EL METODO DE INDUCCION MATEMATICA

Por

I.S. SOMINSKII

Traducido del ruso por Guillermo Gómez Alcaraz*

Revisado por Manuel Meda Vidal**

Traducido de la 6a. edición rusa:
Metod matematicheskoi induktzii;
Ilyia Samoilovich Sominskii;
Fizmatgiz, 1961.

* CIMAS de la UNAM

** ESFM del IPN

INDICE

Recomendación	0
Prólogo	1
Introducción	3
I. El método de inducción matemática	5
II. Ejemplos y ejercicios	15
III. Demostración de algunos teoremas de álgebra elemental por el método de inducción matemática	42
Soluciones a los problemas	51

RECOMENDACION

Este pequeño libro será de gran utilidad para los estudiantes de las preparatorias (vocacionales), tecnológicos y en forma especial, dado el nivel actual de la enseñanza en México, para los estudiantes del primer año de las facultades de todas las ramas de ingeniería, de la escuela normal superior, de las escuelas de física y matemáticas y de las facultades de ciencias.

En las preparatorias (vocacionales, tecnológicos, CCH) puede ser utilizado como material de discusión en seminarios con participación activa de los alumnos.

Por la diversidad de ejemplos será interesante para no pocos profesores de matemáticas en preparatorias y en el primer año de diferentes facultades de universidades e institutos técnicos, así como en la normal superior.

PROLOGO DEL AUTOR .

El método de inducción matemática, al que está dedicado este folleto, es ampliamente utilizado en diferentes ramas de la matemática, desde los cursos de la escuela media*) hasta aquellos tópicos de la matemática de más reciente investigación. Es por eso que, sin el conocimiento de dicho método, se antoja imposible estudiar en forma seria inclusive el curso elemental de matemáticas en la escuela media. Es más, las ideas de la inducción matemática tienen un enorme valor formativo por lo cual su conocimiento reviste interés aun para aquellas personas alejadas de la matemática y sus aplicaciones.

En el capítulo I y la primera parte del capítulo II -(hasta el problema 30) se exponen el contenido del método y los ejemplos más sencillos de su aplicación, cuyo estudio es realizable con los conocimientos del octavo año**). El material restante es comprensible al lector que posee la matemática correspondiente al ciclo completo de enseñanza media.

El presente es recomendable para estudiantes de los - últimos cursos de enseñanza media, para estudiantes de los - primeros cursos de los institutos pedagógicos***), universidades e institutos técnicos, también puede ser utilizado en "círculos" de matemáticas.

Al método de inducción matemática están dedicados los siguientes artículos: Sierpinskii V.K. O matematicheskoi induktzii, Matemática y física v shkole, No. 3, 1936; Bezikovich Ya.S., Metod polnoi matematicheskoi induktzii, Matemática v shkole,- No. 1, 1946;

---

*) Entiéndase como el equivalente a la secundaria y preparatoria (vocacional) de México. N. del T.

**) Segundo o tercer año de secundaria. N. del T.

***) Equivalente en México: Escuela Normal Superior. N. del T.

Sominskii I. S. Ob izuchenii metoda matematicheskoi induktzii v srednei shkile, Matemática y shkole, metodicheskii-sbornik, v. 2, Leningradskii oblastnoi institut usovershenstvovania uchitelei, 1947; Naguibin F. F. Metod matematicheskoi indusktzii v kurse srednei shkoly, Matematika v-shkile No. 4, 1949.

El lector puede encontrar problemas sobre inducción matemática en el libro de Krechmar V. A. Problemario de álgebra, Ftamtguiz, 1959.

La presente 6a. edición se diferencía de las anteriores sólo en pequeñas modificaciones de estilo.

I. Sominskii

Las proposiciones (afirmaciones) se subdividen en generales y particulares. Daremos ejemplos de afirmaciones generales:

Todos los ciudadanos de la URSS, tienen derecho a la educación.

En *todo* paralelogramo las diagonales se intersectan en su punto medio.

Todos los números que terminan en cero son divisibles entre 5.

Ejemplos de afirmaciones particulares, correspondientes a las anteriores son:

Petrov tiene derecho a la educación.

En el paralelograma ABCD las diagonales se intersectan en su punto medio.

140 es divisible entre 5.

El inferir de una proposición general una particular se llama *deducción*. Consideremos un ejemplo.

1. Todos los ciudadanos de la URSS tienen derecho a la educación.
2. Petrov es ciudadano de la URSS.
3. Petrov tiene derecho a la educación.

De la proposición general 1, mediante la proposición 2, se obtiene la proposición particular 3.

El llegar a una proposición general, a partir de una particular se llama *inducción*. La inducción puede llevarnos tanto a resultados veraderos como falsos. Explicaremos esto con dos ejemplos.

1. 140 es divisible entre 5.
2. Todos los números terminados en cero son divisibles entre 5.

De la proposición particular 1 fue obtenida la proposición general 2. La proposición 2 es verdadera.

1. 140 es divisible entre 5.
2. Todos los números de tres cifras son divisibles entre 5.

De la proposición particular 1 obtuvimos la proposición general 2. La proposición 2 es falsa.

Se pregunta: ¿Cómo utilizar en matemáticas la inducción para obtener sólo conclusiones verdaderas?. En este pequeño libro se da respuesta a dicha pregunta.

I. EL METODO DE INDUCCION MATEMATICA.

1. Primeramente, consideramos dos ejemplos de inducción no permisibles en matemáticas.

Ejemplo 1. Sea

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Es fácil comprobar que

$$S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4},$$

$$S_4 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} = \frac{4}{5}.$$

En base a los resultados obtenidos afirmamos, que para cualquier número natural n

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

Ejemplo 2. Consideremos el trimonio $x^2 + x + 41$, estudiado por el conocido matemático, uno de los primeros académicos de San Peterburgo* , L. Euler. Sustituyendo en el trimonio x por cero, obtenemos el número primo ** 41. Sustituyendo ahora en el mismo trimonio x por 1, nuevamente obtenemos un número primo: 43. Continuando las sustituciones de x por 2,3,4,5,6,7,8,9,10, en el trimonio, obtenemos cada vez el respectivo número primo 47, 53,61,71,83,97,113,131,151. En base a los resultados obtenidos afirmamos que al sustituir en el trimonio x por cualquier número entero positivo el resultado siempre es un número primo.

*) San Peterburgo, antiguo nombre de la actual ciudad de Leningrado. N. del T.

**) Número primo es aquel que sólo es divisible entre la unidad y si mismo N. del T.

¿Porqué los razonamientos utilizados en estos ejemplos no son lícitos en matemáticas? ¿En qué consiste lo incorrecto de nuestras conclusiones?

Consiste en que en los dos razonamientos hemos hecho afirmaciones generales respecto a cualquier valor natural de n (en el segundo ejemplo respecto a cualquier x) sólo basándonos en que las afirmaciones resultaron ciertas para algunos valores de n (de x respectivamente).

La inducción es ampliamente utilizada en matemáticas, pero es necesario utilizarla con destreza. Pueden obtenerse resultados incorrectos al referirse superficialmente a este método.

No obstante que en el ejemplo 1 la afirmación general mencionada resulta casualmente cierta, como será demostrado en el ejemplo 5, en el ejemplo 2 la afirmación general es incorrecta.

En efecto, al estudiarse más atentamente el trinomio $x^2 + x + 41$ descubrieron que es un número primo para $x=0,1,\ldots,39$ pero para $x=40$ el trinomio vale 41^2 que no es primo.

2. En el ejemplo 2 nos encontramos con una proposición válida para 40 casos particulares y sin embargo resulta en general falsa.

Mencionaremos dos ejemplos más de proposiciones que son verdaderas en varios casos particulares, pero en general son falsas.

Ejemplo 3. El binomio x^n-1, donde n es un número natural presenta gran interés para los matemáticos. Es suficiente con decir que dicho binomio está íntimamente relacionado con el problema geométrico de dividir la circunferencia en n partes iguales. No nos debe extrañar, por eso que en matemáticas se estudien diferentes facetas de éste binomio. A los matemáticos en particular les interesó el problema de descomponer x^n-1 en factores (polinomios de grado menor a n) con coeficientes enteros.

Considerando estas descomposiciones los matemáticos, observaron que para muchos valores particulares de n, los coeficientes del desarrollo, en valor absoluto no eran mayores que 1. En efecto.

$$
\begin{aligned}
x - 1 &= x = 1,\\
x^2 - 1 &= (x - 1)(x + 1),\\
x^3 - 1 &= (x - 1)(x^2 + x + 1),\\
x^4 - 1 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1),\\
x^5 - 1 &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1),\\
x^6 - 1 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Fueron confeccionadas tablas con los valores de los coeficientes que satisfacían la propiedad observada. Los intentos de demostrar éste hecho para toda n no llevaron a los resultados apetecidos.

En el año de 1938 en la revista "Uspieji Matematicheskij naúk" Vol. IV, fué publicada una nota del gran matemático soviético, Académico N. G. Chebotariov, en la que proponía se aclarase este problema.

El problema propuesto fué resuelto por V. Ivanov [1]. Resultó que la propiedad observada la cumplen todos los binomios x^n-1, cuyo grado es menor a 105. Uno de los factores de $x^{105}-1$ es el polinomio

$$
\begin{aligned}
&x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} +\\
&\quad + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} -\\
&\quad - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^{9} - x^{8} -\\
&\qquad\qquad - 2x^{7} - x^{6} - x^{5} + x^{2} + x + 1,
\end{aligned}
$$

que ya no cumple con la propiedad.

---

1) Uspieji matematicheskij nauk, Vol. 4,313-317 (1941).

Ejemplo 4. ¿En cuántas partes queda dividido el espacio*) por n planos que pasan por un mismo punto, si ninguna terna de planos se intersectan en una recta?

Consideremos el caso particular más sencillo de este problema. Un plano divide al espacio en 2 partes. Dos planos que pasan por un punto dividen al plano en 4 partes. Tres planos que pasan por un punto pero que no pasan por una recta común dividen el plano en 8 partes.

Puede parecer a primera vista que al aumentar el número de planos en uno, el número de partes en que queda dividido el espacio aumenta lo doble y de este modo cuatro planos dividirían al espacio en 16 partes, cinco en 32 partes, etc. En general n planos subidividirían al espacio en 2^n partes.

En realidad esto no es cierto, puesto que 4 planos dividen al espacio en 14 partes, 5 planos en 22 partes. En general n planos subdividen al espacio en $n(n-1)+2$ partes[1].

Los problemas considerados permiten sacar una conclusión sencilla y a la vez importante:

Una proposición puede ser cierta en muchos casos particulares y sin embargo no ser verdadera en general.

3. Ahora surge el siguiente problema. Se tienen proposiciones que para algunos casos particulares son verdaderas. Es imposible analizar todos los casos particulares.

¿Cómo podemos saber, si la proposición en cuestión es cierta en general?

Esta pregunta a veces se logra resolver mediante la aplicación de un método especial de razonamiento llamado método de inducción matemática (inducción completa o inducción total*).

---

*) Se sobreentiende el espacio físico usual de 3 dimensiones (R^3). N. del T.

1) Vease la solución en la pag. 23 (problema 30)

**) También conocida como inducción finita. N. del T.

El funcionamiento de este método descansa en el principio de inducción matemática, que consiste en lo siguiente:

Una proposición es verdadera para todo número natural n*), si:

(1) La proposición es verdadera para n=1**) y

(2) De la veracidad de la proposición para cierto número natural n=k arbitrario, se concluye su veracidad para n=k+1.***).

Demostración. Supongamos lo contrario, o sea supongamos que la proposición no es cierta para todo número natural n. Entonces existe un número natural m, tal que a) la proposición para n=m no es verdadera, b) la proposición es verdadera para toda n menor que m (En otras palabras m es el primer número natural, para el cual la proposición no se cumple).

Es evidente que m 1, puesto que la preoposición es verdadera para n=1 (condición (1)). Por lo tanto, (m-1) es un número natural. Resulta pues, que la proposición es verdadera para el número natural (m-1), sin embargo no lo es para el siguiente natural: m. Esto contradice la condición (2).

Observación. En la demostración del principio de inducción matemática hemos utilizado implícitamente, que en todo conjunto C de números naturales hay uno menor que los restantes****). Es fácil ver que a su vez esta propiedad puede -

---

*) Se supone que la proposición depende del número natural n, o sea que es una función de variable natural n. N. del T.

**) Por la naturaleza de las proposiciónes hay veces que (1) debe ser comprobado para n=0, o bien n=S, donde S es cierto número natural. Ver por ejemplo los probls. 22,24. N. - del T.

***) Es importante que el lector observe el carácter condicional de (2):
La proposición para n=k+1 será cierta, si previamente lo es para n=k. N. del T.

****) Lo que se conoce como el principio del buen orden. Sólo hay que tener en cuenta un pequeño agregado, a saber: que- el conjunto mencionado C tiene al menos un número natural. Este principio es una propiedad específica de los números naturales. Por ejemplo el conjunto {-1,-2,...,-n,...} de - los números enteros negativos, no tiene un elemento menor que todos los demás, puesto que $-(n+1)<-n$, para toda n. N del T.

Ejemplo 5. Evaluar la suma (vease el ejemplo 1)

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} +...+ \frac{1}{n(n+1)}.$$

Sabemos que

$$S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{2}{3},\ S_3 = \frac{3}{4},\ S_4 = \frac{4}{5}.$$

Ahora no repetiremos el error cometido en el ejemplo 1 y de inmediato no afirmaremos que para todo natural n

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

Seremos cautos y solo diremos que la observación de- S_1, S_2, S_3, S_4, permite expresar la conjetura (suposición) que - $S_n = \frac{n}{n+1}$ para todo natural n. Además sabemos que ésta conjetura es cierta para n=1,2,3,4. Para comprobar esta hipótesis utilizaremos el método de inducción matemática.

Teorema 1. Para n=1 la hipótesis es cierta, ya que - $S_1 = \frac{1}{2}$.

Teorema 2. Supongamos que la hipótesis es correcta - para n=k, es decir

$$S_k = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} +...+ \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1},$$

donde k es algún número natural. Demostremos entonces que la conjetura está obligada a ser cierta también para n=k+1, o - sea que

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}.$$

En efecto,

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)},$$

en consecuencia por la condición del teorema

$$S_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Los dos teoremas han sido demostrados. Ahora, en base al principio de inducción matemática afimamos que

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

ser deducida del principio de inducción matemática*). Es así que los dos principios son equivalentes. Cualquiera de éstos principios puede admitirse como uno de los axiomas que definen el conjunto de los números naturales y entonces el otro será un teorema. Comúnmente se toma como axioma, precisamente el principio de inducción matemática.

4. Toda demostración basada en el principio de inducción matemática se llama demostración <u>por el método de inducción matemática</u>.

Una tal demostración necesariamente debe constar de dos partes, de la demostración de dos teoremas independientes:

<u>Teorema 1. La afirmación es verdadera para n=1.</u>

<u>Teorema 2. La afirmación es verdadera para n=k+1, si la misma es cierta para n=k, donde k es cualquier número natural.</u>

Si éstos dos teoremas son demostrados, entonces basados en el principio de inducción matemática la afirmación es verdadera para todo número natural n.

---

*) En efecto, si denotamos por P(n) la posición siguiente: "Si C (conjunto al que se alude en el enunciado del principio del buen orden) contiene un elemento que es menor o igual ($\leq$) que n, entonces C tiene un elemento mínimo". El principio del buen orden equivale entonces a la validez de P(n) para toda n.
Si 1 pertenece a C, es el 1 el mínimo de C, por tanto P(1) es cierta. Ahora, por el principio de inducción (aceptado como hipótesis), basta probar que si P(n) es cierta, también lo es P(n+1).

Debemos demostrar que si existe un m del conjunto C, tal que $m \leq n+1$, entonces C tiene mínimo. Si C contiene un elemento menor que n, entonces por P(n), el conjunto C tendrá mínimo. Si en C no hubiera dicho número menor que n, entonces cualquier elemento de C sería mayor que n, o sea mayor o igual que (n+1), luego entonces mayor o igual que m y como m es de C, resulta que m es el mínimo.

Por lo tanto en C hay un elemento mínimo. N. del T.

para todo natural n.

Nota 1. Es necesario subrayar que la demostración por el método de inducción matemática, sin excepción, exige la demostración de los teoremas 1 y 2.

Ya hemos visto a que puede llevar el no tomar en cuenta el teorema 2 (ejemplo 2). Ahora mostraremos que tampoco el teorema 1 puede ser despreciado consideremos un ejemplo.

Ejemplo 6. Teorema. Todo número natural es igual a su siguiente número natural.

La demostración la haremos por el método de inducción matemática. Supongamos que

$$k = k + 1 \tag{1}$$

Demostremos que

$$k + 1 = k + 2 \tag{2}$$

En efecto sumando 1 a los miembros de la igualdad (1) obtenemos la igualdad (2). Resulta que si la afirmación es verdadera para $n=k$, entonces también lo es para $n=k+1$. El teorema queda demostrado.

Corolario. Todos los números naturales son iguales.

¿Dónde está el error ?. El error consiste en que el primer teorema, necesario para la aplicación del principio de inducción matemática, no fué demostrado, es más dicho teorema no es verdadero y solamente fue demostrado el segundo teorema.

Los teoremas 1 y 2 tienen significados muy singulares. El teorema 1 forma, por así decirlo, la base para llevar a cabo la inducción. El teorema 2 dá derecho a extender automáticamente sin límite dicha base, derecho al paso de un caso particular al siguiente, de n a $n+1$.

Si no se demuestra el teorema 1 pero ha sido demostrado el teorema 2 (vease el ejemplo 6), entonces no ha sido formada la base para la construcción de la inducción y portanto carece de sentido aplicar el teorema 2 puesto que propiamente no hay nada que extender.

Si no está demostrado el teorema 2 y solo el teorema 1 ha sido demostrado (vease los ejemplos 1 y 2), entonces, no obstante tener la base para efectuar la inducción, no se tiene el derecho para extender dicha base.

Nota: 2. Arriba el método de inducción matemática ha sido estudiado para un caso sencillo. En casos complicados los enunciados de los teoremas 1 y 2 debiendo ser modificados respectivamente.

Hay veces en que la segunda parte de la demostración se basa en la veracidad de la afirmación no solo para n=k, sino también para n=k-1. En este caso la afirmación en la primera parte debe ser comprobada para dos valores sucesivos de n (ver abajo el problema 18).

Otras veces la afirmación se demuestra no para toda n natural, sino para todo número entero n mayor que cierto entero m. En éste caso en la primera parte de la demostración se comprueba la veracidad de la afirmación para n=m+1 y si es necesario también para algunos de los siguientes valores de n (vease el problema 24).

5. Para finalizar con éste capítulo regresaremos de nuevo al ejemplo 1 para explicar un aspecto fundamental del método de inducción matemática.

Estudiando la suma

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

para diferentes valores de n obtuvimos que

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{2}{3}, \quad S_3 = \frac{3}{4}, \quad S_4 = \frac{4}{5}, \ldots,$$

y ésto nos indujo a la hipótesis de que para toda n

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

Para comprobar ésta hipótesis utilizamos el método de inducción matemática.

Fuimos afortunados, pues escogimos una hipótesis - que fúe comprobada. Si hubieramos expresado una hipótesis - falsa, entonces lo incorrecto de la misma lo podemos notar- al demostrar el teorema 2, como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 7. Sabemos que

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \qquad (1)$$

Supongamos que estudiando la estructura de S_n, expresáramos la hipótesis de que

$$S_n = \frac{n+1}{3n+1}. \qquad (2)$$

Para n=1 la fórmula (2) es correcta, ya que $S_1 = \frac{1}{2}$. Supongamos que la fórmula (2) es cierta para n=k, o sea

$$S_k = \frac{k+1}{3k+1}.$$

Tratemos de demostrar que la fórmula (2) es también correcta para n=k+1, es decir

$$S_{k+1} = \frac{k+2}{3k+4}.$$

Tenemos

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k+1}{3k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^3+4k^2+8k+3}{(k+1)(k+2)(3k+1)},$$

o sea, que obtuvimos un resultado diferente al esperado.

En resumen, la veracidad de la fórmula (2) para n=k no implica su veracidad para n=k+1. Es así que hemos detectado que la fórmula (2) no es correcta.

Por lo tanto, el método de inducción matemática permite, en la búsqueda de una ley general, comprobar las hipótesis surgidas, descartando las falsas y afirmando las verdaderas.

II. EJEMPLOS Y EJERCICIOS

Para aprender la manera de aplicar el método de inducción matemática es necesario discutir una cantidad suficiente de problemas.

En éste capítulo daremos 52 problemas, 22 de los cuales serán inmediatamente resueltos con detalle. Las soluciones de los restantes 30, recomendamos sean trabajados en forma independiente, está incluidos al final del libro.

Problema 1.

Escribamos en orden creciente los números impares positivos 1.3.5.7,... . Denotemos al primero $u_1=1$, al segundo por u_2, al tercero por u_3 etc., esto es

$$u_1 = 1,\ u_2 = 3,\ u_3 = 5,\ u_4 = 7,\ldots$$

Nos planteamos el siguiente problema: encontrar una fórmula que exprese todo número impar u_n, a través de su número de orden $\underline{n}$.

Solución El primer número impar u_1 puede escribirse así:

$$u_1 = 2\cdot 1 - 1. \qquad (1)$$

El segundo número impar u_2 puede escribirse como:

$$u_2 = 2\cdot 2 - 1. \qquad (2)$$

El tercer número impar u_3 puede expresarse así:

$$u_3 = 2\cdot 3 - 1. \qquad (3)$$

Analizando detalladamente las igualdades (1),(2) y (3) puede hacerse la hipótesis de que para obtener cualquier número impar, es suficiente restar 1 de dos veces su número de orden, esto es para el enésimo número impar tenemos la fórmula

$$u_n = 2n-1. \qquad (4)$$

Demostremos que ésta fórmula es cierta.

Teorema 1. La igualdad (1) muestra que para n=1 la -

fórmula (4) es verdadera.

Teorema 2. Supongamos que la fórmula (4) es cierta - para n=k, es decir el k-ésimo número impar es de la forma:

$$u_k = 2k - 1.$$

Demostremos entonces que la fórmula (4) es también - necesariamente cierta para el (k+1)-ésimo número impar, o sea que el (k+1)-ésimo número impar es de la forma:

$$u_{k+1} = 2(k+1)-1,$$

o lo que es lo mismo,

$$u_{k+1} = 2k+1.$$

Para obtener el (k+1)-ésimo impar es suficiente sumarle 2 al k-ésimo número impar, esto es $u_{k+1} = u_k + 2$. Por hipótesis $u_k = 2_{k-1}$. Significa que

$$u_{k+1} = (2k - 1) + 2 = 2k+1$$

que es lo que se quería demostrar.

Resultado $u_n = 2n-1$

Problema 2. Calcular la suma de los n primeros números impares.

Solución. Denotemos por S_n la suma buscada, es decir

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) .$$

Para la solución de tales problemas existen en matemáticas fórmulas simplificadas. A nosotros nos interesa resolver este problema, sin recurrir a la fórmula directa, utilizando el método de inducción. Para ésto ante todo hay que construir una hipótesis, o sea tratar de vaticinar la respuesta.

Daremos a n los valores sucesivos 1,2,3,... hasta acumular suficiente información para, en base a ella, construir una hipótesis más o menos segura. Después de esto solo resta comprobar la mencionada hipótesis por el método de inducción matemática.

Tenemos que

$S_1 = 1,\ S_2 = 4,\ S_3 = 9,\ S_4 = 16,\ S_5 = 25,\ S_6 = 36$.

Ahora todo depende de lo observador que sea el que - esta resolviendo el problema, de su capacidad para obtener - una conclusión general, a partir de resultados particulares.

Nos parece que en éste caso es fácil darse cuenta que

$$S_1 = 1^2,\ S_2 = 2^2,\ S_3 = 3^2,\ S_4 = 4^2 .$$

De donde podemos presuponer que en general:

$$S_n = n^2 .$$

Demostremos que dicha hipótesis es cierta.

<u>Teorema 1.</u> Para n=1 la suma tiene un solo sumando y- es igual a 1. Por tanto la hipótesis es cierta para n=1.

<u>Teorema 2.</u> Supongamos que la hipótesis es cierta para n=k, a saber $S_k = k^2$. Demostremos que entonces también la hipotesis debe ser cierta para n=k+1, es decir

$$S_{k+1} = (k+1)^2 .$$

En efecto

$$S_{k+1} = S_k + (2k+1) .$$

Pero $S_k = k^2$, por lo cual

$$S_{k+1} = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2,$$

que es lo que queríamos demostrar.

<u>Respuesta:</u> $S_n = n^2$.

<u>Problema 3.</u> Hallar u_n, si se conoce que $u_1 = 1$ y que para todo k>1 natural,

$$u_k = u_{k-1} + 3 .$$

<u>Indicación:</u> $u_1 = 3 \cdot 1 - 2,\ u_2 = 3 \cdot 2 - 2$.

<u>Problema 4.</u> Hallar la suma

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} .$$

Indicación. 1) $S_1 = 2 - 1$; $S_2 = 2^2 - 1$; $S_3 = 2^3 - 1$, o bien 2) considerar $2S_n - S_n$.

Problema 5. Demostrar que la suma de los n primeros números naturales es $\frac{n(n+1)}{2}$(*).

Solución. Este problema difiere de los anteriores en que la hipótesis no es necesario construirla, sino que es dada. Solo hay que demostrar que la hipótesis es cierta.

Denotemos la suma buscada por S_n, esto es:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Teorema 1. Para n=1 la hipótesis es verdadera.

Teorema 2. Supongamos que

$$S_k = 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Demostremos que:

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

En efecto, esto proviene de que:

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

---

*) Hay una forma de hallar la suma de los n primeros números naturales a partir de la expresión ya conocida $(k+1)^2-k^2=2k+1$, escribiendole para $k=1,2,\ldots,n$ respectivamente y sumando

$$\begin{aligned} 2^2 - 1^2 &= 2.1 + 1 \\ 3^2 - 2^2 &= 2.2 + 1 \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ (n+1)^2 - n^2 &= 2.n + 1 \\ \hline (n+1)^2 - 1 &= 2\,(1+2+\ldots+n)\ +n \end{aligned}$$

Por lo que

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{(n+1)^2 - 1 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Vease además la nota del teorema 7 al final del texto. N.del C.

Problema 6. Demostrar que la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales es igual a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (*)

Problema 7. Demostrar que

$$S_n = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solución.

Teorema 1. Para n=1 la hipótesis es evidentemente cierta $((-1)^0 = 1)$.

Teorema 2. Supongamos que:

$$S_k = 1 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2}.$$

Demostremos entonces que:

$$S_{k+1} = 1 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^k (k+1)^2 =$$

$$= (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

---

*) Análogamente a lo hecho en la nota del problema 5 observemos que sumando las expresiones que se obtienen a partir de $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ haciendo k=1,2,...,n-1 y n

$$2^3 - 1^3 = 3.1^2 + 3.2 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3.2^2 + 3.2 + 1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(n+1)^3 - n^3 = 3.n^2 + 3.n + 1$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3(1+2+\ldots+n) + n$$

y como ya sabemos que $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, tenemos que:

$$3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n = n^3 + 3n^2 + 2n -$$

$$- \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

y por último:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Vease además la nota del teorema 7 al final del texto.

N. del T.

Esto es cierto, puesto que:

$$S_{k+1} = S_k + (-1)^k (k+1)^2 =$$

$$= (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2 =$$

<u>Problema 8.</u> Demostrar que:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2-1)(2n+1)}{3}.$$

<u>Problema 9.</u> Demostrar que la suma de los cubos, de los n primeros números, es igual a $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. (*)

<u>Problema 10.</u> Demostrar que:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1} \qquad (x \neq 1).$$

(*) Observemos por último que el procedimiento sugerido en las notas de los ejercicios 5 y 6 se puede proseguir para obtener cualaqier suma de potencias de los n primeros números naturales; en el caso de los cubos o terceras potencias le daríamos a k los valores 1,2,...,n en la igualdad $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ y sumaríamos estas n igualdades

$$2^4 - 1^4 = 4.1^3 + 6.1^2 + 4.1 + 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4.2^3 + 6.2^2 + 4.1 + 1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(n+1)^4 - n^4 = 4.n^3 + 6.n^2 + 4.n + 1$$

$$(n+1)^4 - 1 = 4(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) +$$

$$+ 4(1+2+\ldots+n) + n$$

De donde podemos despejar la suma buscada:

$$4(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = (n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n =$$

$$= n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n^2 + 2n + 1) =$$

$$= n^2 (n+1)^2$$

y

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Vease, además la nota del teorema 7 al final del texto.

N. del C.

Problema 11. Demostrar que:

$$1.2 + 2.3 + 3.4 +\ldots+ n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Problema 12. Demostrar que:

$$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + n(n+1)(n+2) =$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Problema 13. Demostrar que:

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Problema 14. Demostrar que:

$$\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Problema 15. Demostrar que:

$$\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Problema 16. Demostrar que:

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1} = \frac{n}{4n+1}.$$

Problema 17. Demostrar que:

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$$

Problema 18. Demostrar que $v_n = 2^n + 1$, si $v_0 = 2$, $v_1 = 3$ y para todo k natural se cumple la relación:

$$v_{k+1} = 3v_k - 2v_{k-1}.$$

Solución. Para n=0 y n=1 la afirmación es cierta por las condiciones iniciales dadas.

Supongamos que:

$$v_{k-1} = 2^{k-1} + 1; \quad v_k = 2^k + 1.$$

Entonces

$$v_{k+1} = 3(2^k+1) - 2(2^{k-1}+1) = 2^{k+1} + 1.$$

Problema 19. Demostremos que:

$$u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta},$$

si

$$u_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}, \quad u_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} \quad (\alpha \neq \beta)$$

y para cada k 2 natural tiene lugar que

$$u_k = (\alpha+\beta)\, u_{k-1} - \alpha\beta u_{k-2}$$

Problema 20. El producto 1*2*3*·*n se denota por n! y se lee "n factorial". Es útil recordar que 1!=1;2!=2,3!=6, 4!=24,5!=120.

Calcular

$S_n = 1.1!+2.2!+3.3!+ \cdots + n.\, n!$

Solución.

$S_1 = 1.1! = 1,$

$S_2 = 1.1! + 2.2! = 5,$

$S_3 = 1.1! + 2.2! + 3.3! = 23,$

$S_4 = 1.1! + 2.2! + 3.3! + 4.4! = 119.$

Viendo estos resultados podemos observar que

$S_1 = 2! - 1, \quad S_2 = 3! - 1 \quad S_3 = 4! - 1 \quad S_4 = 5! - 1.$

Esto sugiere la siguiente hipótesis

$$S_n = (n + 1)! - 1.$$

Comprobemos esta hipótesis.

Teorema 1. Para n=1 la hipótesis es cierta, ya que:

$$S_1 = 1.1! = 2! - 1.$$

Teorema 2. Supongamos cierta la hipótesis para n=k, - esto es

$$S_k = 1.1! + 2.2! +\ldots+ k.k! = (k+1)!-1.$$

Demostremos que:

$S_{k+1} = 1.1! + 2.2! +\ldots+ k.k! + (k+1).(k+1)! =$

$$= (k + 2)! - 1.$$

En efecto .

$$S_{k+1} = S_k + (k+1).(k+1)! =$$
$$= [(k+1)! - 1] + (k+1).(k+1)! =$$
$$= (k+1)![1 + (k+1)] - 1 =$$
$$= (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1.$$

Problema 21. Demostrar la identidad

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \ldots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} =$$
$$= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

Problema 22. Demostrar que

$$A_n = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})} \qquad (1)$$

si se sabe que

$$\alpha + \beta = m, \ \alpha\beta = a$$

$$A_2 = m - \frac{a}{m-1}, \ A_3 = m - \frac{a}{m - \frac{a}{m-1}}, \ A_4 = m - \frac{a}{m - \frac{a}{m - \frac{a}{m-1}}}, \ \text{etc.}$$

o sea para k>1:

$$A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k} \qquad (m \neq 1;\ \alpha \neq \beta)$$

Solución.

Teorema 1. Primeramente demostremos que para n=2 la fórmula (1) es correcta. De las condiciones dadas

$$A_2 = m - \frac{a}{m-1} = (\alpha+\beta) - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)-1} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta - \alpha - \beta}{\alpha + \beta - 1}$$

De acuerdo a la fórmula (1)

$$A_2 = \frac{(\alpha^3 - \beta^3) - (\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha - \beta)}.$$

Dividiendo numerador y denominador de ésta última fracción entre $(\alpha-\beta)$, tenemos:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\alpha-\beta}{\alpha+\beta-1}$$

que es lo que queríamos mostrar.

Teorema 2. Supongamos que para n=k la fórmula (1) es cierta, esto es

$$A_k = \frac{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}{(\alpha^k-\beta^k)-(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})}$$

Entonces demostremos que también debe ser cierta para n=k+1, o sea

$$A_{k+1} = \frac{(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})-(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}-(\alpha^k-\beta^k)}.$$

En efecto:

$$A_{k+1} = m - \frac{\alpha}{A_k}, \quad \text{o bien} \quad A_{k+1} = (\alpha+\beta) - \frac{\alpha\beta}{A_k}.$$

Utilizando la igualdad (2) tenemos que:

$$A_{k+1} = (\alpha+\beta) - \frac{\alpha\beta\left[(\alpha^k-\beta^k)-(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})\right]}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)} =$$

$$= \frac{(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})-(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}.$$

con esto el teorema ha sido demostrado.

Problema 23. Simplificar el polinomio

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x(x-)\ldots(x-n+1)}{n!}.$$

Respuesta: $(-1)^n \dfrac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}$.

Problema 24. Demostrar que cualquier cantidad mayor que 7 rublos*) (número entero de rublos) puede serpagada --

*) Unidad monetaria de la Unión Soviética. N. del T.

(sin cambio) con billetes de 3 y 5 rublos.

Solución.

Para el caso de 8 rublos la proposición es verdadera.

Supongamos cierta la proposición para k rublos, donde k es un número entero mayor o igual que 8.

Son posibles dos casos:

a) Los k rublos son pagados solo con billetes de 3 rublos y

b) Los k rublos son pagados con billetes entre los cuales, por lo menos, hay uno de 5 rublos.

En el primer caso el número de billetes de 3 rublos debe ser no menor que tres, puesto que en este caso $k>8$. Para pagar $k+1$ rublos, sustituyamos tres billetes de 3 rublos por dos de 5.

En el segundo caso para pagar $(k+1)$ rublos, sustituimos un billete de 5 rublos por dos de 3.

Problema 25. Demostrar que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible entre 9.

Solución. La suma $1^3 + 2^3 + 3^3$ es divisible entre 9. Esto significa que la proposición es cierta cuando el primero de los tres números naturales consecutivos es el 1.

Supongamos que la suma $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$, donde k es cierto número natural, es divisible entre 9.

La suma

$$(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3 =$$
$$= [k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3] + 9 (k^2 + 3k + 3)$$

Queda expresada como la suma de dos expresiones, cada una de las cuales es divisible entre 9 y por lo tanto la suma con primer término $k+1$ es también divisible entre 9.

Problema 26. Demostrar que para los enteros $n>0$

$$A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

es divisible entre 133.

Problema 27. Al azar se escogen $(n+1)$ números de entre los $2n$ enteros: $1,2,\ldots,2n$. Demostrar que entre los números escogidos hay al menos dos, uno de los cuales es divisible entre el otro.

Solución [1]. Supongamos que de los $2n$ enteros: $1,2,\ldots,2n$, donde $n>2$, fue posible escoger $(n+1)$ números, tales que ninguno de ellos es divisible entre otro de los $n+1$ escogidos. El conjunto de todos estos números, para simplificar, lo denotaremos por M_{n+1}. Bajo estas condiciones demostremos que de los $(2n-2)$ números $1,2,\ldots,2n-2$ pueden escoger $\underline{n}$ números, tales que de nuevo ninguno sea divisible entre otro.

Son posibles cuatro casos:

(a) $2n-1$ y $2n$ no están contenidos en M_{n+1}

(b) M_{n+1} contiene a $(2n-1)$, pero no contiene a $2n$.

(c) M_{n+1} contiene a $2n$, pero no contiene a $2n-1$.

(d) $2n-1$ y $2n$ están contenidos en M_{n+1}.

Caso (a). Excluyamos de M_{n+1} uno de sus números. Quedan n enteros, cada uno de los cuales no es mayor que $2n-2$. Ninguno de estos números es divisible entre cualquiera de los otros.

Caso (b). Excluyamos de M_{n+1} el número $2n-1$. Quedan $\underline{n}$ enteros cada uno de los cuales no es mayor que $2n-2$. Ninguno de estos números es divisible entre cualquiera de los otros.

Caso (c). Excluyamos de M_{n+1} el número $2n$ y de nuevo obtenemos el mismo resultado.

Caso (d). Ante todo señalemos que el número $\underline{n}$ no pertenece a M_{n+1}, ya que en caso contrario a M_{n+1} pertenecerían por lo menos dos números ($2n$ y n), de los cuales uno es divisible por el otro. Excluyamos de M_{n+1} los números $2n-1$ y $2n$. La colección de los $(n-1)$ números restantes la denotaremos por M_{n-1}. Incluyamos el número $\underline{n}$ en M_{n-1}. Obtenemos n números, cada uno de los cuales no es mayor que $(2n-2)$. Falta demostrar

---

(1) Comunicada al autor, por el entonces estudiante M. Fridmam del Instituto Pedagógico de Leningrado.

que entre estos n números ninguno es divisible entre cualquier otro.

En M_{n+1} no encontramos ningún par de números uno de - los cuales era divisible entre el otro. Esto significa que - tampoco M_{n-1} contiene a tales números. Solo falta mostrar que tales números tampoco aparecen cuando incluimos en M_{n-1} el - número n.

Con este propósito es suficiente cerciorarse de que:

(1) Ningún número perteneciente a M_{n-1} es divisible - entre n.
(2) El número n no es divisible entre ningún número - perteneciente a M_{n-1} .

Lo primero es consecuencia de que todos los números - pertenecientes a M_{n-1} no son mayores que 2n-2 y lo segundo - de que el número 2n no es divisible entre ninguno de los números pertenecientes a M_{n-1} .

Así que, si suponemos que la proposición es falsa para los 2n números: 1,2,...,2n, entonces también es falsa para los 2(n-1) números: 1,2,...,2n-2. Esto significa que, si la proposición es verdadera para los 2(n-1) números: 1,2,..., 2n-2, - entonces también lo es para los 2n números: 1,2,..., 2n.

Para dos números: 1,2 la proposición es verdadera. Por tanto, dicha proposición es verdadera para los 2n números: - 1,2,..., 2n, donde n es cualquier número natural.

Señalemos que este problema tiene la siguiente solución sencilla. Escojamos arbitrariamente (n+1) números de los 2n - dados. A la colección de dichos números la llamaremos M_{n+1}.

Cada número par perteneciente a M_{n+1}, dividámoslo por la potencia de 2, tal que el cociente de la división sea un - número impar. Formemos el conjunto $\overline{M}_{n+1}$ con los cocientes de las divisiones antedichas y por los números impares que pertenecían a M_{n+1}. En $\overline{M}_{n+1}$ figuran (n+1) números impares, cada uno de los cuales es menor que 2n.

Puesto que son n los números impares positivos menores que 2n, tendremos en $\overline{M}_{n+1}$, por lo menos dos números iguales. Demostremos por k a estos números iguales.

Este resultado significa que en M_{n+1} hay por lo menos dos números $2^s k$ y $2^t k$, uno de los cuales es divisible entre el otro.

Problema 28. Demostrar que n rectas trazadas en el plano por un mismo punto, dividen a dicho plano en 2n partes.

Problema 29. Demostrar que n rectas en el plano, dividen a éste en regiones que pueden ser pintadas de color blanco o negro, de suerte que las regiones colindantes (es decir, las regiones que tienen un segmento de recta común) estén pintadas con colores diferentes.

Problema 30. Demostrar que n planos que pasan por un punto, de manera que ninguna terna de planos pasen por una misma recta, dividen al espacio en $A_n = n(n-1) + 2$ partes.

Solución. (1) Un plano divide al espacio en 2 partes y $A_1 = 2$. Para n = 1 la proposición se cumple.

(2) Supongamos que la proposición es verdadera para n = k, o sea que, k planos divide al espacio en k(k-1) + 2 partes. Demostremos que entonces (k+1) planos dividen al espacio en k(k+1) + 2 partes.

En efecto, sea P el plano (k+1). El plano P es intersectado por cada uno de los primeros k planos, a lo largo de cierta recta y por tanto el plano P queda dividido en partes mediante k rectas diferentes que pasan por un mismo punto. Por el problema 28 podemos afirmar que el plano P queda dividido en 2k partes cada una de las cuales resulta ser un ángulo en el plano con vértice en el punto de intersección.

Los primeros k planos dividen al espacio en ciertos ángulos poliédricos. Algunos de estos ángulos poliédricos quedan divididos en dos partes mediante el plano P.

El lado común de dos de dichas partes resulta parte del plano actodado por dos rectas a lo largo de las cuales se intersecta con las caras del susodicho ángulo poliédrico, es decir uno de los 2k ángulos poliédricos en que el plano P está dividido.

Esto significa que el número de ángulos poliédricos divididos en dos partes por el plano P no puede ser mayor que 2k.

Por otro lado cada una de las 2k partes en que queda dividido el plano P, como resultado de su intersección con los k primeros planos, resulta la cara común de dos ángulos poliédricos y por tanto divide al ángulo poliédrico, formado por los k primeros planos, en dos partes.

Esto significa que el número de ángulos poliédricos, que dividen en dos partes al plano P, no puede ser menor que 2k.

Consecuentemente el plano P divide en dos partes exactamente a las 2k regiones del espacio formadas por los primeros k planos. Es por esoque si k planos dividen al espacio en $k(k-1) + 2$ partes, entonces $(k+1)$ planos dividen al espacio en

$$[k(k-1)+2] + 2k = k(k+1) + 2$$

partes. La proposición ha sido demostrada.

Problema 31. Demostrar la identidad

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \ldots \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

Solución. (1) Para n=0 la identidad es cierta, puesto que

$$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}.$$

(2) Supongamos que la identidad es verdadera para n=k, es decir

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \ldots \cos 2^k \alpha = \frac{\sin s^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}.$$

Entonces es también verdadera para n=k+1. En efecto

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \ldots \cos 2^k\alpha \cos 2^{k+1}\alpha =$$

$$= \frac{\sin 2^{k+1}\alpha \cos 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha} = \frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}.$$

Problema 32. Demostrar que $A_n = \cos n\theta$, si se conoce que $A_1 = \cos\theta$, $A_2 = \cos 2\theta$ y para todo número natural $k>2$ se satisface la relación

$$A_k = 2\cos\theta\, A_{k-1} - A_{k-2}.$$

Solución. (1) La proposición se cumple para $n=1$ y $n=2$.

(2) Supongamos que:

$$A_{k-2} = \cos(k-2)\theta, \quad A_{k-1} = \cos(k-1)\theta.$$

Entonces

$$A_k = 2\cos\theta\cos(k-1)\theta - \cos(k-2)\theta = \cos k\theta .$$

Problema 33. Demostrar que

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \sin\frac{nx}{2} .$$

Solución. (1) Para $n=1$ la proposición es cierta.

(2) Supongamos que

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin kx = \frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = \sin\frac{kx}{2} .$$

Entonces

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin kx + \sin(k+1)x =$$

$$= \frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \sin\frac{kx}{2} + \sin(k+1)x =$$

$$= \frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \sin\frac{kx}{2} + 2\sin\frac{k+1}{2}x\cos\frac{k+1}{2}x =$$

$$= \frac{\sin\frac{k+2}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \sin\frac{k+1}{2} ,$$

ya que

$$2\cos\frac{k+1}{2}x\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{k+2}{2}x - \sin\frac{kx}{2}.$$

Problema 34. Demostrar que

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Problema 35. Demostrar que:

$$\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \dots + n\sin nx =$$

$$= \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

Problema 36. Demostrar que

$$\cos x + 2\cos 2x + \dots + n\cos nx =$$

$$= \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

Problema 37. Demostrar que

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x \qquad (x \neq m \quad).$$

Problema 38. Demostrar que

$$\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arcctg} 5 + \dots + \operatorname{arcctg}(2n+1) =$$

$$= \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \dots + \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n} - n\operatorname{arctg} 1.$$

Problema 39(*) Demostrar que

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

(*) Para resolver este problema y los siguientes hasta el 42 se necesita inclusive estar familiarizado con los números - complejos. N. del T.

Solución. (1) Para n=1 la proposición es verdadera, - ya que

$$1 + i = 2^{\frac{1}{2}} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) .$$

(2) Supongamos que

$$(1 + i)^{k} = 2^{\frac{k}{2}} (\cos \frac{k\pi}{4} + i \sin \frac{k\pi}{4}) .$$

Entonces

$$(1 + i)^{k+1} =$$

$$= 2^{\frac{k}{2}} (\cos \frac{k\pi}{4} + i \sin \frac{k\pi}{4}) \cdot 2^{\frac{1}{2}} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})=$$

$$= 2^{\frac{k+1}{2}} (\cos \frac{(k+1)\pi}{4} + i \sin \frac{(k+1)\pi}{4}) .$$

Problema 40. Demostrar que

$$(\sqrt{3} - i)^{n} = 2^{n} (\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6}) .$$

Problema 41. Demostrar el siguiente teorema.

Si como resultado de la aplicación de un número finito de operaciones racionales (o sea suma, resta, multiplicación y división) a los números complejos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se obtiene- el complejo u, entonces el resultado de las mismas operaciones sobre los complejos conjugados $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ es el número $\bar{u}$, - conjugado de u.

Solución. Ante todo mostraremos que la proposición es verdadera para las operaciones racionales mecionadas entre dos complejos. Sean

$$x_1 = a + bi, \quad x_2 = c + di.$$

Entonces

$$x_1 + x_2 = (a + c) + (b + d)i = u;$$

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \bar{u} .$$

De igual manera se comprueba la proposición para la resta, multiplicación y división.

Supongamos que ahora tenemos cierta expresión racional de los números complejos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Como es sabido, el cálculo de una tal expresión se reduce a la aplicación sucesiva de las cuatro operaciones consideradas sobre los números complejos, donde en particular pueden ser numeradas dichas operaciones.

Por ejemplo, sea

$$u = \frac{x_1 x_2 + x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3} .$$

Para calcular u es suficiente efectuar las operaciones:

1) $x_1 x_2 = u_1$, 4) $u_3 - x_3 = u_4$,

2) $x_3 x_4 = u_2$, 5) $u_1 + u_2 = u_5$,

3) $x_1 + x_2 = u_3$, 6) $u_5 : u_4 = u$.

Supongamos que la proposición es cierta para todas las expresiones cuyo cálculo exige no más de k "operaciones". El término "operacion" significa multiplicación de dos números complejos. Demostremos que entonces la proposición debe ser cierta también para expresiones que exigen (k+1) "operaciones"

Efectivamente, la última "operación" (k+1) la ejecutamos sobre los números u_i y u_j que a su vez fueron calculadas mediante no más de k "operaciones".

Como resultado de sustituir los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por sus conjugados, obtenemos que los números u_i y u_j se sustituyen por sus conjugados $\overline{u}_i$ y $\overline{u}_j$ y entonces también el resultado de la "operación" (k+1) sobre ellos, o sea u, también cambia a su conjugado $\overline{u}$.

Problema 42. Demostrar que para todo número natural n:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

Problema 43. Demostrar que para todo natural $n>1$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Solución. Denotaremos el primer miembro de la desigualdad anterior por S_n.

(1) $S_2 = \frac{7}{12} = \frac{14}{24}$, por lo tanto para n=2 la desigualdad es cierta.

(2) Supongamos que $S_k > \frac{13}{24}$ para cierta k. Demostremos que también $S_{k+1} > \frac{13}{24}$. Tenemos

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k},$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}.$$

Comparando S_k y S_{k+1} tenemos

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1},$$

es decir

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$$

Para cualquier número natural k el segundo miembro de la anterior igualdad es positivo. Por tanto $S_{k+1} > S_k$. Pero $S_k > \frac{13}{24}$, por hipótesis, lo que significa que también $S_{k+1} > \frac{13}{24}$.

Problema 44. Hallar el error en la "demostración" dada a la siguiente proposición.

Para todo número natural n se cumple la desigualdad

$$2^n > 2n + 1$$

Demostración. Supongamos que la desigualdad es cierta para n=k, donde k es cierto número natural, o sea

$$2^k > 2k + 1 \qquad (1)$$

Demostremos que entonces también la desigualdad se cumple para n=k+1, es decir

$$2^{k+1} > 2(k+1) + 1 \qquad (2)$$

En efecto, 2k no es menor que 2 para cualquier natural k. Sumemos al primer miembro de la desigualdad (1) 2^k y al segundo miembro 2. Obtenemos que la desigualdad (2) se cumple:

$$2^k + 2^k > 2k + 1 + 2 ,$$

esto es

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1 .$$

La proposición queda "demostrada".

Problema 45. ¿Para qué números naturales n se cumple la desigualdad

$$2^n > 2n + 1 ?$$

Problema 46. ¿Para qué números naturales n se cumple la desigualdad

$$2^n > n^2 ?$$

Solución.

Para n = 1 la desigualdad se cumple, puesto que $2^1 > 1^2$.
Para n = 2 la desigualdad no se cumple puesto que $2^2 = 2^2$.
Para n = 3 la desigualdad no se cumple puesto que $2^3 < 3^2$.
Para n = 4 la desigualdad no se cumple puesto que $2^4 = 4^2$.
Para n = 5 la desigualdad se cumple puesto que $2^5 > 5^2$.
Para n = 6 la desigualdad se cumple puesto que $2^6 > 6^2$.

Por lo visto la desigualdad se cumple para n = 1 y para cualquier n > 4. Demostremos esto último.

(1) Para n=5 la desigualdad es cierta

(2) Supongamos que

$$2^k > k^2 \qquad (1)$$

donde k es cierto número natural, mayor que 4.

Demostremos que

$$2^{k+1} > (k+1)^2 \qquad (2)$$

Sabemos que $2^k > 2k+1$ para $k>4$ (problema 45). Por lo tanto si sumamos al primer miembro de la desigualdad (1) 2^k y al segundo miembro de la misma $(2k+1)$, entonces obtenemos que es cierta la desigualdad (2).

<u>Respuesta:</u> $2^n > n^2$, cuando $n=1$ y cuando $n>4$.

<u>Problema 47.</u> Demostrar que

$$(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha,$$

donde $\alpha>-1$, $\alpha\neq 0$ y n es un número natural mayor que 1.

<u>Solución.</u> (1) Para $n=2$ la desigualdad se cumple, ya que $\alpha^2 > 0$.

(2) Supongamos que la desigualdad es cierta para $n=k$, donde k es algún número natural, o sea que

$$(1 + \alpha)^k > 1 + k\alpha \qquad (1)$$

Demostremos que entonces también es cierta la desigualdad para $n=k+1$, es decir que

$$(1 + \alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha \qquad (2)$$

En efecto, por hipótesis $1 + \alpha > 0$, por lo cual se cumple la desigualdad

$$(1 + \alpha)^{k+1} > (1 + k\alpha)(1 + \alpha) \qquad (3)$$

obtenida multiplicando la desigualdad (1) por $(1+\alpha)$. Reescribamos (3) en la forma

$$(1 + \alpha)^{k+1} > 1 + (k + 1)\alpha + k\alpha^2.$$

Despreciando $k\alpha^2$ en el segundo miembro de la última desigualdad obtenemos que la desigualdad (2) es cierta.

Problema 48. Demostrar que para todo número natural $n>1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Problema 49. Demostrar que para todo número natural $n>1$

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Problema 50. Demostrar que

$$2^{n-1}\ (a^n + b^n) > (a+b)^n \qquad (1)$$

donde $a+b>0$, $a \neq b$ y n algún número natural mayor que 1.

Solución. (1) para $n=2$ la desigualdad (1) toma la forma:

$$2(a^2 + b^2) > (a+b)^2 \qquad (2)$$

Puesto que $a \neq b$, entonces se cumple

$$(a-b)^2 > 0 \qquad (3)$$

Sumando a los miembros de la desigualdad (3) $(a+b)^2$, obtenemos (2).

Con esto queda demostrado que para $n=2$ la desigualdad (1) se cumple.

(2) Supongamos que la desigualdad (1) se cumple para $n=k$, donde k es algún número natural, es decir

$$2^{k-1}\ (a^k + b^k) > (a+b)^k \qquad (4)$$

Demostremos que entonces (1) también es cierta $n=k+1$, o sea

$$2^k\ (a^{k+1} + b^{k+1}) > (a+b)^{k+1} \qquad (5)$$

Multipliquemos los dos miembros de (4) por (a+b). Ya que por hipótesis a+b>0, entonces obtenemos la siguiente desigualdad

$$2^{k-1} (a^k + b^k)(a+b) \quad (a+b)^{k+1} \tag{6}$$

Para demostrar la veracidad de la desigualdad (5), es suficiente demostrar que

$$2^k (a^{k+1} + b^{k+1}) > 2^{k-1} (a^k + b^k) (a+b) \tag{7}$$

o lo que es lo mismo

$$a^{k+1} + b^{k+1} > a^k b + a b^k \tag{8}$$

La desigualdad la podemos expresar como

$$(a^k - b^k)(a-b) > 0 \tag{9}$$

Si $a>b$, entonces $a^k > b^k$ y en el primer miembro de la desigualdad (9) tenemos el producto de dos números positivos. Si $a<b$, entonces $a^k < b^k$ y en el primer miembro de la desigualdad (9) tenemos el producto de dos números negativos. En los dos casos la desigualdad (9) se cumple.

Con esto quedó demostrado que si (1) es verdadera para n=k entonces también lo es para n=k+1.

<u>Problema 51.</u> Demostrar que para todo $x>0$ y todo número natural n se cumple la desigualdad

$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \ldots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} > n + 1 \tag{1}$$

<u>Solución.</u> 1a) Para n=1 la desigualdad (1) toma la forma:

$$x + \frac{1}{x} > 2. \tag{2}$$

La desigualdad (2) es consecuencia de la desigualdad evidente:

$$(x - 1)^2 > 0.$$

1b) Para n=2 la desigualdad (1) toma la forma:

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} > 3 \qquad (3)$$

La desigualdad (2) es verdadera para todo x>0, por lo tanto sigue siendo válida si sustituimos x por x^2, o sea

$$x^2 + \frac{1}{x^2} > 2.$$

Sumándole 1 a cada miembro de la última desigualdad, obtenemos (3).

2) Supongamos que la desigualdad (1) se cumple para n=k, donde k es algún número natural, es decir

$$x^k + x^{k-2} + x^{k-4} + \ldots + \frac{1}{x^{k-4}} + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} > k+1 \qquad (4)$$

Demostremos que la desigualdad (1) se cumple también para n=k+2, esto es

$$x^{k+2} + x^k + x^{k-2} + \ldots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} > k + 3 \qquad (5)$$

Sustituyendo en (2) x por x^{k+2}, obtenemos:

$$x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} > 2 \qquad (6)$$

Sumando miembro a miembro las desigualdades (4) y (6) obtenemos la desigualdad (5).

Hagamos ahora un resumen:

En 1a) y 1b) demostramos que la desigualdad (1) se cumple para n=1 y n=2.

En 2) demostramos que si la desigualdad (1) se cumple para n=k entonces también se cumple para n=k+2. En otras palabras 2) nos da el derecho al paso de n=k a n=k+2.

Los resultados de 1a) y 2) nos permite afirmar que la desigualdad (1) de cumple para todo <u>impar</u> n. De igual manera los resultados de 1b) y 2) nos dan derecho a poder afirmar que la desigualdad (1) se cumple para todo número par n. En conjunto podemos afirmar que la desigualdad (1) se cumple para todo número natural n.

<u>Problema 52</u>. Demostrar el teorema:

La media geométrica de varios números positivos no es mayor que su promedio aritmético, o sea si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos, entonces

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \quad (*) \qquad (1)$$

Solución 1) Para n=2 la desigualdad (1) toma la forma:

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2} \quad . \qquad (2)$$

Para cualesquiera a_1 y a_2 positivos se cumple la desigualdad:

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$$

Es fácil obtener la desigualdad (2) a partir de esta desigualdad.

La desigualdad (2) tiene una interpretación geométrica sencilla. Sobre una recta AB medimos sucesivamente

a_1 y a_2. Tomando la suma de estas magnitudes como diámetro trazamos una circunferencia. Entonces $\frac{a_1+a_2}{2}$ es el radio de dicha circunferencia y $\sqrt{a_1a_2}$ es la mitad de la cuerda, perpendicular al diámetro en el punto común a a_1 y a a_2.

2) Supongamos que la desigualdad (1) se cumple para n=k.

Demostremos que entonces también se cumple para n=2k. Efectivamente.

$$\sqrt[2k]{a_1a_2\ldots a_{2k}} = \sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}\ \sqrt[k]{a_{k+1}\ldots a_{2k}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1}\ldots a_{2k}}}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\frac{a_1+a_2+\ldots a_k}{k} + \frac{a_{k+1}\ldots a_{2k}}{k}}{2} =$$

$$= \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k+\ldots+a_{2k}}{2k}.$$

La desigualdad (1) ha sido comprobada para n=2 y por tanto podemos afirmar que se cumple para n=4,8,16, etc. en general para $n=2^s$, donde s es un número natural.

3) Para demostrar que la desigualdad (1) es cierta para todo natural n, demostremos que de la veracidad de la desigualdad para n=k, se sigue que también se cumple para n=k-1.

Así que suponiendo que los números $a_1,\ldots,a_{k-1}$ son positivos y λ cierto número positivo, por ahora no determinado, tendremos:

$$\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_{k-1}\lambda} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+\lambda}{k}$$

Escojamos λ de suerte que

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+\lambda}{k} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1},$$

o sea, hagamos

$$\lambda = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}.$$

Tenemos que

$$\sqrt[k]{\frac{a_1a_2\ldots a_{k-1}(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})}{k-1}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1},$$

es decir

$$\sqrt[k-1]{a_1a_2\ldots a_{k-1}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$$

Sea ahora m un número natural arbitrario. Si $m=2^s$, entonces por 2) la desigualdad se cumple. Si $m\neq 2^s$, entonces hallamos un s, tal que m sea menor que 2^s y entonces en base a 2) y 3) podemos afirmar que la desigualdad es cierta para n=m.

III. DEMOSTRACION DE ALGUNOS TEOREMAS DE ALGEBRA ELEMENTAL POR EL METODO DE INDUCCION MATEMATICA.

Teorema 1. El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de todos sus miembros más todos los dobl productos de los mismos, esto es

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)^2 = a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2 + 2(a_1a_2+a_1a_3+\dots+a_{n-1}\ a_n) \quad (1)$$

Para n=2 la fórmula (1) puede ser demostrada directamente multiplicando.

Supongamos que la fórmula (1) es cierta para n=k-1, o sea que

$$(a_1+a_2+\dots+a_{k-1})^2 = a_1^2+a_2^2+\dots+a_{k-1}+2S \ .$$

donde S es la suma de todos los posibles productos por pares de los elementos $a_1, a_2, \dots, a_{k-2}, a_{k-1}$. Demostremos que

$$(a_1+a_2+\dots+a_{k-1}+a_k)^2 =$$

$$= a_1^2+a_2^2+\dots+a_{k-1}^2+a_k^2+2S_1 ,$$

donde S_1 es la suma de todos los posibles productos por pares de los elementos $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$, o sea que

$$S_1 = S + (a_1+a_2+\dots+a_{k-1})a_k \ .$$

En efecto

$$(a_1+\dots+a_{k-1}+a_k)^2 = \left[(a_1+\dots+a_{k-1})+a_k\right]^2 =$$

$$= (a_1+\dots+a_{k-1})^2 + 2(a_1+\dots+a_{k-1})a_k+a_k^2 =$$

$$= a_1^2+\dots+a_{k-1}^2 + 2S + 2(a_1+\dots+a_{k-1})a_k + a_k^2 =$$

$$= a_1^2+a_2^2+\dots+a_k^2+2S_1 \ .$$

<u>Teorema 2. El enésimo término de una progresión aritmética puede calcularse por la fórmula:</u>

$$a_n = a_1 + d(n-1) \qquad (1)$$

donde a_1 es el primer término y d la diferencia de la progresión.

Para n=1 la fórmula (1) es cierta.

Supongamos que la fórmula (1) es cierta para n=k, es decir

$$a_k = a_1 + d(k-1) \text{ .}$$

Entonces

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k-1) + d = a_1 + dk \text{ ,}$$

o sea, que la fórmula (1) resulta también cierta para n=k+1.

<u>Teorema 3. El enésimo término de una progresión geométrica puede calcularse por la fórmula:</u>

$$a_n = a_1 q^{n-1} \qquad (1)$$

<u>donde a_1 es el primer término y q la razón de la progresión.</u>

Para n=1 la fórmula (1) es correcta.

Supongamos que

$$a_k = a_1 q^{k-1}$$

Entonces

$$a_{k+1} = a_k q = a_1 q^k \text{ .}$$

1) Supongamos que entre las $(k+1)!$ permutaciones se tienen dos iguales. Denotémoslas por p_1 y p_2. Supongamos que en la permutación p_1 el elemento a_{k+1} ocupa el s-ésimo lugar contando de izquierda a derecha. Entonces también en p_2 el elemento a_{k+1} ocupa el s=ésimo lugar.

Separando de p_1 y p_2 el elemento a_{k+1}, obtenemos dos permutaciones iguales de k elementos: $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$.

Resulta que para obtener p_1 y p_2 en una misma permutación de elementos $a_1, a_2, \ldots, a_k$, hubo necesidad de que el elemento a_{k+1} ocupara dos veces el mismo lugar. Esto contradice la regla, mediante la cual se construyen las permutaciones.

2) Supongamos que alguna permutación p de $(k+1)$ elementos no la obtuvimos. Supongamos que en p el elemento ocupa el s-ésimo lugar de izquierda a derecha. Separemos de p el elemento a_{k+1}. Obtenemos la permutación $\bar{p}$ de los primeros k elementos. Significa que para obtener p era suficiente tomar la permutación $\bar{p}$ y poner el elemento a_{k+1} de tal manera que dicho elemento ocupara el s-ésimo lugar.

Forzosamente tomamos la permutación $\bar{p}$, puesto que estamos considerando todas las posibles permutaciones de los k primeros elementos.

Hemos podido colocar el elemento a_{k+1} en el lugar señalado, ya que dicho elemento lo hemos colocado en el primero, segundo,...,en el $(k+1)$-ésimo lugar.

Así pues, todas las permutaciones formadas son diferentes y cualquier permutación de $(k+1)$ elementos la hemos obtenido.

De lo dicho se concluye que

$$P_{k+1} = (k+1)!$$

Teorema 5. El número de ordenaciones de m elementos tomados de n en n(*) puede ser calculado por la fórmula:

$$A_m^n = m(m-1)\dots(m-n+1) \qquad (1)$$

Ante todo señalemos que $A_m^1 = m$ y de este modo la fórmula (1) es cierta para $n=1$. Supongamos que

$$A_m^k = m(m-1)\dots(m-k+1).$$

donde $k<m$. Demostremos que

$$A_m^{k+1} = m(m-1)\dots(-k).$$

Para obtener todas las ordenaciones de m elementos tomados de (k+1) en (k+1) es suficiente tomar todas las ordenaciones de m elementos tomados de k en k y a cada una de ellas adjuntarle al final cada uno de los (m-k) elementos. No es difícil darse cuenta que las ordenaciones que hemos formado con los m elementos tomados de (k+1) en

---

(*) Se llama combinación de m elementos tomados de n en n, a cualquier subconjunto (parte), que contiene n elementos de un conjunto dado formado por m elementos.

Cualquier conjunto (de m elementos) ordenado se llama permutación formada de sus (m) elementos. El alfabeto castellano es un ejemplo de conjunto ordenado donde la letra b sigue después de la a, la c después de la b, etc., la letra a (primera) no sigue de ninguna otra y después de la z (última no sigue ninguna más. El conjunto formado por 1,2,...,m en el cual el elemento siguiente se considera el número en 1 mayor al anterior puede considerarse como el representante de diferentes conjuntos ordenados concretos que contienen m elementos (ya que puede establecerse una correspondencia biunívoca entre dichos conjuntos y 1,2,...,m).

Se llama ordenación de m elementos tomados de n en n a cualquier subconjunto ordenado de n elementos de un conjunto dado formado por m elementos.

(k+1) son todas diferentes y además cualquier ordenación de m elementos tomados de (k+1) está contenida entre las obtenidas.

Resulta pues que

Teorema 6. El número de combinaciones de m elementos tomados de n en n puede ser calculado mediante la fórmula

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} \qquad (1)$$

Primeramente señalemos que $C_m^1=m$, por tanto para n=1 la fórmula (1) es cierta.

Supongamos que

$$C_m^k = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}$$

Demostremos que

$$C_m^{k+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)(m-k)}{1.2\ldots k(k+1)}$$

Para obtener todas las combinaciones de m elementos tomados de (k+1) en (k+1), escribamos todas las combinaciones de m elementos tomados de k en k y a cada una de ellas en calidad del elemento (k+1) en (k+1), pero cada una de ellas se obtiene (k+1) veces.

Efectivamente la combinación $a_1,a_2,\ldots,a_{k+1}$ se obtiene cuando a la combinación $a_2,a_3,\ldots,a_{k+1}$ se le adjunta el elemento a_1, cuando a la combinación $a_1,a_3,\ldots,a_k,$ a_{k+1} se le adjunta el elemento a_2, etc. cuando, finalmente a la combinación $a_1,a_2,\ldots,a_k$ se le adjunta el elemento a_{k+1}.

$$C_m^{k+1} = C_m^k \frac{m-k}{k+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k)}{1.2\ldots k(k+1)}$$

Teorema 7. Cualquiera que sean los números a y b y para todo número natural n, se cumple la fórmula

$$(a+b)^n=a^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^sa^{n-s}b+\ldots+C_n^{n-1}\;ab^{n-1}+b^n \qquad (1)$$

(Teorema del binomio de Newton)*

---

*) Una forma general de poder deducir la suma de potencias de los n primeros naturales es posible aplicando el teorema 7:

Nos proponemos calcular la suma

$$S_k=1^k+2^k+\ldots+n^k$$

Por el teorema 7, tenemos que

$$(m+1)^{k+1}-m^{k+1}=C^1_{k+1}m^k+C^2_{k+1}m^{k-1}+\ldots+1$$

Haciendo sucesivamente $m=0,1,\ldots n$, obtenemos

$$\begin{aligned}
1^{k+1} &= 1,\\
2^{k+1}-1^{k+1} &= C_{k+1}1^k+C^2_{k+1}\,1^{k-1}+\ldots+1,\\
3^{k+1}-2^{k+1} &= C^1_{k+1}2^k+C^2_{k+1}\,2^{k-1}+\ldots+1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n+1)^{k+1}-n^{k+1} &= C^1_{k+1}n^k+C^2_{n+1}n^{k-1}+\ldots+1,
\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades obtenemos

$$(n+1)^{k+1}=C^1_{k+1}S_k+C^2_{k+1}S_{k-1}+\ldots+C^1_{k+1}S_1+n+1$$

Esta fórmula nos permite calcular la suma S_k si son conocidas las sumas anteriores $S_{k-1},\ldots,S_2,S_1$

Haciendo k=1, en la última fórmula, obtenemos:

$$(n+1)^2=2\,S_1+n+1$$

Despejando S_1 y recordando que es la suma de los primeros n naturales obtenemos

$$S_1=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(véase el problema 5)}\,.$$

Haciendo k=2:

$$(n+1)^3=3S_2+3S_1+n+1=3S_2+3\frac{n(n+1)}{2}+n+1$$

Para $n=1$ tenemos que $a+b=a+b$ y consecuentemente para este caso la fórmula (1) se cumple.

Supongamos que

$$(a+b)^k=a^k + C_k^1 a^{k-2}b^2 +\ldots+b^k.$$

Entonces

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k\ (a+b) = (a^k+C_k^1 a^{k-1}b+\ldots+b^k)\ (a+b) =$$

$$= a^{k+1}+(1+C_k^1)a^k b + (C_k^1+C_k^2)a^{k-1}b^2 +\ldots+(C_k^s+C_k^{s+1})a^{k-s}b^{s+1}+\ldots+b^{k+1}$$

Tomando en cuenta que $C_k^s+C_k^{s+1} = C_{k+1}^{s+1}$ (**), obtenemos

$$(a+b)^{k+1}=a^{k+1}+C_{k+1}^1 a^k b+C_{k+1}^2 a^{k-1}b^2 +\ldots+C_{k+1}^{s+1}a^{k-s}b^{s+1}+\ldots+b^{k+1}.$$

---

* de donde

$$S_2=1^2+2^2+\ldots+n^2= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{(véase el probl. 6)}$$

Haciendo $k=3$, obtenemos

$$(n+1)^4=4S_3+6S_2+4S_1+n+1$$

de donde

$$S_3=1^3+2^3+\ldots+n^3= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad \text{(véase el probl. 9) y}$$

así sucesivamente haciendo $k=4,5,\ldots$ podemos obtener $S_4, S_5, \ldots$

N. del T.

**) A partir de la fórmula del teorema 6, es fácil demostrar esta igualdad. N. del T.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS

3. Hipótesis

$$u_n = 3n-2$$

1) Para n=1 la hipótesis es cierta.

2) Sea

$$u_k = 3k-2 \; .$$

Entonces

$$u_{k+1}=u_k+3=3k-2+3=3(k+1)-2 \; .$$

4. Hipótesis

$$S_k=2^k-1.$$

1) Para n=1 la hipótesis es cierta.

2) Sea

$$S_k=2^k-1$$

Entonces

$$S_{k+1}=S_k+2^k=2^{k+1}-1.$$

6. 1) Para n=1 la proposición es verdadera.

2) Supóngase que

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Entonces

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{6} .$$

8. 1) Para n=1 la proposición es verdadera

2) Suponiendo que

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} .$$

Entonces

$$1^2+2^3+3^2+\ldots+(2k-1)^2+(2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 =$$

$$= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} .$$

9. 1) Para n=1 la proposición es verdadera.

2) Sea

$$1^3+2^3 +\ldots+ k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 .$$

Entonces

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 .$$

10. 1) Para n=1 la proposición es cierta.

2) Supongamos que

$$1 + x + x^2 +\ldots+x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1} .$$

Entonces

$$1 + x + x^2 +\ldots+x^k +x^{k+1} = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}+x^{k+1} = \frac{x^{k+2}-1}{x-1} .$$

11. 1) Para n=1 la proposición es cierta.

2) Supóngase que:

$$1.2+2.3+\ldots+k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} .$$

Entonces

$$1.2+2.3+\ldots+k(k+1)+(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) =$$

$$= (k+1)\ (k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} .$$

12. 1) Para n=1 la proposición es verdadera.

2) Si

$$1.2.3+2.3.4+\ldots+k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} .$$

Entonces

$$1.2.3+2.3.4+\ldots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} +$$

$$+ (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} .$$

13. 1) Para n=1 la proposición es cierta.

2) Si

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} +\ldots+ \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1} .$$

Entonces

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} +\ldots+ \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{2k+1} +$$

$$+ \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} .$$

14. 1) Para n=1 la proposición es verdadera.

2) Si

$$\frac{1^2}{1.3}+\frac{2^2}{3.5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{1(2k+1)}.$$

Entonces

$$\frac{1^2}{1.3}+\frac{2^2}{3.5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=(k+1)\,\frac{k(2k+3)+2(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

15. 1) Para n=1 la proposición es cierta.

2) Si

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1}.$$

Entonces

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=$$

$$=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}.$$

16. 1) Para n=1 la proposición es verdadera.

2) Si

$$\frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{k}{4k+1}.$$

Entonces

$$\frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=$$

$$=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}.$$

17. 1) Para n=1 la proposición es cierta.

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{1}{(a+k-1)(a+k)} = \frac{k}{a(a+k)} \quad .$$

Entonces

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{1}{(a+k-1)(a+k)} + \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} =$$

$$= \frac{k}{a(a+k)} + \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} = \frac{k+1}{a(a+k+1)} \quad .$$

19. 1) Para n=1 y n=2 la proposición es verdadera.

2) Si

$$u_{k-2} = \frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta} \; , \; u_{k-1} = \frac{\alpha^{k}-\beta^{k}}{\alpha-\beta} \; :$$

Entonces

$$u_k = (\alpha+\beta)\,\frac{\alpha^{k}-\beta^{k}}{\alpha-\beta} - \alpha\beta\,\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta} \quad .$$

21. 1) Para n=0 tenemos

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{1-x^2} \quad .$$

Por lo tanto, la proposición es verdadera.

2) Si

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \ldots + \frac{2^k}{1+x^{2k}} = \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} + \frac{1}{x-1}$$

Entonces

$$\frac{!}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \dots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}$$

$$+ \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}$$

23. Para n=1 tenemos

$$1 - \frac{x}{1!} = -\frac{x-1}{1} \quad .$$

Para n=2:

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} = \frac{x-1}{1} + \frac{x(x-1)}{2} = \frac{(x-1)(x-2)}{2!} \quad .$$

Para n=3:

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} =$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = - \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!} \quad .$$

Esto nos lleva a la hipótesis de que:

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} =$$

$$= (-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!} \quad .$$

1) Para n=1 la hipótesis es cierta

2) Si

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^k \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-k)}{k!} \quad .$$

Entonces

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \ldots + (-1)^k \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{x(x-1)\ldots(x-k)}{(k+1)!} =$$

$$= (-1)^k \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k)}{k!} + (-1)^{k+1} \frac{x(x-1)\ldots(x-k)}{(k+1)!} =$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k)}{k!} \left[\frac{x}{k+1} - 1\right] =$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k)(x-k-1)}{(k+1)!} .$$

26. 1) Para n=0 la proposición es cierta.

2) Supongámosla cierta para n=k, esto es

$$A_k = 11^{k+2} + 12^{2k+1}$$

es divisible entre 133. Entonces:

$$A_{k+1} = 11^{k+3} + 12^{2(k+1)+1} = 11^{k+3} + 12^{2k+3} =$$

$$= 11.11^{k+2} + 144.12^{2k+1} =$$

$$= 11.11^{k+2} + 133.12^{2k+1} + 11.12^{2k+1} =$$

$$= 11.(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133.12^{2k+1} =$$

$$= 11A_k + 133.12^{2k+1} .$$

Hemos podido representar a A_{k+1} como la suma de dos números, cada uno de los cuales es divisible entre 133, por lo cual A_{k+1} es divisible entre 133.

28. Para n=1 la proposición es verdadera, puesto que una recta divide el plano en 2 partes.

Supongamos que k diferentes rectas que pasan por un mismo punto dividen al plano en 2k partes. Entonces la (k+1)-ésima recta, trazada por dicho punto, divide en dos a dos de estas partes y por tanto el plano queda dividido en 2(k+1) partes.

29. 1) La recta AB divide al plano P en dos semiplanos P_1 y P_2. Dibujemos a P_1 de blanco y a P_2 de negro y con ello satisfacemos las condiciones del problema. Es por esto que la proposición es cierta para n=1.

2) Supongamos cierta la proposición para n=k y el plano P queda pintado como piden las condiciones del problema. La (k+1)-ésima recta CD divide el plano P en dos semiplanos Q_1 y Q_2. Puesto que en Q_1 conservamos invariante la coloración, en todo Q_2 sustituimos lo pintado con blanco por color negro y viceversa.

Supongamos ahora que 0_1 y 0_2 son regiones vecinas cualesquiera obtenidas luego de trazar CD. Es posible uno de los siguientes casos:

a) 0_1 y 0_2 están en lados diferentes de CD.

b) 0_1 y 0_2 se encuentran de un solo lado de CD.

En el primer caso, antes de trazar CD y luego de haber trazado las k primeras rectas, las regiones 0_1 y 0_2 formaban una misma región y estaban pintadas de un mismo color. Ahora bien, aquella región que pertenece a Q_1 conserva su color y aquella que esta en Q_2 intercambia sus colores. Esto significa que en este caso 0_1 y 0_2 estan pintados con colores diferentes.

En el segundo caso, luego de haber trazado las k primeras rectas y antes de trazar CD, las regiones 0_1 y 0_2 se encontraban en dos regiones vecinas diferentes con frontera en una de las primeras k rectas. Esto significa que en esas condiciones las regiones 0_1 y 0_2 estaban pintadas con colores diferentes.

34. 1) Para n=1 la proposición es cierta, ya que

$$\frac{\sin\frac{3x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2} + \left(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \cos x.$$

2) Si

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos kx = \frac{\sin\frac{2k+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Entonces

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos kx + \cos(k+1)x =$$

$$= \frac{\sin\frac{2k+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} + \cos(k+1)x = \frac{\sin\frac{2k+1}{2}x + 2\sin\frac{x}{2}\cos(k+1)x}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{2k+1}{2}x + \left(\sin\frac{2k+3}{2}x - \sin\frac{2k+1}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{2k+3}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

35. 1) Para n=1 la proposición es cierta ya que

$$\frac{2\sin x - \sin 2x}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\sin x\,(1-\cos x)}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \sin x$$

2) Suponiendo que:

$$\sin x + 2\sin 2x + \ldots + k\sin kx =$$

$$= \frac{(k+1)\sin kx - k\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

Entonces

$$\sin x + 2\sin 2x + \ldots + k\sin kx + (k+1)\sin(k+1)x =$$

$$= \frac{(k+1)\sin kx - k\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} + (k+1)\sin(k+1)x =$$

$$= \frac{(k+1)\sin kx - k\sin(k+1)x + 2(k+1)\sin(k+1)x\,(1-\cos x)}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{(k+2)\sin(k+1)x + (k+1)\sin kx}{4\sin^2\frac{x}{2}} -$$

$$- \frac{2(k+1)\cos x\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{(k+2)\sin(k+1)x + (k+1)\sin kx}{4\sin^2\frac{x}{2}} -$$

$$- \frac{(k+1)\left[\sin(k+2)x + \sin kx\right]}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{(k+2)\sin(k+1)x - (k+1)\sin(k+2)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

36. 1) Para $n=1$ la proposición es cierta, ya que

$$\frac{2\cos x - \cos 2x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\cos x - 2\cos^2 x}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos x(1-\cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \cos x.$$

2) Si suponemos cierto que

$$\cos x + 2\cos 2x + \ldots + k\cos kx = \frac{(k+1)\cos kx - k\cos(k+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

Entonces

$$\cos x + 2\cos 2x + \ldots + k\cos kx + (k+1)\cos(k+1)x =$$

$$= \frac{(k+1)\cos kx - k\cos(k+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}} + (k+1)\cos(k+1)x =$$

$$= \frac{(k+1)\cos kx - k\cos(k+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}} +$$

$$+ \frac{2(k+1)\cos(k+1)x\,(1-\cos x)}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{(k+2)\cos(k+1)x + (k+1)\cos kx}{4\sin^2\frac{x}{2}} -$$

$$- \frac{2(k+1)\cos x\cos(k+1)x+1}{4\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{(k+2)\cos(k+1)x + (k+1)\cos kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$- \frac{(k+1)\left[\cos(k+2)x + \cos kx\right] + 1}{4\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{(k+2)\cos(k+1)x - (k+1)\cos(k+2)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

37. 1) Para n=1 la proposición es verdadera, puesto que

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

2) Si suponemos que:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^k}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k} - \operatorname{ctg} x.$$

Entonces

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{2^k} \operatorname{ctg} \frac{1}{2^k} - \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2^{k+1}} - 1}{\operatorname{ctg} \frac{x}{2^{k+1}}} +$$

$$+ \frac{1}{2^{k+1} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{k+1}}} - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{k+1}} - \operatorname{ctg} x .$$

38. 1) Tenemos que:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1) = \frac{2-1}{1+2} = \frac{1}{3} .$$

Por esto

$$\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{aretg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \operatorname{arecctg} 3.$$

Esto significa que para n=1 la proposición es cierta.

2) Demostremos primeramente que:

$$\operatorname{arctan}(2k+3) = \operatorname{arctan} \frac{k+2}{k+1} - \operatorname{arctan} 1 \qquad (1)$$

En efecto

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{k+2}{k+1} - \operatorname{arctg} 1\right) = \frac{\frac{k+2}{k+1} - 1}{1 + \frac{k+2}{k+1}} = \frac{1}{2k+3} .$$

Esto quiere decir que:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2k+3} = \operatorname{arcctg}(2k+3) = \operatorname{arctg}\frac{k+2}{k+1} - \operatorname{arctg} 1.$$

Supongamos que la proposición es verdadera para n=k, esto es:

$$\operatorname{arctan} 3 + \operatorname{arctan} 5 + \ldots + \operatorname{arctan}(2k+1) =$$

$$= \arctan 2 + \arctan \frac{3}{2} + \ldots + \arctan \frac{k+1}{k} - k \arctan 1 \qquad (2)$$

Demostraremos que entonces también es cierta para n=k+1, o sea que

$$\arctan 3 + \arctan 5 + \ldots + \arctan (2k+3) =$$

$$= \arctan 2 + \ldots + \arctan \frac{k+2}{k+1} - (k+1) \arctan 1 \qquad (3)$$

y esto efectivamente se cumple, pues sumando miembro a miembro las igualdades (1) y (2) obtenemos (3).

40. 1) Para n=1 la proposición es verdadera, ya que

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right).$$

2) Si suponemos que se cumple

$$(\sqrt{3} - i)^k = 2^k \left(\cos \frac{k\pi}{6} - i \sin \frac{k\pi}{6}\right) .$$

Entonces

$$(\sqrt{3} - i)^{k+1} = 2^k \left(\cos \frac{k\pi}{6} - i \sin \frac{k\pi}{6}\right) . 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2^{k+1} \left[\cos \frac{(k+1)\pi}{6} - i \sin \frac{(k+1)\pi}{6}\right] .$$

42. 1) Para n=1 la proposición es cierta,

2) Si suponemos que:

$$(\cos x + i \sin x)^k = \cos kx + i \sin kx.$$

Entonces

$$(\cos x + i \sin x)^{k+1} = (\cos kx + i \sin kx) (\cos x + i \sin x) =$$

$$= \cos (k+1)x + i \sin (k+1)x.$$

44. Es incorrecta la última frase: "La proposición ha sido demostrada". En realidad fue demostrado que

$$2^n > 2n + 1$$

es cierta para n=k+1, si dicha desigualdad se cumple para n=k, donde k es un número natural cualquiera.

De esto aun no se sigue que esta desigualdad se cumpla por lo menos para algún valor de n y menos para todos los valores naturales de n.

En resumen el error consiste en que fue demostrado sólo el teorema 2, pero el teorema 1 no fue considerado y la base para la inducción no fue creada.

45. Es fácil darse cuenta que 3 es el menor número natural n, para el cual la desigualdad $2^n > 2n+1$ es cierta.

Considerando que de la veracidad de la desigualdad, para n=k se sigue lo mismo para n=k+1 (problema 44) afirmamos que la desigualdad es cierta para todo número natural $n \geq 3$.

48. 1) Para n=2 la desigualdad es cierta, puesto que:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} .$$

2) Si suponemos que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k} \qquad (1)$$

Demostremos que

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} . \qquad (2)$$

Para todo $k \geq 0$ tiene lugar la desigualdad

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \tag{3}$$

En efecto, la desigualdad (3) se obtiene de la siguiente:

$$1 + \sqrt{\frac{k}{k+1}} > 1$$

multiplicando ambos miembros por $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$. Sumando miembro a miembro las desigualdades (1) y (3) obtenemos (2).

49. 1) Para $n=2$ la desigualdad se reduce a $\frac{16}{3} < 6$ que es cierta.

2) Si suponemos que

$$\frac{4^k}{k+1} < \frac{(2k)!}{(k!)^2},$$

donde $k \geq 2$. No es difícil comprobar que para $k>0$

$$\frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$$

Por eso

$$\frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2},$$

es decir

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{(2k+2)!}{[(k+1)!]^2}.$$