Miscelánea Matemática **34** (2001) 43–58 SMM

La invención de Fermat de la geometría analítica

Ricardo Quintero Zazueta
Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia
Cinvestav, IPN
quintero@mail.cinvestav.ipn

Resumen

En 1637, poco antes de que se publicara *La Geometría* de Descartes, Fermat envió a sus corresponsales en Paris un manuscrito intitulado *Introducción a los lugares geométricos planos y sólidos,* en el cual explica la relación que existe entre ecuaciones algebraicas indeterminadas en dos variables y lugares geométricos, y aplica dicha relación al estudio de las secciones cónicas. Dicho trabajo, cuya génesis se analiza en el presente artículo, permite con justicia afirmar que Fermat inventó, independientemente de Descartes, la geometría analítica.

1. ¿Geometría Cartesiana o Geometría Fermatiana?

A principios de 1637, Pierre de Fermat envió a sus amigos matemáticos de Paris, copias manuscritas de un trabajo terminado probablemente en 1635, intitulado *Ad locos planos et solidos isagoge* –Introducción a los lugares geométricos planos y sólidos–, donde se muestra que todos los lugares geométricos estudiados en la antigüedad por Apolonio, pueden ser descritos, caracterizados y analizados mediante ecuaciones algebraicas indeterminadas con dos variables. Casi al mismo tiempo, René Descartes revisaba las pruebas de galera de el *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences. Plus la dioptrique, les météores et la géométrie, qui sont des esseis de cete méthode* –Discurso del método parta dirigir adecuadamente la razón y buscar la verdad en las ciencias. Mas la dióptrica los meteóros y la geometría, que son ensayos de éste método–. En *La geometría* uno de los tres apéndices científicos del *Discurso del método,* se utilizan técnicas muy similares a las de Fermat para estudiar problemas geométricos con el auxilio del álgebra, si bien este tratado difiere enormemente de la *Introducción* en propósito, notación y contenido. No deja, sin embargo, de ser una notable coincidencia, que Descartes y Fermat dieran a conocer el mismo año, invenciones totalmente independientes de la geometría analítica.

El que se llame geometría cartesiana y no geometría fermatiana a la geometría analítica, no obedece a razones de prioridad u originalidad, sino a la desigual difusión alcanzada en su época por la *Introducción* y *La Geometría.* Por razones que son un enigma para sus biógrafos, Fermat era reacio a publicar, aún cuando no desdeñaba la fama que merecidamente gozaba entre los matemáticos europeos. Su muerte en 1665, dejó la mayoría de sus trabajos dispersos en cartas, notas y manuscritos breves, muchos de los cuales eran copias únicas. Parte de su trabajo en teoría de números, por ejemplo, fue publicado póstumamente por su hijo Samuel, con el título de *Observaciones sobre Diofanto* en base a las notas escritas en los márgenes de un ejemplar de la edición de Bachet de la *Aritmética*, donde no sólo figura su famosa conjetura, sino también verdaderos teoremas y pruebas que sí encontraron en un margen espacio suficiente para ser bosquejados. Personajes como Mersenne, Hérigone y Clerselier recopilaron y llevaron a la imprenta algunos trabajos de Fermat, e incluso Wallis, quien frustrado por su impotencia para resolver problemas de apariencia simple que Fermat le planteaba en sus cartas, solía referirse a él como “ese maldito francés”, colaboró generosamente en la recopilación de sus resultados. La *Introducción* fué publicada hasta 1697, como parte de una colección intitulada *Opera matematica varia,* cuando el término geometría cartesiana era ya de uso corriente.

En contraste con la *Introducción*, *La Geometría* gozó de una amplia difusión, en gran medida, como resultado del trabajo de un grupo de intelectuales asociados con la universidad de Leiden, encabezado por Frans van Schooten el joven, quien tradujo la obra del francés al latín. La primera edición apareció en 1649 bajo el título de *Geometria à Renato Des Cartes 1637 anno Gallicè edita*, complementada con abundantes comentarios, así como con otros trabajos de matemáticos importantes. Dichos textos fueron engrosando las subsecuentes ediciones de *Geometria,* hasta alcanzar un impresionante volumen de alrededor de 1500 páginas. La edición en dos tomos de 1659-1661, contiene, por ejemplo, una colección de conferencias del propio van Schooten, en las cuales se explica la logística de las cantidades, es decir, el álgebra, de acuerdo con las concepciones y notación cartesianas, conferencias agrupadas bajo el título de *Principia matheseos universalis seu introductio ad geometriae methodum Renati Des Cartes.* También, en dicha edición, se incluyen las *Notae breves* de Florimond de Beaune, *Commentarii* adicionales de van Schooten, los *Commentarii* de Christiaan Huygens –que se centran en la geometría de las seciones cónicas–, y una de las primeras exposiciones didácticas de la geometría analítica, – *Elementa curvarum linearum* de Jan de Witt –, la cual es notable porque en ella aparecen explícitamente los ejes coordenados. Finalmente se incluye el tratado *De Maximis et Minimis* de Jan Hudde y un trabajo de Hendrick van Heuraet sobre rectificación de las curvas. La *Geometría* de van Schooten contribuyó a la consolidación y diseminación de las nuevas ideas de la geometría analítica y también, inintencionadamente, a que la tardía publicación, de la *Introducción* de Fermat despertara escaso interés.

Existe una interesante historia apócrifa sobre la invención de la geometría analítica. Esta relata que Descartes, mientras yacía en su cama antes de levantarse –es cierto que Descartes no solía levantarse temprano–, observaba una araña caminando cerca de uno de los rincones del techo, y entonces la posición de la araña respecto a las líneas del techo le sugirieron la idea de coordenadas, y procedió a desarrollar su sistema fusionando álgebra y geometría. En realidad, fué inmensamente más difícil. La idea de coordenadas es muy antigua, y puede verse por ejemplo, en los mapas del mundo de Ptolomeo en el siglo II de nuestra era. La invención de la geometría analítica está asociada a una reflexión profunda sobre los métodos de análisis y resolución de problemas geométricos usados por los antiguos, y a la maduración de un álgebra simbólica suficientemente robusta como para manejar, por ejemplo, variables y parámetros. Estos procesos, como veremos a continuación, estuvieron profundamente interrelacionados.

2. La restauración Renacentista del Análisis Griego y la génesis del Algebra Simbólica.

Durante el Renacimiento, las denominaciones *regola dálgebra*, *ars rei et census* y *lárte della cosa*, se referían a un sofisticado cuerpo de estrategias y técnicas para la resolución de problemas aritméticos complejos. Típicamente, dichas técnicas indicaban cómo proceder para poner problemas de cierto tipo en ecuación, cómo reducir dichas ecuaciones a formas canónicas previamente estudiadas y, finalmente, cuáles eran los pasos a seguir para obtener efectivamente números que resuelven la ecuación reducida.

Buena parte de los textos que se ocupaban del arte de la cosa, incluían al principio una explicación de las reglas para calcular usando el sistema de numeración posicional indo–arábigo, o se editaban junto con tratados de aritmética según dicho sistema, que se necesitaban como prerequisito. La parte central de dichos tratados, tenía la forma de una colección de problemas representativos, cuyas soluciones específicas servían como modelo del procedimiento general para resolver otros problemas del mismo tipo. Esta forma de exposición persistío durante mucho tiempo, desde el *Kitâb al–jabr wál–mukabâla* de Muhamad ibn Musa Al–Khwârizmî (traducida al latín en el siglo XII) —del cual deriva el nombre de álgebra—, hasta tratados tan avanzados como el *Ars Magna* de Cardano (1545) o *LÁlgebra* de Bombelli (1572), no obstante la gran variedad de problemas tratados en dichos textos, y la diversidad de simbolismos utilizados para abreviar la descripción de los procedimientos y los cálculos.

Los historiadores de la matemática, identifican en la evolución del simbolismo algebraico, tres estadios distintos:

- Algebra Retórica, en la cual tanto el planteamiento de los problemas como los pasos del procedimiento para resolverlos, se expresan completamente en palabras.
- Algebra Sincopada, en la cual algunas cantidades y operaciones son abreviadas mediante símbolos especiales.
- Algebra Simbólica, en la cual se tiene un sistema autónomo de notación, que permite expresar simbólicamente tanto las ecuaciones que resultan de un problema, como las transformaciones que se llevan a cabo para resolverlas.

En la actualidad, damos por sentada a tal grado la manipulación simbólica, que resulta muy difícil hacerce una idea de lo que significaba en la práctica resolver problemas con el álgebra retórica o sincopada.Cuando hacemos hoy en día afirmaciones como: ‘Tartaglia descubrió la fórmula para resolver la ecuación cúbica’, sin duda alguna abusamos del lenguaje. Ciertamente no sólo no se disponía de los medios simbólicos para escribir fórmulas propiamente dichas, sino que ni siquiera se explicitaba, en problemas tan complejos como la cúbica, lo que podríamos considerar el equivalente verbal de una fórmula. En problemas difíciles, era frecuente sintetizar en forma mnemotécnica, una receta para reducir el problema a otro más manejable. Por ejemplo, la solución de Tartaglia de la cúbica, está descrita en las famosas *terzine*:

Quando chel cubo con le cose appreso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trovan dui altri differenti in esso.
Da poi terrai questo por consueto
Che'l lor produtto sempre sia uguale
Al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varrà la tua cosa principale.

Examinémoslas cuidadosamente para darnos una idea de los procedimientos involucrados. Lo primero que observamos es el uso del verso como recurso para facilitar la memorización de una receta que no es una fórmula en palabras, sino instrucciones para transformar el problema en otro para el cual se conoce un método de resolución. Descrito el contenido de las *terzine* en forma muy libre, se indica que para resolver una ecuación de la forma cubo más cosa igual a número ($x^3 + px = q$), se considere el problema de encontrar dos números cuyo producto y cuya diferencia son conocidas —e iguales respectivamente, al cubo de la tercera parte del coeficiente de la cosa ($(p/3)^3$) y al número dado (q)— entonces, una vez encontrados dichos números, la diferencia de sus raíces cúbicas proporcionará la cosa inicialmente buscada. Consideremos un ejemplo sencillo, y desarrollemoslo simbólicamente. Supongamos que se quiere resolver la ecuación $x^3 + 9x = 2$, y que hacemos $x = u - v$, entonces:

$$(u - v)^3 + 9(u - v) = 2$$

que puede reescribirse como

$$u^3 - v^3 + 3uv(u - v) + 9(u - v) = 2$$

relación que se satisface si

$$u^3 - v^3 = 2$$

$$3uv = 9$$

ahora bien, si simplificamos y elevamos al cubo la segunda ecuación, se tiene

$$u^3v^3 = 27$$

lo que junto con la primera, permite encontrar u^3 y v^3 para posteriormente calcular $u - v$.

El anterior desarrollo simbólico, nos permitió entender procedimiento de Tartaglia y darnos cuenta de su corrección, pero tiene importantes diferencias con él, no es simplemente lo mismo con distinta notación. En primer lugar, procedimos en orden inverso al prescrito por las *terzine*, comenzando por suponer que la cosa puede expresarse como diferencia de dos números u y v, y examinando, mediante manipulaciones simbólicas, las consecuencias de dicha suposición. En otras palabras, procedimos en forma analítica para constatar que con los cubos de u y v, se verifican condiciones equivalentes al problema que describe Tartaglia en las *terzine*.

No es mi propósito, hacer una revisión sistemática de las clases de problemas abarcados por los tratados renacentistas del *arte de la cosa*. El ejemplo anterior se utilizó para mostrar que el álgebra simbólica no reproduce simplemente al *arte de la cosa* con notación mejorada, sino procede con técnicas diferentes y más eficaces. Las reformulaciones de los resultados de los antiguos algebristas en el moderno lenguaje simbólico, no son en realidad transcripciones directas, sino auténticas reformulaciones. Estas reformulaciones no necesariamente reproducen fielmente las estrategias globales utilizadas en el álgebra retórica o sincopada para abordar un problema dado, y mucho menos la sucesión exacta de operaciones y transformaciones llevadas a cabo sobre los datos y las incógnitas. Tampoco reflejan las demandas intelectuales impuestas por el *arte de la cosa* a sus practicantes: gran habilidad para el cálculo aritmético, una enorme familiaridad con las propiedades de números particulares, virtuosismo para identificar patrones de composición y descomposición de los números, y un desarrollado arte de la memoria.

Con el álgebra simbólica se despliegan, prácticamente dentro un mismo proceso, tanto el análisis del problema como los pasos para resolverlo, e incluso en dichos pasos está implícita la validación de la técnica de resolución, siempre y cuando no se haya violado la sintaxis algebraica al llevarlos a cabo. En los tratados del *arte de la cosa* la descripción y puesta en obra de los procedimientos de resolución, y su validación, son universos distintos. El procedimiento para resolver una familia de problemas de cierto tipo, muchas veces ni siquiera se hace explícito, sino simplemente se ejemplifica exhibiendo las operaciones numéricas para obtener la solución de un caso particular, que se tomaba como modelo para el caso general. En el mejor de los casos, una receta en lengua vernácula describe los pasos a seguir. La validación de la receta, cuando se proporciona, se lleva a cabo mediante argumentos geométricos basados fundamentalmente en teoremas de los libros II y VI de *Los Elementos* de Euclides.

El álgebra simbólica, proporcionó un lenguaje a través del cual se habrían de releer, comprender mejor y finalmente reformular de manera inmensamente fructífera los resultados de los cosistas, pero ni su importancia, ni sus raíces, se circunscriben exclusivamente al *arte de la cosa*. Si bien los cosistas se ocupaban fundamentalmente de la búsqueda de nuevos métodos prácticos de solución de ecuaciones, algunos pensadores Renacentistas, interesados tanto en la búsqueda de métodos heurísticos y técnicas de invención, así como en los fundamentos teóricos de las matemáticas, enfocaron su interés en los textos matemáticos griegos traducidos durante el período, gracias a los esfuerzos de los humanista en revivir la sabiduría de los antiguos. En los textos más avanzados de las matemáticas griegas, como los tratados de Arquímedes sobre la *Cuadratura de la parábola*, *Sobre la esfera y el cilindro* o el tratado de *Las Cónicas* de Apolonio, algunos estudiosos adivinaban la existencia de un método perdido, por medio del cual los antiguos habrían descubierto los maravillosos resultados expuestos en sus tratados. En particular, se encontraban trazas de dicho método en el libro VII de *La Colección Matemática* de Pappus, donde se reportan resultados pertenecientes al *campo del análisis*. Hubo quienes, como el matemático Francés Francois Viète, creyeron discernir vestigios corruptos del supuesto arte perdido en el álgebra, e impulsados por esa visión emprendieron la tarea de reconstruir el arte inventivo de los antiguos.

Viète, publicó en 1591 un tratado *Introducción al arte analítico –In artem analiticem isagoge–*, donde formula los elementos básicos de un nuevo sistema de álgebra simbólica,el cual habría de desarrollar en una serie de trabajos posteriores. Comienza con una discusión del método de análisis y síntesis, que califica como una cierta vía de adquisición de la verdad característica de las matemáticas, cuyos orígenes remonta a Platón y Theón de Alejandría. La novedad de la formulación de Viète, fué la técnica para poner en operación su arte analítico, diferente de la de los analistas antiguos. Ciertamente, el viejo y el nuevo análisis utilizaban pasos similares para formular las ecuaciones y proporciones a partir de las condiciones del problema, apoyandose en nociones comunes y teoremas demostrados 'por el poder del análisis mismo'. Pero las técnicas de los antiguos, operaban sobre números solamente, esto es, estaban circunscritas a la *logística numerosa*, mientras que las nuevas técnicas utilizaban la *logística speciosa*, una aritmética que opera con '*species* o forma de las cosas, tales como las letras del alfabeto'.

La *logística speciosa* de Viète comienza por representar cada cantidad elemental que interviene en un problema por una letra, las vocales mayusculas se usan para denotar las cantidades indeterminadas, y las consonantes mayúsculas para representar cantidades dadas. A partir de ellas, otras cantidades en que se traducen las condiciones de un problema, pueden construirse mediante las operaciones arítméticas.

En la *Introducción al arte analítico*, Viète enuncia e ilustra con ejemplos muy simples, transformaciones fundamentales que no alteran una ecuación. Estas transformaciones permiten, respectivamente, la transposición con signos contrarios de términos de un lado a otro de una ecuación, la reducción del grado de una ecuación mediante la división por la *specie* —cuando esta figura en todos sus términos—, y la división de los coeficientes de la ecuación por una misma cantidad. Dichas transformaciones, si bien correponden a propiedades bien conocidas cuando se interpretan en términos de cantidades, en el contexto de la *logistica speciosa*, constituyeron herramientas simbólicas poderosas que permitieron reescribir el complejo repertorio de técnicas de los cosistas, como una teoría de ecuaciones sistemática, de tal manera que los potentes métodos heurísticos de los cosistas, capaces de reducir problemas complejos a otros más simples con patrones de solución conocidos, se traducen a fórmulas propiamente dichas en el simbolismo del *arte analítico*.

El uso sistemático de fórmulas convierte al *arte analítico* en una herramienta muy poderosa. Procedimientos complicados, se pueden llevar a cabo manipulando directamente dichas expresiones simbólicas en *species*, y pueden entenderse mejor razonando directamente sobre ellas. Las fórmulas de Viète, sin embargo, tiene un aspecto muy diferente a la moderna notación algebraica. Veamos algunos ejemplos:

Notación moderna	Notación viètica
$\frac{BA}{D}+\frac{BA-BH}{F}=B$	$\frac{\text{B } in \text{ A}}{D}+\frac{\text{B } in \text{ A}-\text{B } in \text{ H}}{F}$ *aequabuntur* B
$D\,(2B^3-D^3)$	D *in* $\left\{\begin{matrix}\text{B } cubum \text{ 2} \\ -\text{D } cubum\end{matrix}\right\}$
$\frac{B^2-E^2}{E}=A$	$\frac{\text{B } planum\ -\text{E } quadratum}{E}$ *erit* A
$\frac{3B^4-3B^2E^2}{E}$	$\frac{\text{B } plano\text{-}planum\ -\text{B } planum \text{ } in \text{ E} quadratum \text{ 3}}{E}$

En la tabla anterior, se aprecia el uso por parte de Viète, de algunas notaciones que eran ya habituales en su tiempo: la adición y sustracción se representan mediante los símbolos + y -, mientras que la multiplicación y la división se denotan, respectivamente, mediante el término *in* —o bien mediante la simple yuxtaposición de símbolos— y la barra horizontal de la notación fraccionaria. Los principales inconvenientes de la notación de Viète, radican en la falta de una representación simbólica para la igualdad, así como en la representación descriptiva de las potencias de las *species* y de la dimensión de las cantidades, puntos donde su sistema es menos económico en notación.

Los aspectos más notables de la reformulación simbólica del *arte de la cosa*, se observan en la consición y generalidad de sus desarrollos y en la transformación de los medios de validación de los procedimientos de solución. En los tratados del *arte de la cosa* se suelen explicitar separadamente procedimientos de solución para ecuaciones que desde la perspectiva del álgebra simbólica resultan equivalentes, dado que son fácilmente reducibles unas a otras mediante transformaciones sencillas. Además, el uso de literales permite tratar los datos de problemas con la misma estructura como parámetros. Las formas canónicas de las ecuaciones, se convierten entonces en descripciones explícitas de un problema en general, y así mismo, la resolución simbólica de dichas ecuaciones, exhibe la estructura del proceso de solución con una claridad y generalidad difíciles de alcanzar mediante instanciaciones de casos particulares.

En otro terreno, los complicados diagramas de composiciones y descomposiciones geométricas de magnitudes, interpretadas como segmentos, áreas o volúmenes, parte obligada de las secciones teóricas de los tratados del *arte de la cosa*, tienden a desaparecer. Dichos diagramas se utilizaban para demostrar geométricamente, *a posteriori*, la validez de procedimientos numéricos generalmente descubiertos en forma empírica. El nuevo arte, procede mediante la transformación de expresiones simbólicas respetando una sintaxis predeterminada, de tal manera que, si las transformaciones fueron adecuadamente elegidas, al final del proceso pueden leerse explícitamente las soluciones al problema planteado, o al menos una nueva perspectiva del mismo. Esta manera de proceder va a dar cabida progresivamente, a una nueva forma de argumentación matemática.

Viète en su obra *Apollonius Gallus*, intenta restaurar el tratado *Sobre los Contactos* de Apolonio de Perga; Marino Ghetaldi, discípulo de Viète y ex-estudiante de Clavius, escribió un suplementos del *Apollonius Gallus*, al que añadió su propia restauración de las *Inclinaciones* del propio Apolonio; y Willebrod Snell, restauró *Sección Determinada*, *Sección de Razones* y *Sección de Area.* En dichas restauraciones, los autores proponen demostraciones para teoremas de autores clásicos, enunciados en libros como la *Colección Matemática* de Pappus, donde se reporta el contenido de un *corpus* de literatura matemática que se ha perdido. Para obtener las demostraciones, los restauradores, usan un repertorio variado de técnicas matemáticas tomadas de los antiguos o inventadas por ellos mismos, pero se valen cada vez más del incipiente lenguaje del álgebra simbólica.

Las supuestas restauraciones, estaban en realidad forjando nuevas herramientas que a la larga permitirían tematizar el pensamiento matemático alrededor de problemáticas diferentes y más amplias que las de los griegos. Esto se aprecia claramente en la obra geométrica de Pierre de Fermat, conectada con la restauración de los *Loci Planos* de Apolonio, los *Loci Sólidos* de Aristeo, así como los *Loci en Superficies* y los *Porismas* de Euclides. Fermat, alrededor de 1636, cuando había tenido éxito en la total restauración de los *Loci Planos* de Apolonio, ya estaba en posesión de un método poderoso que había desarrollado durante el proceso, y que llamamos hoy en día geometría analítica.

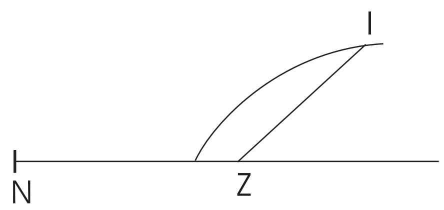
3. La introducción a los lugares geométricos planos y sólidos de Fermat.

Tanto Descartes como Fermat, se acercaban analíticamente a las matemáticas, y ambos consideraban el álgebra simbólica como el instrumento óptimo del análisis, si bien Fermat no formuló, a diferencia de Descartes, su propio sistema de álgebra simbólica, sino se apegóa las convenciones de notación, así como a las técnicas y resultados del álgebra de Viéte.

La *Introducción* de Fermat comienza por indicar en forma completamente explícita, la relación que existe entre una ecuación indeterminada —con dos variables— y un lugar geométrico:

> *Quoties in ultima aequalitate duae quantitates ignotae reperiuntur, fit locus loco et terminus alterius ex illis describit lineam rectam aut curvam* (Cuando dos cantidades desconocidas se encuentran en igualdad final, resulta un lugar geometrico [fijo] en posición y el punto final de una de ellas describe una línea recta o curva)

La manera en que Fermat construye los lugares geométricos dada la ecuación, es la siguiente: Sobre una línea de referencia dada, se mide un segmento cuya longitud corresponde a un valor de una de las variables y después con un ángulo fijo dado, se toma un segmento de longitud igual a la otra variable -de manera que se satisfaga la ecuación dada- y el extremo ‘libre’de dicho segmento, describe, al tomar la ’variable independiente’todos sus valores, un lugar geométrico.

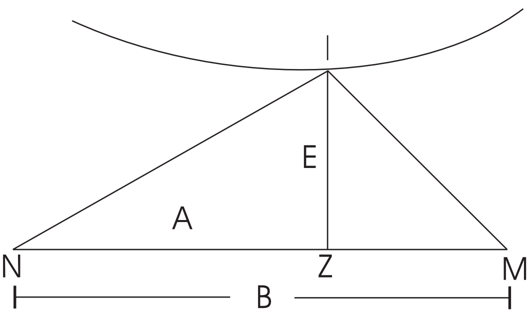


El cuerpo principal de la obra se ocupa de demostrar que ecuaciones algebraicas de primero o segundo grado en dos incognitas, determinan siempre curvas que pertenecen a la familia genérica de las secciones cónicas. La ecuación general de segundo grado en dos variables $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, Fermat la subclasifica en siete casos representados por formas canónicas, y demuestra, con ayuda de proposiciones de los *Data* de Euclides y de*Las Cónicas* de Apolonio, que cada caso define a una clase de cónicas: $Dx = Ey$ (línea recta), $F - x^2 = y^2$ (círculo), $Cxy = F$ (hipérbola equilátera), $Ax^2 \pm Cxy = By$ (lineas rectas), $Ax^2 = Ey$ (parábola), $F - Ax^2 = By^2$ (elipse), y $F + Ax^2 = By^2$ (hipérbola). De hecho, en cada caso Fermat estudia una familia de ecuaciones que son reducibles a las formas canónicas arriba mencionadas usando las transformaciones del álgebra de Viète e interpreta geométricamente dichas transformaciones, en una forma que modernamente entenderíamos como cambios de coordenadas.

La *Introducción* tiene entonces más que *La Geometría* el estilo de un tratado sistemático de los principios elementales de la ’geometría analítica’. Esto no significa que la *Introducción* sea para el lector moderno, un libro más fácil de abordar que *La Geometría.* Entender en detalle algunas de las técnicas que utiliza Fermat, requiere de un amplio conocimiento tanto del álgebra de Viéte, como de resultados clásicos sobre las secciones cónicas. Al final de la *Introducción,* Fermat sugiere que su método para estudiar algebraicamente lugares geométricos, no sólo permite abarcar breve y lúcidamente lo que los antiguos conocían acerca de los *loci* planos y sólidos, sino proporciona un método para cualquier problema de lugares geométricos. Como ejemplo, menciona una variante, de uno de los problemas que aparecen en el comentario de Pappus al tratado de las *Cónicas* de Apolonio:

> Si se tiene dadas en posición cualquier número de lineas, y se trazan líneas desde un mismo punto y con ángulos dados a las líneas dadas, y si la suma de los cuadrados [de las longitudes] de las líneas trazadas es igual a un área dada, entonces el punto está en un *locus* sólido dado en posición

Fermat, no aborda en general el problema arriba enunciado, sino proporciona el tratamiento algebraico de un caso particular, como modelo del método que podría seguirse para abordar otras instanciaciones del mismo. Fermat prueba que, si se tienen dos puntos dados M y N, el *locus* descrito por los puntos I tales que $IN^2 + IM^2$ está en una razón dada con el área del triángulo INM (ver Figura), es un círculo. Para ello, traduce el planteamiento del problema a una expresión algebraica, y simplemente la reduce a una de las formas canónicas previamente estudiadas.



Aún cuando no vamos a hacer una comparación detallada entre los sistemas de Fermat y de Descartes, vale la pena señalar, que el problema de Pappus desempeñó un papel importante en ambas formulaciones. La *Introdución* finaliza con un ejemplo relacionado con el problema de Pappus, y *La Geometría,* prácticamente gira a su alrededor. Descartes cita textualmente la formulación del problema en latín, de la edición de Commandino, *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectio* de 1588, interpolando en la cita la observación de que el escrúpulo que tenían los antiguos en emplear los términos de la aritmética en la geometría, provenía de que no veían ellos claramente su relación, lo que producía bastante oscuridad y confusión en la forma como se expresaban.

Veamos —en notación moderna— en que consiste el problema de Pappus: Consideremos, un número de líneas L_i en posición dada, y sean

φ_i, ángulos fijos. Sea P un punto, tal que, para cada i, el segmentos que lo une con la línea L_i, forma con ella un ángulo igual a φ_i. Denotemos por d_i, la longitud de dichos segmentos. Si s es la longitud de un segmento dado, y p/q es una razón dada, el problema de Pappus requiere encontrar puntos con las siguientes propiedades:

- para tres líneas:
$$\frac{d_1 \cdot d_2}{d_3^2} = \frac{p}{q}$$
- para cuatro líneas:
$$\frac{d_1 \cdot d_2}{d_3 \cdot d_4} = \frac{p}{q}$$
- para $2n - 1$ líneas, $n > 2$:
$$\frac{d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n}{d_{n+1} \cdot ... \cdot d_{2n-1} \cdot s} = \frac{p}{q}$$
- y finalmente, para $2n$ líneas, $n > 2$
$$\frac{d_1 \cdot ... \cdot d_n}{d_{n+1} \cdot ... \cdot d_{2n}} = \frac{p}{q}$$

En la formulación arriba descrita, evidentemente el caso con tres lí neas se presenta excepcionalmente, como un tratamiento separado del problema con cuatro líneas, cuando dos de éstas coinciden. Desde la antigüedad era conocido que existen numerosos puntos que, en cada caso, satisfacen las las condiciones del problema, y este se consideraba por lo tanto como un problema de lugares geométricos. Apolonio investigó el caso de cuatro líneas haciendo uso de las técnicas conocidas como aplicación de áreas, y Pappus reporta que para tres o cuatro líneas, el lugar geométrico que resuelve el problema es una sección cónica, y que para más de cuatro líneas, la forma del lugar geométrico es desconocida. Los nuevos resultados sobre el problema de Pappus que Descartes menciona, son los siguientes:

- Para tres, cuatro o cinco líneas en posición general, pero no para cinco líneas paralelas, los puntos del *locus* resultante pueden ser construidos con líneas rectas y círculos.

- Para cinco líneas paralelas, así como para seis, siete, ocho y nueve líneas en posición general, pero no para nueve líneas paralelas, los puntos del *locus* resultante pueden ser construidos como intersecciones de cónicas. En algunos casos particulares, pueden bastar líneas rectas y círculos.

- Para nueve líneas paralelas, así como para diez, once, doce y trece líneas en posición general, pero no para trece líneas paralelas, la construcción por medio de secciones cónicas en general no es posible, y se requieren curvas de grado inmediatamente más compuesto.

- Y así sucesivamente.

En el mismo primer libro de *La Geometría*, Descartes bosqueja el método para poner en ecuación las premisas del problema da Pappus, ilustrandolo en el caso de cuatro líneas.. En grandes líneas, el procedimiento consiste en seleccionar una de las líneas como principal, digamos L_1, y considerar la distancia x desde un punto fijo A en L_1, hasta la intersección del segmento d_1 con L_1. Si hacemos $d_1 = y$, entonces, con un simple argumento geométrico y un poco de manipulación algebraica, es posible mostrar que todas las d_i restantes se pueden expresar en términos de x e y como:

$$d_i = A_i x + B_i y + C_i,$$

por lo que la ecuación del *locus* será, para el caso de $2n$ líneas:

$$y \cdot \prod_{i=2}^{n} (A_i x + B_i y + C_i) = \frac{p}{q} \cdot \prod_{i=n+1}^{2n} (A_i x + B_i y + C_i)$$

y para el caso de $2n - 1$ líneas:

$$y \cdot \prod_{i=2}^{n} (A_i x + B_i y + C_i) = \frac{p}{q} \cdot s \cdot \prod_{i=n+1}^{2n-1} (A_i x + B_i y + C_i)$$

3.1. Reflexiones finales.

En alguna ocasión Fermat dijo que si algo había de valor en sus trabajos matemáticos, era haber mostrado que se podía ir mas lejos que los griegos. En el caso de la geometría, Fermat logró plenamente dicho propósito. Su punto de partida fué, con Viète, el estudio de las proposiciones refereridas principalmente en el libro VII de la *Colección Matemática* de Pappus. Fermat emprendió la tarea de restaurar, entre otros textos citados por Pappus, los *Loci Planos* de Apolonio, los *Loci Sólidos* de Aristeo, así como los *Loci en Superficies* y los *Porismas* de Euclides. Alrededor de 1636, cuando había tenido éxito en la total restauración de los *Loci Planos* de Apolonio, Fermat había inventado la geometría analítica cuyos principios explica en la *Introducción a los lugares geométricos planos y sólidos.*

De Viète, Fermat adoptó la idea del álgebra simbólica como lenguaje y herramienta capaz de desplazar la atención de soluciones particulares de ecuaciones específicas, a las relaciones entre soluciones a familias de problemas y la estructura de las ecuaciones. Buena parte del trabajo de Fermat, utilizó un método que podría llamarse análisis de las reducciones, es decir, de cómo un problema podía reducirse o identificarse con problemas oclases de problemas cuya solución general era conocida. En el caso de problemas sobre lugares geométricos, esta manera de proceder alcanza una de sus expresiones más acabadas en la geometría analítica.

Referencias

[1] C. Boyer, *History of Analitic Geometry*, New York, Scripta Mathematica, 1956.

[2] W. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods*, New York, Dover, 1963.

[3] R. Descartes, *The geometry of René Descartes*, traducción de Smith, D. E. y Latham, M. L., New York, Dover 1954

[4] R. Descartes, *Oeuvres*, Editadas por C. Adam and P. Tannery. Nueva Edición, Paris, Vrin, 1964–1974.

[5] P. Fermat, *Précis des ouvres mathematiques et de lárithmètique de diophante*, editadas por E. Brassine, Tolouse, 1853, reimpresión de Éditions Jacques Gabay, 1989.

[6] M. S. Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat*: 1601–1665, Princeton, N. J., Princeton University Press, 1994.

[7] R. Quintero, *Arte analítico e imaginación en "La Geometría" de Descartes*, Tesis Doctoral, DME, Cinvestav, 1996.

[8] N. Tartalea, *Quesiti et inventioni diverse de Nicolo Tartalea, Bresciano*, Editadas por Masotti, A.,Brescia, 1959.

[9] F. Viète, The Analytic Art: Nine Studies in Algebra, Geometry and Trigonometry for the Opus Restitutae Mathematicae Analyseos, seu Algebra Nova, traducción de Witmer, R. T., Kent, Ohio, Kent State University Press, 1983.