ es una columna, $c \in \mathbb{R}^4$ es una fila y $d \in \mathbb{R}$. La derivada de F en B está dada por

$$H = \begin{pmatrix} h & h_1 \\ h_2 & k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A^{\mathrm{t}}\eta h + h^{\mathrm{t}}\eta A & 0 \\ h_2 & k \end{pmatrix}.$$

Un cálculo similar muestra que $\dim(\mathrm{Ran}(DF_B)) = 15$ para todo $B \in F^{-1}(0) = \mathcal{P}$. $\square$

Corolario 5.1. *Los grupos G y $\mathcal{L}$ son grupos de Lie de dimensión 6.*

Demostración. De forma análoga a la demostración del teorema 5.1, para demostrar que G es una variedad suave de dimensión 6 usamos la aplicación

$$\begin{pmatrix} c_1 & v_1 & c_2 \\ v_3 & A & v_4 \\ c_3 & v_2 & c_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1 - 1 & v_1 & c_2 \\ 0 & AA^{\mathrm{t}} - I & v_4 \\ c_3 & v_2 & c_4 - 1 \end{pmatrix},$$

y en el caso de $\mathcal{L}$ usamos

$$\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A^{\mathrm{t}}\eta A - \eta & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}.$$

Estas funciones son diferenciables y su derivada es una aplicación lineal cuyo rango tiene dimensión 19 para todo punto en G y $\mathcal{L}$ respectivamente. $\square$

5.1 Las componentes conexas a la identidad de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$

En las secciones 2 y 3 demostramos que los subgrupos G y $\mathcal{L}$, de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ respectivamente, tienen 2 y 4 componentes disjuntas. En esta subsección se estudian las componentes conexas a la identidad de G y $\mathcal{L}$ y como consecuencia se obtienen las componentes conexas a la identidad para $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$.

Estudiar las componentes conexas de los grupos de Lie es importante en matemáticas y en física. Por ejemplo, conocer las componentes conexas de un grupo de Lie ayuda a entender propiedades topológicas mas sofisticadas, e.g., grupos de homotopía, homología y cohomología. Temas que resultan de relevancia en topología, así como en geometría diferencial y física teórica. En particular, la componente conexa a la identidad del grupo $\mathcal{L}$ parece jugar un papel especial en la naturaleza, al final de la sección 6 ampliaremos brevemente este comentario.

Lema 5.1. *El conjunto* $H_1^+ = \{(t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \,:\, t \geq 1 \text{ y } -t^2 + \sum x_i^2 = -1\}$ *es conexo.*

Demostración. Es suficiente demostrar que se puede conectar cualquier punto $w \in H_1^+$ con el punto $(1,0,0,0) \in H_1^+$ mediante una curva continua contenida en H_1^+.

Si $w = (t, x_1, x_2, x_3) \in H_1^+$ entonces la curva

$$\gamma(s) = (\sqrt{1 + s^2(t^2-1)}, sx_1, sx_2, sx_3), \qquad s \in [0,1], \tag{26}$$

satisface lo requerido. □

A este punto, en forma análoga a como se demostró el lema 4.1, vamos a mostrar que $\mathcal{L}_+^\uparrow$ es la componente conexa a la identidad de $\mathcal{L}$ probando que $\mathcal{L}_+^\uparrow$ es conexo. La idea será demostrar que cada $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ es producto de dos matrices y que cada una de estas se puede conectar a la identidad mediante una curva continua contenida en $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

Lema 5.2. *Toda* $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ *admite una factorización*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & u^{\mathrm{t}} \\ u & P \end{pmatrix}, \tag{27}$$

donde $Q \in SO(3)$, $u \in \mathbb{R}^3$ *es un vector columna y* $P \in Gl_3(\mathbb{R})$ *es una matriz simétrica positiva definida.*

Demostración. Sea $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$. Explícitamente

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & \Lambda_2^0 & \Lambda_3^0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 \\ \Lambda_0^2 & \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 \\ \Lambda_0^3 & \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Reescribimos esta matriz como

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & u^{\mathrm{t}} \\ v & A \end{pmatrix}, \tag{29}$$

con $u^t = (\Lambda_1^0, \Lambda_2^0, \Lambda_3^0)$ un vector fila y $v = (\Lambda_0^1, \Lambda_0^2, \Lambda_0^3)$ un vector columna.

Al sustituir (29) en la ecuación $\Lambda^{\mathrm{t}}\eta\Lambda = \eta$ y realizar las operaciones con matrices, se tiene que esta ecuación se cumple si y solo si se satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\|v\|^2 = (\Lambda_0^0)^2 - 1\,, \qquad v^{\mathrm{t}}A = \Lambda_0^0 u^{\mathrm{t}}\,, \qquad A^{\mathrm{t}}A = I + uu^{\mathrm{t}}\,. \tag{30}$$

De las ecuaciones (30) se sigue que si $u = 0$ entonces $A^{\mathrm{t}}A = I$, lo que implica que $v = 0$ y $(\Lambda_0^0)^2 = 1$. Puesto que $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, se sigue que $\Lambda_0^0 = 1$ y $A \in SO(3)$. Por lo que la factorización de la proposición se tiene con $Q = A$ y $P = I$. En adelante supondremos que $u \neq 0$.

Ahora, recuerde que toda matriz cuadrada admite una «descomposición polar». Es decir, toda matriz cuadrada $B \in M_n(\mathbb{R})$ se puede escribir como un producto $B = QP$, con Q una matriz ortogonal y P una matriz simétrica positiva definida (véase [3] p. 153). Al usar la descomposición polar de A y la tercera ecuación de (30) se obtiene

$$I + uu^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}}A = P^{\mathrm{t}}Q^{\mathrm{t}}QP = P^2. \tag{31}$$

En seguida mostramos que la matriz P es diagonalizable. De la demostración de la Proposición 3.2 se sigue que $\|u\| = \|v\|$ y así la primera ecuación de (30) implica

$$(\Lambda^0_{\ 0})^2 - \|u\|^2 = 1\,. \tag{32}$$

Por lo que (31) implica

$$P^2u = (I + uu^{\mathrm{t}})u = u + \|u\|^2u = (\Lambda^0_{\ 0})^2u$$

y si x es ortogonal a u implica $P^2x = x$. Por lo tanto P^2 es similar a la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} (\Lambda^0_{\ 0})^2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Luego P es similar a la matriz $\operatorname{diag}(\Lambda^0_{\ 0}, 1, 1)$. Note que podría haber ambigüedad en la elección de esta última matriz, ya que la matriz (33) admite dos raíces cuadradas. La positividad de P y el hecho de que $\Lambda^0_{\ 0} \geq 1$ garantiza que no existe dicha ambigüedad.

De la descripción anterior se sigue que

$$Pu = \Lambda^0_{\ 0}u \qquad \text{y} \qquad Px = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \langle x, u\rangle = 0\,. \tag{34}$$

Puesto que $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ es normal tenemos que $\Lambda^{\mathrm{t}} = \eta\Lambda^{-1}\eta \in \mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$. Luego, las ecuaciones (30) siguen siendo válidas si intercambiamos u con v y A con A^{t}. En particular, al realizar estos cambios, la segunda ecuación de (30) implica que $Au = \Lambda^0_{\ 0}v$. La cual, junto con la primera ecuación de (34) y la descomposición polar de A implican $Qu = v$. Así

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & u^{\mathrm{t}} \\ v & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & u^{\mathrm{t}} \\ Qu & QP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & u^{\mathrm{t}} \\ u & P \end{pmatrix}.$$

Falta demostrar que $Q \in SO(3)$. Puesto que $\det(\Lambda) = 1$, es suficiente probar que

$$\det\begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & u^{\mathrm{t}} \\ u & P \end{pmatrix} = 1\,.$$

Sea $\{y_1, y_2\}$ una base del espacio ortogonal a u y considere la base de $\mathbb{R}^4$ dada por

$$\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \left\{\begin{pmatrix} \|u\| \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\|u\| \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\}.$$

De las ecuaciones (34) se sigue que la matriz

$$R = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & u^{\mathrm{t}} \\ u & P \end{pmatrix}$$

satisface

$$Rw_1 = (\Lambda^0_0 + \|u\|)w_1\,, \quad Rw_2 = (\Lambda^0_0 - \|u\|)w_2\,, \qquad Rw_3 = w_3\,, \quad Rw_4 = w_4\,.$$

Así R es similar a la matriz diagonal $\mathrm{diag}(\,\Lambda^0_0 + \|u\|\,,\, \Lambda^0_0 - \|u\|\,,\, 1\,,\, 1\,)$. Finalmente, (32) implica

$$\det(R) = (\Lambda^0_0 + \|u\|)(\Lambda^0_0 - \|u\|) = (\Lambda^0_0)^2 - \|u\|^2 = 1\,. \qquad \square$$

Teorema 5.2. *El grupo de Lorentz propio ortocrono $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ es conexo.*

Demostración. Usaremos aquí la notación de la demostración del lema 5.2.

Si $\Lambda \in \mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ entonces Λ admite la factorización (27). Es suficiente demostrar que existen curvas continuas que conectan a cada uno de los factores en (27) con la identidad y que cada una de estas curvas está contenida en $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$.

Del lema 4.1 existe una curva α que conecta a $Q \in SO(3)$ con la identidad. Así la curva $\beta(s) = \mathrm{diag}(1, \alpha(s))$, $s \in [0, 1]$, conecta a la matriz $\mathrm{diag}(1, Q)$ con la identidad y claramente $\beta(s) \in \mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$. Falta demostrar que existe una curva que conecta a la matriz

$$R = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & u^{\mathrm{t}} \\ u & P \end{pmatrix}$$

del lema 5.2 con la identidad y que dicha curva está contenida en $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$.

Note que si $u = 0$, del lema 5.2 se sigue que $\Lambda^0_0 = 1$ y $P = I$ y no hay nada que demostrar. En adelante supondremos que $u \neq 0$. En tal caso debido a (32), el punto $w = (\Lambda^0_0, u) \in \mathbb{R}^4$ está en el conjunto H^+_1 definido en el lema 5.1 y el mismo lema implica que existe una curva γ en H^+_1 que conecta a w con el punto $(1, 0, 0, 0)$. Dicha curva es:

$$\gamma(s) = (\Lambda^0_0(s), su)\,, \qquad \text{con} \quad \Lambda^0_0(s) = \sqrt{1 + s^2((\Lambda^0_0)^2 - 1)}\,. \tag{35}$$

Vamos a demostrar que para cada $\gamma(s)$ se puede construir una matriz $R_{\gamma(s)}$ tal que $R_{\gamma(0)} = I$, $R_{\gamma(1)} = R$ y $R_{\gamma(s)} \in \mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ para todo $s \in [0, 1]$.

En forma análoga a como se hizo en la demostración del lema 5.2 definimos

$$R_{\gamma(s)} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0(s) & su^{\mathrm{t}} \\ su & P_{\gamma(s)} \end{pmatrix}$$

con $\Lambda^0_0(s)$ dado por (35) y $P_{\gamma(s)}$ la matriz definida por

$$P_{\gamma(s)}u = \Lambda^0_0(s)u \quad \text{y} \quad P_{\gamma(s)}x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \langle x, u\rangle = 0\,. \tag{36}$$

Ahora, de la desigualdad $\Lambda_0^0 \geq 1$, se sigue que

$$\Lambda_0^0(s) = \sqrt{1 + s^2((\Lambda_0^0)^2 - 1)} \geq 1\,. \tag{37}$$

En particular $\Lambda_0^0(0) = 1$ y $\Lambda_0^0(1) = \Lambda_0^0$ y de (36) se sigue que $P_{\gamma(0)} = I$ y $P_{\gamma(1)} = P$. Por consiguiente $R_{\gamma(0)} = I$ y $R_{\gamma(1)} = R$.

Ya que el primer factor en (27) es siempre un elemento de $\mathcal{L}$, la desigualdad (37) implica que $R_{\gamma(s)} \in \mathcal{L}^{\uparrow}$. Así, para terminar basta verificar que $\det(R_{\gamma(s)}) = 1$ para todo $s \in [0,1]$. Al final de la demostración del lema 5.2 vimos que los autovalores de R son $\lambda_1 = \Lambda_0^0 + \|u\|$, $\lambda_2 = \Lambda_0^0 - \|u\|$ y $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Por lo que para $R_{\gamma(s)}$ se tiene

$$\lambda_1(s) = \Lambda_0^0(s) + s\|u\|\,, \qquad \lambda_2(s) = \Lambda_0^0(s) - s\|u\|\,,$$

y $\lambda_3(s) = \lambda_3(s) = 1$. Como el determinante es el producto de los autovalores, (32) implica

$$\det(R_{\gamma(s)}) = \lambda_1(s)\lambda_2(s) = 1 + s^2((\Lambda_0^0)^2 - 1) - s^2\|u\|^2 = 1\,. \qquad \square$$

Corolario 5.2. *Las componentes conexas a la identidad de los subgrupos G y $\mathcal{L}$ son los subgrupos G_+ y $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ respectivamente.*

Demostración. El teorema 5.2 implica que $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ es la componente conexa a la identidad en $\mathcal{L}$. La conexidad de G_+ se sigue de (7), (8) y del lema 4.1. $\square$

De la continuidad de la multiplicación de matrices se sigue que G es la unión de las dos componentes conexas definidas en (8) y $\mathcal{L}$ es la unión de las cuatro componentes conexas definidas en (22). Este resultado se extiende a los grupos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ usando el siguiente corolario, la proposición 2.2 y el teorema 3.2.

Corolario 5.3. *Las componentes conexas que contienen a la identidad en $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ son los subgrupos $\mathcal{G}_+$ y $\mathcal{P}_+^{\uparrow} = \{T_{\Lambda,a} \in \mathcal{P} \,:\, \Lambda \in \mathcal{L}_+^{\uparrow},\ a \in \mathbb{R}^4\}$, respectivamente.*

Demostración. Sea $\Lambda \in \mathcal{L}_+^{\uparrow}$, por el teorema 5.2 se sigue que existe una curva γ que conecta a Λ con la identidad. Luego, al usar la identificación (18), la curva

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma(t) & ta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

conecta a $T_{\Lambda,a}$ con la identidad en $\mathcal{P}$. La conexidad de $\mathcal{G}_+$ se demuestra análogamente. $\square$

5.2 Las álgebras de Lie de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$

Para terminar esta sección vamos a estudiar la relación entre los grupos de Lie de nuestro interés y su espacio tangente a la identidad.

Proposición 5.1. *Las álgebras de Lie de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ son los espacios vectoriales*

$$\mathfrak{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ v & X & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : X \in \mathfrak{o}(3),\, v,\, a \in \mathbb{R}^3 \ y\ s \in \mathbb{R} \right\} \tag{38}$$

y

$$\mathfrak{P} = \left\{ \begin{pmatrix} X & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : X \in \mathfrak{l} \ y\ a \in \mathbb{R}^4 \right\} \tag{39}$$

con $\mathfrak{o}(3)$ y $\mathfrak{l}$ las álgebras de Lie de $O(3)$ y $\mathcal{L}$, respectivamente.

Demostración. Sea R_τ una curva diferenciable en $O(3)$ tal que $R_0 = I$ y $R_0' = X \in \mathfrak{o}(3)$. Al derivar la ecuación $R_\tau R_\tau^{\mathrm{t}} = I$ se tiene la ecuación

$$R_\tau' R_\tau^{\mathrm{t}} + R_\tau (R_\tau^{\mathrm{t}})' = 0\,. \tag{40}$$

Al evaluar (40) en $\tau = 0$ se obtiene $X + X^{\mathrm{t}} = 0$. Puesto que el espacio de matrices en $M_3(\mathbb{R})$ que satisfacen dicha ecuación es de dimensión 3 tenemos

$$\mathfrak{o}(3) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) : X + X^{\mathrm{t}} = 0\}.$$

Este es el espacio de matrices antisiméticas en $M_3(\mathbb{R})$. Por la descripción de $\mathcal{G}$ hecha en la proposición 2.1 se tiene que si R_τ es una curva en $O(3)$ tal que $R_0 = I$ y $R'(0) = X \in \mathfrak{o}(3)$, entonces

$$\gamma(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tau s \\ \tau v & R_\tau & \tau a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una curva en $\mathcal{G}$ tal que $\gamma(0) = I$ y si $\gamma'(0) = Y \in \mathfrak{G}$ entonces

$$Y = \gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ v & X & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, el álgebra de Lie de $\mathcal{G}$ es el espacio vectorial $\mathfrak{G}$ definido en (38).

Ahora, si Λ_τ es una curva en $\mathcal{L}$ tal que $\Lambda_0 = I$ y $\Lambda_0' = X \in \mathfrak{l}$. Al derivar la ecuación $\Lambda_\tau^{\mathrm{t}} \eta \Lambda_\tau = \eta$ se obtiene la ecuación

$$(\Lambda_\tau')^{\mathrm{t}} \eta \Lambda_\tau + \Lambda_\tau^{\mathrm{t}} \eta \Lambda_\tau' = 0\,. \tag{41}$$

Al evaluar (41) en $\tau = 0$ se obtiene $X^{\mathrm{t}}\eta + \eta X = 0$. El espacio de matrices $X \in M_4(\mathbb{R})$ que satisface dicha ecuación es de dimensión 6, por lo que tenemos

$$\mathfrak{l} = \{X \in M_4(\mathbb{R}) : X^{\mathrm{t}}\eta + \eta X = 0\}.$$

Análogamente al cálculo anterior, usando la inclusión (18) se muestra que el álgebra de Lie de $\mathcal{P}$ es el espacio vectorial $\mathfrak{P}$ definido en (39). $\square$

Finalmente, quisiéramos enfatizar que con lo visto hasta ahora se puede encontrar un conjunto de generadores de $\mathcal{L}_+^\uparrow$, lo cual se resume en el siguiente resultado.

Proposición 5.2. *Todo $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ es producto finito de elementos de la forma*

$$\begin{pmatrix} \cosh\alpha_1 & \operatorname{senh}\alpha_1 & & \\ \operatorname{senh}\alpha_1 & \cosh\alpha_1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh\alpha_2 & & \operatorname{senh}\alpha_2 & \\ & 1 & & \\ \operatorname{senh}\alpha_2 & & \cosh\alpha_2 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh\alpha_3 & & & \operatorname{senh}\alpha_3 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \operatorname{senh}\alpha_3 & & & \cosh\alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{42}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & \\ & \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta_2 & & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ & & 1 & \\ & \operatorname{sen}\theta_2 & & \cos\theta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cos\theta_3 & -\operatorname{sen}\theta_3 \\ & & \operatorname{sen}\theta_3 & \cos\theta_3 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Demostración. Denotemos a los generadores en (42) por B_i y a los generadores en (43) por C_i.

Primero observe que el álgebra de Lie de la componente conexa de cualquier grupo de Lie G es la misma que el álgebra de Lie de G. Luego, de la proposición 5.1 se sigue que una base para el álgebra de Lie de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ está dada por

$$X_1 = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & \\ 1 & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

y

$$Y_1 = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & -1 \\ & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} & & & \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ & & & \end{pmatrix}.$$

Al hacer uso de (25) se verifica que $\exp(\alpha_i X_i) = B_i$ y $\exp(\theta_i Y_i) = C_i$. El resultado se sigue del teorema 5.2 y los lemas 4.2 y 4.3. $\square$

6. Comentarios finales

En las secciones 2 y 3 se estudiaron a los grupos de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ como transformaciones afines de $\mathbb{R}^4$. Posteriormente, en la sección 4 se revisaron algunos conceptos de Geometría Diferencial y Topología, los cuales fueron esenciales para desarrollar la sección 5, en la cual se abordó a dichos grupos como grupos de Lie. Como se mencionó antes, los grupos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ son las estructuras matemáticas subyacentes a las nociones de *espacio y tiempo Newtoniano* y de *espacio-tiempo de Einstein*, y por consiguiente, son importantes en Física y Matemáticas y juegan un papel crucial en nuestra comprensión de la naturaleza. En esta sección se mencionarán brevemente algunos aspectos relacionados con dichos grupos.

Un hecho importante de resaltar es que los grupos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$, como fueron introducidos en las secciones 2 y 3, provienen de condiciones algebraicas distintas. En particular, para $\mathcal{G}$ se imponían (1) y (2) en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^3$ con la métrica euclidiana g, respectivamente; y para $\mathcal{P}$ se imponía (10) en $\mathbb{R}^4$ con la pseudo-métrica η. Aún cuando provienen de condiciones algebraicas distintas, los grupos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ tienen similitudes, e.g., ambos contienen como subgrupos al grupo de traslaciones en el espacio y en el tiempo y al grupo ortogonal $O(3)$ de las partes (ii) y (iii) del ejemplo 2.1. Ahora, si bien $\mathcal{P}$ no contiene a las transformaciones (i) del ejemplo 2.1, existe una relación entre ciertas transformaciones en $\mathcal{P}$ llamadas *boosts* y las transformaciones (i). En efecto, si c es la velocidad de la luz, v es tal que $0 < v < c$ y se define $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, un ejemplo de un *boost* en $\mathcal{P}$ viene dado por la matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\, v/c & & \\ \gamma\, v/c & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Si se definen $x^0 = c\,t$ y $x'^0 = c\,t'$, la matriz anterior Λ define la transformación en $\mathbb{R}^4$

$$t' = \gamma(t + x^1\, v/c^2)\,, \quad x'^1 = \gamma(x^1 + vt)\,, \quad x'^2 = x^2\,, \quad x'^3 = x^3\,. \tag{44}$$

La segunda expresión en (44) puede escribirse

$$x'^1 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}(x^1 + vt) = x^1 + vt + \mathcal{O}(v^2/c^2)\,. \tag{45}$$

Por otro lado, la primera expresión en (44) puede escribirse

$$t' = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}(t + x^1\, v/c^2) = t + x^1\, v/c^2 + \mathcal{O}(v^2/c^2)\,. \tag{46}$$

Note que si $v << c$ los términos $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ y v/c^2 en (45) y (46) se pueden despreciar. En tal caso la transformación (44) es –en una muy buena «aproximación»– un caso especial de una transformación (i) del ejemplo 2.1.[6]

A lo largo del artículo se enfatizó la relevancia que han tenido los grupos de Galileo $\mathcal{G}$ y de Poincaré $\mathcal{P}$, tanto en física como en matemáticas. En particular, en lo que compete a la Física Teórica del Siglo XX el grupo $\mathcal{P}$ es el grupo de mayor interés, y el grupo $\mathcal{G}$ es considerado como

[6]Existe una interpretación física simple de este hecho: la condición $v << c$ representa un cambio de marcos inerciales «no relativista», i.e., uno con velocidad despreciable con relación a la velocidad de la luz. Así, salvo correcciones de orden $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ y v/c^2, los boosts no relativistas en $\mathcal{P}$ coinciden con movimientos uniformes rectilíneos en $\mathcal{G}$.

una muy buena «aproximación» a $\mathcal{P}$ cuando se tienen «fenómenos no-relativistas», i.e., donde las velocidades involucradas son despreciables en comparación con la velocidad de la luz c. Desde esta perspectiva, resultó del mayor interés en Física Teórica determinar si todos los fenómenos físicos en la naturaleza resultaban «invariantes» bajo el grupo $\mathcal{P}$. En particular, era importante determinar si los mismos eran invariantes bajo inversiones espaciales P y temporales T, tal como fueron descritas en la demostración del teorema 3.2. Este tipo de problemas resultaron estrechamente relacionados a una teoría física que surgió en la segunda mitad del Siglo XX y que hoy en día es comúnmente llamada *Teoría Cuántica de Campos* (QFT).[7] Derivado de la QFT y de algunos experimentos resultó que existían fenómenos físicos que no eran invariantes bajo P y T. Hasta la fecha, un «modelo» especial de QFT conocido en física como el *Modelo Estándar*, propone como grupo de «simetrías de la naturaleza» al grupo de Lorentz propio ortocrono $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

Bibliografía

[1] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2.ª ed., Springer-Verlag, 1988.
[2] E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience, 1957.
[3] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 2.ª ed., UTM series, Springer-Verlag, 1997.
[4] T. Bröcker y T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Springer-Verlag, 1985.
[5] A. Einstein, «Zur Elektrodynamik bewegter Körper», *Annalen der Physick*, vol. 17, 1905, 891, Una traducción al ingles en: *The principle of Relativity*, Methuen & Co. London (1923).
[6] ———, *Relativity: The Special and General Theory*, Methuen & Co. Ltd., revised edition: 1924.
[7] W. Fulton y J. Harris, *Representation Theory: a First Course*, Springer-Verlag, 1991.
[8] C. J. Isham, *Modern Differential Geometry for Physicists*, 2.ª ed., World Scientific Publishing, 2001.
[9] S. Lang, *Linear Algebra*, 3.ª ed., Springer-Verlag, 1987.
[10] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, GTM, vol. 218, Springer-Verlag, 2002.
[11] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, 1983.
[12] ———, *Elementary Diferential Geometry*, 2.ª ed., Academic Press (Elsevier), 2006.
[13] E. Piña, «Henri Poincaré y las Transformaciones de Lorentz», *Miscelánea Matemática*, núm. 58, 2014, 31–56.
[14] D. S. Richeson, *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*, Princeton University Press, 2008.
[15] J. J. Rotman, *Advanced Modern Algebra*, 1.ª ed., Prentice Hall, 2002.
[16] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company. USA, 1965.
[17] L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer, 2008.

[7] La Teoría Cuántica de Campos fue un marco teórico desarrollado principalmente entre los 50's y los 70's, el cual resultó como consecuencia de unificar la *Mecánica Cuántica* y la *Relatividad Especial*. Al desarrollo de la QFT contribuyeron físicos célebres como P. A. M. Dirac, R. Feynman, S. Weinberg, A. Salam y M. Gell-Mann, entre otros. El lector interesado en estos temas puede encontrar una excelente introducción histórica a QFT en [20], Cap. I.

[18] S. Walter, «Minkowski, Mathematicians, and the Mathematical Theory of Relativity», *The expanding worlds of general relativity*, 1999, 45–86.
[19] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, GTM, vol. 94, Springer-Verlag, 1983.
[20] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. I Foundations, Cambridge Univ. Press, 1995.