Miscelánea Matemática **58** (2014) 111-124 SMM

El problema del subespacio invariante

Marcos López García
Instituto de Matemáticas
Unidad Cuernavaca
Universidad Nacional Autónoma de México
A.P. 273-3, ADMON 3, C.P 62251
Cuernavaca, Morelos, México
marcos@matcuer.unam.mx

Resumen

En este trabajo justificamos el enunciado actual del problema del subespacio invariante: ¿todo operador continuo definido en un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita, tiene un subespacio invariante no trivial? Además hacemos una breve revisión histórica de los acontecimientos que han surgido en la búsqueda de la solución del problema.

1. Introducción

El famoso problema del subespacio invariante lleva más de 80 años sin tener una respuesta completa. En este trabajo hacemos un breve recuento de algunos resultados que se han obtenido con la esperanza de que alguno de nuestros lectores tengan el talento suficiente para dar una respuesta definitiva al problema.

En adelante usaremos el término «operador» como sinónimo de una transformación lineal T definida en un espacio vectorial normado X sobre el campo de los número complejos $\mathbb{C}$.

Decimos que A es un subespacio invariante bajo un operador $T : X \to X$ o que A es un subespacio T-invariante si:

1. A es un subespacio vectorial no vacío contenido en X.
2. A es cerrado en X.
3. $T(A) := \{T(x) : x \in A\} \subset A$.

Si además $A \neq \{0\}$ y $A \neq X$ decimos que A es un subespacio invariante no trivial de T.

Por ejemplo, consideremos un operador continuo $T : X \to X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de T. Entonces el espacio propio correspondiente $\{x \in X : T(x) = \lambda x\}$ es un subespacio invariante no trivial de T cuando T no es un múltiplo escalar del operador identidad.

Una pregunta natural es: ¿Todo operador continuo tiene un subespacio invariante no trivial?

¿Cuál es la importancia de encontrar tal solución? Grosso modo, tenemos las siguientes situaciones:

a) Supongamos que todo operador continuo $T : X \to X$ tiene un subespacio invariante no trivial. En caso que se pueda escribir $X = A + B$ con A un subespacio T-invariante no trivial, aplicaríamos el resultado a la restricción del operador T sobre A y así sucesivamente.

   El conocimiento de los subespacios invariantes de un operador permitiría su descomposición en suma de operadores más simples definidos en tales subespacios invariantes. Esta idea es precisa, por ejemplo, en el caso que X tiene dimensión finita y lo tratamos en la siguiente sección.

b) Bajo hipótesis adecuadas, una respuesta negativa implicaría la existencia de un operador continuo $T : X \to X$ tal que para todo $x \neq 0$, el conjunto

$$\left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j T^j(x) : a_j \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

   sería denso en X (convenimos que T^0 es el operador identidad). Así que este sería un resultado de aproximación.

Se desconoce quien planteó primero el problema del subespacio invariante; tal vez surgió en 1930 como consecuencia del siguiente resultado (no publicado) atribuido a John von Neumann: Todo operador compacto definido en un espacio de Hilbert tiene un subespacio invariante no trivial. Debemos mencionar también que en 1948 Beurling [7] caracterizó los subespacios invariantes del operador de traslación definido en el espacio de Hardy, resultado que motivó el estudio de los subespacios invariantes de operadores.

En la realización de este escrito nos hemos basado en los artículos [18, 21, 23, 29, 30] y en los textos [17, 28]. Además recomendamos la lectura del libro [22].

2. El caso finito dimensional

Los resultados de esta sección se pueden encontrar en el libro clásico de álgebra lineal [17]. En esta sección X denotará un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{C}$ que además es finito dimensional; así que X es isomorfo a $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ para un cierto $n \geq 1$ y $\|\cdot\|_2$ es la norma euclidiana en $\mathbb{C}^n$. Es decir, existen $n \geq 1$ y un operador biyectivo $\Lambda : X \to \mathbb{C}^n$. De lo anterior también se sigue que todos los subespacios vectoriales contenidos en X son cerrados.

Denotamos por $\mathbb{C}[t]$ al conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$. Si $T : X \to X$ es un operador, entonces T^n es la composición de T consigo mismo $n-$veces. Dado un polinomio $p(t) = \sum_{m=0}^{n} a_m t^m \in \mathbb{C}[t]$, ponemos $p(T) := \sum_{m=0}^{n} a_m T^m$ con $T^0 = \mathrm{Id}$. Además el núcleo del operador T es el subespacio vectorial $\ker T := \{x \in X : Tx = 0\}$.

Bajo las condiciones antes mencionadas, es fácil ver que todo operador $T : X \to X$ tiene un valor propio y por lo tanto X contiene un subespacio T-invariante no trivial. Para ello supongamos que X tiene dimensión $n \geq 1$ y fijamos $x \in X \setminus \{0\}$. Como el conjunto $\{x, Tx, \ldots, T^n\}$ es lineamente dependiente y por el teorema fundamental del álgebra, existen polinomios lineales $s_j \in \mathbb{C}[t]$, $j = 1, \ldots, n$, tales que

$$s_n(T) \ldots s_1(T)\, x = 0.$$

Entonces $u := s_{j-1}(T) \ldots s_1(T)\, x$ es un vector propio de T si j es el índice más pequeño tal que $s_j(T) \ldots s_1(T)\, x = 0$.

Recordamos que el polinomio minimal $p \in \mathbb{C}[t]$ de un operador $T : X \to X$ es el polinomio mónico de grado más pequeño que anula a T. Por el teorema fundamental del álgebra se puede escribir

$$p = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$$

donde $p_j \in \mathbb{C}[t]$ es un polinomio lineal y $r_j \geq 1$.

El llamado teorema de la descomposición prima del álgebra lineal afirma que

$$X = \bigoplus_{j=1}^{k} \ker p_j(T)^{r_j},$$

es decir, cada $x \in X$ tiene una única representación $x = \sum_{j=1}^{k} x_j$ con $x_j \in \ker p_j(T)^{r_j}$. Además, cada operador $E_j : X \to \ker p_j(T)^{r_j}$ dado por

$$E_j\left(\sum_{l=1}^{k} x_l\right) = x_j, \quad \text{con } x_l \in \ker p_l(T)^{r_l},$$

es suprayectivo, es una proyección $\left(E_j^2 = E_j\right)$ y es un polinomio en T; así que T conmuta con las proyecciones E_j y por lo tanto $\ker p_j(T)^{r_j}$ es T-invariante.

Concluimos que todo operador T definido en un espacio vectorial normado X sobre $\mathbb{C}$ y de dimensión finita, induce una descomposición de X como suma directa de subespacios invariantes no triviales de T.

Si $\mathcal{B}_j$ es una base ordenada de $p_j(T)^{r_j}$ entonces $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \dots \mathcal{B}_k\}$ es una base ordenada de X; se deduce que la matriz asociada a la transformación T respecto a la base $\mathcal{B}$ es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix},$$

donde A_j es la matriz asociada a la transformación T_j, que es la restricción de T en $\ker p_j(T)^{r_j}$. Lo anterior se resume poniendo $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_k$.

3. El caso infinito dimensional

A partir de este momento suponemos que X es un espacio vectorial normado completo sobre $\mathbb{C}$ (conocido como espacio de Banach) y que tiene dimensión infinita. Por ejemplo, el espacio ℓ^∞ de sucesiones acotadas de números complejos es un espacio de Banach respecto de la norma

$$\|(x_n)\|_\infty := \sup\{|x_n| : x_n \in \mathbb{C},\ n \geq 1\},$$

y tiene dimensión infinita.

Para referencia posterior, introducimos el espacio vectorial ℓ^p de las sucesiones de números complejos que son $p-$sumables, es decir

$$\ell^p := \left\{(x_n)_{n\geq 1} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,\ x_n \in \mathbb{C}\right\}.$$

Para $1 \leq p < \infty$ es bien conocido (ver [28, p. 86]) que ℓ^p es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ con la norma

$$\|(x_n)\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p},$$

además ℓ^p tiene dimensión infinita.

Dado un conjunto no vacío $A \subset X$ denotamos por $\operatorname{span} A$ al conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos en A. Un conjunto no vacío $B \subset X$ es separable si contiene un subconjunto denso y numerable. Por ejemplo, ℓ^p es separable si $1 \leq p < \infty$ y ℓ^∞ es no separable (ver [27, p. 113]).

Consideramos ahora un operador $T : X \to X$ y $x \in X \setminus \{0\}$; la $T-$órbita de x es el conjunto $\operatorname{Orb}(x,T) := \{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$, así que

$$\operatorname{span}\ \operatorname{Orb}(x,T) = \{p(T)\,x : p \in \mathbb{C}[t]\}.$$

Por definición, el subespacio cíclico generado por $x \in X \setminus \{0\}$ es el subespacio vectorial cerrado más pequeño que contiene a span $\mathrm{Orb}(x, T)$ y lo denotamos por $W(x, T)$; se puede verificar que

$$W(x, T) = \overline{\text{span Orb}(x, T)}.$$

Dado que cada vector $p(T)x$ puede ser aproximado en X por un vector de la forma $q(T)x$, donde q es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$, se sigue que $W(x, T)$ es separable.

Si además T es continuo en X, entonces

$$TW(x, T) \subset \overline{T\text{span Orb}(x, T)} \subset W(x, T),$$

de modo que $W(x, T)$ es un subespacio T-invariante que contiene al menos a $x \neq 0$. Si X es no separable, entonces $W(x, T)$ es un subespacio T-invariante no trivial para todo $x \neq 0$.

Concluimos que todo operador continuo definido en un espacio de Banach de dimensión infinita y no separable, siempre tiene un subespacio invariante no trivial. Por ejemplo, todo operador continuo definido en ℓ^∞ tiene un subespacio invariante no trivial.

Así que en adelante sólo consideramos espacios de Banach separables. ¿Qué se puede decir en este caso?

En 1975 Per Enflo probó que existe un espacio de Banach X sobre $\mathbb{C}$, no reflexivo, separable, y un operador continuo definido en X que sólo tiene subespacios invariantes triviales. Así que resta considerar el caso cuando X es reflexivo. A continuación introducimos esta noción.

Dado un espacio de Banach X, su espacio dual es

$$X^* := \{\Lambda : X \to \mathbb{C} | \Lambda \text{ es lineal y continuo}\}.$$

Es conocido (ver [28, teo. 4.3]) que X^* es un espacio de Banach respecto de la norma

$$\|\Lambda\| := \sup\{|\Lambda(x)| : \|x\| < 1\}.$$

Así que podemos considerar $X^{**} := (X^*)^*$ y el mapeo canónico $i : X \to X^{**}$ dado por

$$i_x(\Lambda) = \Lambda(x), \quad \text{para todo } x \in X, \ \Lambda \in X^*.$$

Por definición, un espacio de Banach X es reflexivo si el mapeo i es suprayectivo. Por ejemplo, los espacios ℓ^p son reflexivos para $p \in (1, \infty)$. Los espacios ℓ^1, ℓ^∞ no son reflexivos.

Los espacios de Banach reflexivos más conocidos son los llamados espacios de Hilbert. Recordamos que un espacio de Hilbert H sobre $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, dotado de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ que además es un espacio normado completo respecto a la norma $\|x\| = \langle x, x \rangle_H^{1/2}$.

Las soluciones de los casos considerados hasta el momento nos permiten plantear el llamado problema del subespacio invariante: ¿todo operador continuo definido en un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, separable e infinito dimensional, tiene un subespacio invariante no trivial? Bajo las condiciones mencionadas, se ha probado que los elementos en ciertas clases de operadores tienen un subespacio invariante no trivial. Es decir, las soluciones parciales apuntan hacia una respuesta positiva.

A pesar de los indicios, ¿qué significa hallar una respuesta negativa?

Todo espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, separable e infinito dimensional, tiene una base ortonormal numerable y por la igualdad de Parseval se sigue que es isométricamente isomorfo al espacio ℓ^2 de sucesiones complejas que son cuadrado sumables (ver [27, teo. 4.18]). Es decir, hay un solo espacio de Hilbert con las propiedades mencionadas. Lo que resta es encontrar un operador continuo $T : H \to H$ que sólo tenga los subespacios invariantes triviales. ¿Cuál sería la consecuencia del resultado en este sentido?

Asumamos que $T : H \to H$ es un operador continuo que sólo tiene los subespacios invariantes triviales, se sigue entonces que $W(x,T) := \overline{\operatorname{span}\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}} = H$ para todo $x \in H \setminus \{0\}$. Este sería un resultado de aproximación.

4. Breve revisión histórica

Antes de presentar un bosquejo del desarrollo histórico del problema del subespacio invariante introducimos algunos conceptos básicos.

En un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ sobre $\mathbb{C}$, denotamos por $U := \{x \in X : \|x\| < 1\}$ a la bola unitaria abierta en X. Dado un operador $T : X \to X$, es conocido que T es continuo en X si y sólo si $T(U)$ es un conjunto acotado en X. Esto justifica que a los operadores continuos se les llame acotados. Además la norma del operador acotado T se define como sigue

$$\|T\| := \sup\{\|T(x)\| : x \in U\} < \infty.$$

Denotamos por $B(X)$ al espacio de operadores acotados en X.

Se dice que T es un operador compacto si $\overline{T(U)}$ es compacto en X. Es claro que todo operador compacto es continuo en X. Por ejemplo, si X es un espacio de Banach de dimensión infinita entonces la bola cerrada unitaria no es compacta en X (ver [28, teo. 1.22]); se sigue que el operador identidad definido en X es continuo pero no es compacto.

En [2] Aronszajn afirma que John von Neumann le hizo saber que a principios de la década de 1930, había probado (sin publicarlo) que todo operador compacto definido en un espacio de Hilbert tiene un subespacio invariante no trivial. En 1950 Aronszajn probó el mismo resultado utilizando proyecciones ortogonales, así que su demostración no se podía extender directamente a los espacios de Banach. Corroboró verbalmente con von Neumann que esencialmente tenían la misma demostración y luego la extendió para espacios de Banach reflexivos. Fue hasta 1954 que Aronszajn y Smith [2] probaron el resultado en el contexto de los espacios de Banach.

Posteriormente K.T. Smith preguntó si un operador $T \in B(X)$ tiene un subespacio invariante siempre que T^2 es compacto. Esto motivó la siguiente definición.

Sea X un espacio de Banach. Un operador $T : X \to X$ es polinomialmente compacto si existe $p \in \mathbb{C}[t] \setminus \{0\}$ tal que $p(T)$ es compacto. Por ejemplo, sea K un operador compacto en X y c un número complejo no nulo, entonces el operador $T := K + c\mathrm{Id}$ es polinomialmente compacto, pero no es compacto si X tiene dimensión infinita.

En 1966 Abraham Robinson y su alumno Allen Bernstein usaron en [6] técnicas del análisis no-estándar para probar que todo operador definido en un espacio de Hilbert que es polinomialmente compacto tiene un subespacio invariante no trivial. Robinson fue quien desarrolló el análisis no-estandar en la década de los sesenta del siglo pasado y el resultado anterior pretendía ser la primer aplicación de esa nueva teoría. Halmos obtuvo de Robinson una versión preliminar de ese trabajo y en [16] tradujo el resultado al análisis estándar (el de ε y δ). En esa época Halmos era editor de la revista Pacific Journal of Mathematics y decidió que el artículo de Robinson y el suyo se publicaran en el mismo volumen e incluso ¡aparecen uno tras el otro!

En 1967 Arveson y Feldman probaron en [3] que si $T \in B(H)$ es un operador tal que $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$ y

$$[T] := \overline{\{p(T) : p \in \mathbb{C}[t]\}}^{B(H)}$$

contiene un operador compacto no cero, entonces T tiene un subespacio invariante no trivial.

Al intentar eliminar la hipótesis $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$, Halmos preguntó si todo operador continuo tiene un subespacio invariante no trivial cuando se asume que conmuta con un operador compacto no nulo. Los expertos en teoría de operadores se llevaron una gran sorpresa en 1973, cuando el joven matemático ruso Victor Lomonosov respondió en [19] de manera positiva. Probó que si $T \in B(X)$ es un operador no escalar (es decir, no es múltiplo escalar de la identidad) que conmuta con un operador compacto no cero, entonces existe un subespacio T-invariante no trivial. Además mostró que $T \in B(X)$ tiene un subespacio invariante no trivial si conmuta con un operador $S \in B(X)$ que no es múltiplo de la identidad y tal que S conmuta con un operador compacto no cero.

La técnica de Lomonosov se basa en un uso ingenioso del teorema del punto fijo de Schauder, que da lugar a una prueba corta y elegante. Varios matemáticos han intentado reemplazar el teorema mencionado por el principio de contracción de Banach para dar una prueba alternativa, pero no lo han conseguido. En 1977 Hilden proporcionó en [20] una bella y sorprendentemente simple demostración de una parte del teorema de Lomonosov: todo operador continuo en X que conmuta con un operador compacto no cero tiene un subespacio invariante no trivial. Incluso la prueba se puede encontrar en el libro de Rudin [28, teo. 10.35].

Inicialmente se creyó que el teorema de Lomonosov podría conducir a la solución general del problema del subespacio invariante. Sin embargo, en 1980 Hadwin, Nordgren, Radjavi y Rosenthal dieron en [15] un ejemplo de un operador T tal que si $ST = TS$ con S un operador continuo no escalar, entonces S no conmuta con ningún operador compacto no cero.

5. Un ejemplo de Per Enflo

En 1976, durante la reunión anual de la Sociedad Matemática Americana, el matemático sueco Per Enflo anunció la existencia de un espacio de Banach y de un operador continuo definido en él, que sólo tiene los subespacios invariantes triviales. Desde 1975 había estado circulando una versión preliminar de su construcción, la cual había sido expuesta en un seminario (ver [12]). En 1980 publicó un reporte en el Instituto Mittag–Leffler (ver [13]), sin embargo, no sometió su trabajo a revisión hasta 1981 cuando lo envió a la revista Acta Mathematica. Desafortunadamente el artículo permaneció sin revisión durante 5 años más, debido a que era bastante díficil y no estaba bien escrito. Su trabajo [14] apareció publicado finalmente en 1987 y comprende alrededor de 100 páginas.

Para que el lector tenga una idea de la complejidad del trabajo reproducimos lo que escribían en 1982 Radjavi y Rosenthal en [21]:

> Hemos escuchado muchos rumores de la forma: fulanito pasó dos meses trabajando muy duro en el manuscrito, encontró errores menores corregibles, recorrió un tercio del camino y luego abandonó agotado.

Ya publicado el trabajo, la reseña de A.M. Davie para MathReviews menciona:

> La finalización exitosa de la tarea de Enflo es un logro notable; sin embargo, la última parte de su artículo es tan impenetrable que está destinada a ser admirada en vez de ser leída.

Antes de la aceptación de este trabajo, Enflo gozaba de una gran reputación ya que en el artículo [11] publicado en 1973 resolvió tres problemas que habían permanecido abiertos al menos tres décadas: el «problema del ganso» de Stanislaw Mazur, el problema de la base de Stefan Banach y el problema de aproximación de Alexander Grothendieck.

El matemático británico C. J. Read siguió las ideas de Enflo (conocidas entre los expertos de la epóca) para construir también un contraejemplo y lo sometió a publicación en el Boletín de la Sociedad Matemática Londinense. El artículo [24] fue rápidamente revisado y apareció en julio de 1984, saltándose una cola de retraso para publicación. En 1985 Read construyó en [25] el primer contraejemplo sobre un espacio de Banach clásico, a saber ℓ^1, ejemplo que a su vez fue simplificado por A.M. Davie y aparece publicado en el libro [5].

La tentación por parte de Read para tener precedencia sobre la solución del problema fue considerado profesionalmente no ético en muchos sectores de la comunidad matemática, dado que su trabajo estaba esencialmente basado en la ideas desarrolladas por Enflo. Por ejemplo, en [4] Beauzamy produjo otro contraejemplo refinando las técnicas de Enflo y lo presentó en el Seminario de Análisis Funcional de la Universidad de Paris (VI–VII) en febrero de 1984. Aunque los editores del Boletín de la Sociedad Matemática Londinense le habían ofrecido las mismas facilidades que a Read, Beauzamy publicó su trabajo en Integral Equations and Operator Theory en 1985. Como podrá notar el lector, el título del artículo [4] abiertamente reconoce que es una simplificación del ejemplo de Enflo.

A continuación reproducimos extractos de la introducción de algunos artículos de los personajes involucrados.

Read en [24]:

> Este es el único contraejemplo que el autor sabe que es válido. P. Enflo ha producido dos versiones preliminares que aparentemente contienen ejemplos de operadores sin un subespacio invariante, (los cuales fueron) obtenidos por métodos muy diferentes a los nuestros. Sin embargo, estos preliminares han existido desde 1976 y 1981, y ninguno ha sido publicado todavía.

Enflo en [14]:

> Un bosquejo de esta construcción fue presentado en [12]. Esta versión es la misma —excepto por algunos cambios en la presentación— que la dada en [13].

Beauzamy en [5]:

> Hacer tal precisión es inusual, y no sería de interés, si C. Read no hubiera tratado, varias veces, de manera poco elegante y sin éxito, reclamar prioridad por la solución del problema. Este comportamiento podría ser condenado con palabras más fuertes, pero recordamos que en este momento estamos escribiendo para la posteridad.

Finalmente, en [30] Yadav reproduce un diálogo que sostuvo con Enflo:

> Yadav: ¿Cómo es que Read no reconoce tu trabajo en su artículo?
>
> Enflo: ¿Qué puedo decir, solo que el asistió a mis seminarios antes de publicar su artículo?

Discusión aparte, no nos debemos quedar con la impresión que todos los contraejemplos están basados directa o indirectamente en las técnicas desarrolladas por Enflo. De hecho, Read posteriormente escribió una serie de artículos que constituyen una contribución significativa al tema. El contraejemplo que él construyó en 1985 sobre ℓ^1, es completamente diferente y más simple que el de Enflo y se puede contar como un logro importante.

En 1988 en el artículo [26], Read construyó un operador acotado en ℓ^1 que no tiene conjuntos cerrados invariantes (ya no digamos subespacios invariantes) salvo los triviales. No sólo es un resultado más fuerte sino que puede dar lugar a una nueva situación: Supongamos que el problema del subespacio invariante se resuelve algún día de manera negativa (como ya lo hizo Enflo en los espacios de Banach), automáticamente se enunciaría la pregunta ¿cada operador $T \in B(H)$ tiene un conjunto cerrado invariante no trivial?

6. Ejemplos

Ejemplo 6.1. La importancia del campo escalar. Ahora consideramos a $\mathbb{R}^2$ como un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$. La rotación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y, -\frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y \right),$$

no tiene ningún subespacio invariante no trivial, contrario al resultado general visto en la sección 2.

Como se menciona en el resumen de [1], en cuanto al problema del subespacio invariante se refiere, hay una sutil diferencia al considerar operadores actuando en espacios de Banach reales y en espacios de Banach complejos. Por ejemplo, mientras el teorema de Lomonosov es válido para espacios de Banach complejos, no lo es para espacios de Banach reales.

Ejemplo 6.2. Un operador continuo que no es compacto. Introducimos el espacio de Lebesgue

$$L^2(0,\infty) = \left\{ f : (0,\infty) \to \mathbb{R} |\ f \text{ es medible y } \int_0^\infty |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$$

y el operador $T : L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$ dado por

$$Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt, \quad x > 0.$$

La llamada desigualdad de Hardy afirma que

$$\int_0^\infty |Tf(x)|^2\, dx \leq 4 \int_0^\infty |f(x)|^2\, dx,$$

para toda función no negativa $f \in L^2(0,\infty)$, se sigue entonces que T es un operador continuo.

Notamos que la sucesión de funciones de norma uno $f_j(x) = \chi_{(0,1/j)}\sqrt{j}$, $x > 0$, satisfacen la estimación

$$\|Tf_i - Tf_j\|^2 \geq \int_0^{1/j} \left(\sqrt{i} - \sqrt{j}\right)^2 dx = \left(1 - \sqrt{\frac{i}{j}}\right)^2$$

para todo $j \geq i$, se sigue que ninguna subsucesión de (Tf_j) es de Cauchy, así que T no es un operador compacto.

Cuando $\lambda > 0$ la función $f_\lambda(x) = x^{-1+1/\lambda}$ satisface $Tf_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x)$ para todo $x > 0$, pero notamos que $f_\lambda \notin L^2(0,\infty)$.

Si $p \in C[t]$ tiene grado a lo más n, entonces $Tp(x)$ también es un polinomio de grado a lo más n, pero $p \notin L^2(0,\infty)$.

Se sigue que los «candidatos naturales» a ser subespacios invariantes no están en el espacio de Hilbert $L^2(0,\infty)$.

Ejemplo 6.3. El operador de traslación (o desplazamiento) unilateral a la izquierda $T : \ell^2 \to \ell^2$ dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \ldots\right) \tag{1}$$

es continuo ya que

$$\sum_{j=2}^\infty \left|\frac{x_j}{j}\right|^2 \leq \sum_{j=1}^\infty |x_j|^2 .$$

Sea e_n la llamada n-ésima sucesión básica, es decir,

$$e_n(m) = \begin{cases} 1 \text{ si } m = n, \\ 0 \text{ si } m \neq n. \end{cases}$$

El lector puede verificar que $\lambda = 0$ es el único valor propio de T y que su correspondiente espacio propio es el espacio vectorial generado por e_1. ¿Existen otros subespacios invariantes no triviales de T?

Para $n \geq 1$ ponemos $M_n = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$, entonces M_n es un subespacio invariante no trivial de T para todo n. Se puede probar que si M es subespacio invariante no trivial de T, entonces coincide con algún M_n.

7. El operador integral de Volterra

Para un operador general $T \in B(H)$ es bastante complicado determinar o caracterizar la colección de todos sus subespacios invariantes. A continuación presentamos un ejemplo en la que es posible tal caracterización.

El operador integral de Volterra $V : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ está dado por

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in [0,1], \ f \in L^2([0,1]).$$

Por la desigualdad de Cauchy–Schwarz tenemos

$$|Vf(y) - Vf(x)| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq \|f\|_{L^2} |y-x|^{1/2},$$

para todo $x, y \in [0,1]$, $x < y$. El teorema de Arzela–Ascoli implica que $V : L^2([0,1]) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ es un operador compacto y como $C[0,1]$ está encajado de manera continua en $L^2([0,1])$, se sigue que el operador de Volterra es compacto.

Para $\alpha \in [0,1]$ sea

$$M_\alpha = \left\{ f \in L^2([0,1]) : f = 0 \ \text{ c. d. en } [0,\alpha] \right\}.$$

Claramente M_α es un subespacio invariante de V para todo $\alpha \in [0,1]$, lo impresionante es que estos son todos. Esta caracterización fue obtenida por Dixmier [9] en el caso $L^2([0,1])$ sobre $\mathbb{R}$, e independientemente por Brodskii [8] y Donoghue [10] en el caso $L^2([0,1])$ sobre $\mathbb{C}$.

8. Conclusión

En este trabajo hemos presentado el problema del subespacio invariante, sus antecedentes históricos, algunos ejemplos y una extensa bibliografía; esperamos haber sembrado una semilla de curiosidad en los jovenes lectores.

Debemos mencionar que algunos resultados tienen una conclusión más fuerte, a saber, hablan de la existencia de subespacios hiperinvariantes no triviales. También existen ejemplos de caracterización de los subespacios invariantes de operadores definidos en espacios de funciones analíticas. Al lector interesado le recomendamos revisar los artículos [29, 30].

Agradezco profundamente los comentarios hechos por los revisores de este trabajo, los cuales mejoraron considerablemente la exposición del material.

Bibliografía

[1] Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis, G. Sirotkin y V. G. Troitsky, «Some open problems and conjectures associated with the invariant subspace problem», *Positivity*, vol. 9, núm. 3, 2005, 273–286.

[2] N. Aronszajn y K. T. Smith, «Invariant subspaces of completely continuous operators», *Ann. of Math.*, vol. 60 (2), 1954, 345–350.

[3] W. B. Arveson y J. Feldman, «A note on invariant suspaces», *Michigan Math. J.*, vol. 15, 1968, 61–64.

[4] B. Beauzamy, «Un opérateur sans sous-espace invariant: simplification de léxemple de P. Enflo.», *Integr. Equ. Oper. Theory*, vol. 8 (3), 1985, 314–384.

[5] ———, *Introduction to operator theory and invariante subspaces*, North Holland, 1988.

[6] A. R. Bernstein y A. Robinson, «Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos», *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 16, 1966, 421–431.

[7] A. Beurling, «On two problems concerning linear transformations in Hilbert space», *Acta Math.*, vol. 81, 1948, 239–255.

[8] M. S. Brodskii, «On a problem of I. M. Gel´fand. (russian)», *Uspehi Mat. Nauk (N.S.)*, vol. 2, núm. 74, 1957, 129–132.

[9] J. Dixmier, «Les opérateurs permutables á l´opérateur integral», *Portugal. Math. Fas*, vol. 2, 1949, 73–84.

[10] W. F. Donoghue, «The lattice of invariant subspaces of a completely continuous quasinilpotent transformation», *Pacific J. Math.*, vol. 7, 1957, 1031–1035.

[11] P. Enflo, «A counterexample to the approximation problem in Banach spaces», *Acta Math.*, vol. 130, 1973, 309–317.

[12] ———, *On the invariant subspace problem in Banach spaces. Séminaire Maurey Schwartz (1975-1976) espaces lp, applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach. exp. nos.*, Centre Math., École Polytech., Palaiseau, 1976.

[13] ———, *On the invariant subspace problem for Banach spaces*, Institute Mittag-Leffler, Report 9, 1980.

[14] ———, «On the invariant subspace problem for Banach spaces», *Acta Math.*, vol. 158, núm. 3-4, 1987, 213–313.

[15] D. W. Hadwin, E. A. Nordgren, H. Radjavi y P. Rosenthal, «An operator not satisfying Lomonosov's hypothesis», *J. Funct. Anal.*, vol. 38, núm. 3, 1980, 410–415.

[16] P. R. Halmos, «Invariant subspaces of polynomially compact operators», *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 16, 1966, 433–437.

[17] K. Hoffman y R. Kunze, *Álgebra lineal*, Prentice Hall Hispanoamericana, 1973.

[18] M. Liu, «The invariant subspace problem and its main developments», *Int. J. Open Problems Compt. Math.*, vol. 3, núm. 5, 2010, .

[19] V. I. Lomonosov, «Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operator», *Funkcional. Anal. i Priloen.*, vol. 7, núm. 3, 1973, 55–56.

[20] A. J. Michaels, «Hilden's simple proof of Lomonosov's invariant subspace theorem», *Adv. Math.*, vol. 25, 1977, 56–58.

[21] H. Radjavi y P. Rosenthal, «The invariant subspace problem», *Math. Intelligencer*, vol. 4, núm. 1, 1982, 33–37.

[22] ———, *Invariant subspaces*, 2.ª ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003.

[23] ———, «Paul Halmos and invariant subspaces. a glimpse at Hilbert space operators», *Oper. Theory Adv. Appl., 207, Birkhäuser Verlag, Basel*, 2010, 341–349.

[24] C. J. Read, «A solution to the invariant subspace problem», *Bull. London Math. Soc.*, vol. 16, 1984, 337–401.

[25] ———, «A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ^1», *Bull. London Math. Soc.*, vol. 17, 1985, 305–317.

[26] ———, «The invariant subspace problem on a class of Banach spaces, 2: hyperbolic operators», *Israel J. Math.*, vol. 63, 1988, 1–40.

[27] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3.ª ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[28] ———, *Functional analysis*, 2.ª ed., International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[29] B. S. Yadav, «The invariant subspace problem», *Nieuw Arch. Wiskd.*, vol. (5) 6, núm. 2, 2005, 148–152.

[30] ———, «The present state and heritages of the invariant subspace problem», *Milan J. Math.*, vol. 73, 2005, 289–316.