UN TRATAMIENTO GEOMETRICO DE LA INDUCCION MATEMATICA: PRUEBAS QUE EXPLICAN

Alfinio Flores Peñafiel
Curriculum and Instruction,
Arizona State University.

RESUMEN.

Representaciones geométricas, de las llamadas "pruebas sin palabras" se utilizan para probar fórmulas numéricas utilizando inducción matemática. Estas pruebas explican las fórmulas y permiten ganar una mejor comprensión del proceso de inducción matemática.

PRUEBAS QUE EXPLICAN

Proof, in its best instances increases understanding by revealing the heart of the matter.
Davis & Hersch, The mathematical experience, p. 151

El concepto de una prueba no sólo como una verificación formal de un resultado, sino como un argumento convincente, como un medio de comunicación, ha adquirido mayor importancia últimamente entre los que se preocupan por la educación matemática. Hanna (1990) sugiere que siempre que sea posible, demos a nuestros alumnos pruebas que expliquen en vez de pruebas que sólo prueben. Tanto las pruebas que prueban como las pruebas que explican son pruebas válidas. Una prueba que explica, además, "debe proporcionar una justificación basada en las ideas matemáticas involucradas, las propiedades matemáticas que hacen que el teorema afirmado sea cierto" (Hanna, 1990, p.9).

LA INDUCCION MATEMATICA Y LAS PRUEBAS SIN PALABRAS

Muchas veces la inducción matemática es percibida por los alumnos como un método que prueba una fórmula numérica, pero que no les permite ver las razones esenciales por las cuáles la fórmula es válida. Por ejemplo, los alumnos pueden demostrar por inducción que

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ pero no pueden evitar la sensación de que la fórmula aparece como "sacada de la manga". En este artículo se presentan algunos ejemplos que permiten a los alumnos ver por qué las fórmulas son ciertas. Al mismo tiempo, los ejemplos ilustran los dos aspectos de una prueba por inducción matemática: el paso inicial, y el paso inductivo. Las pruebas por inducción matemática pueden ser también pruebas que explican.

La figura la muestra que la suma de los primeros 4 números impares es un cuadrado de lado 4. Es fácil ver cómo extender el cuadrado para formar un nuevo cuadrado al añadir el siguiente número non (fig. 1b). Esto sugiere que se puede generalizar: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

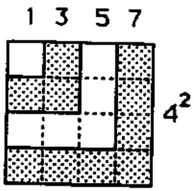

Figura la

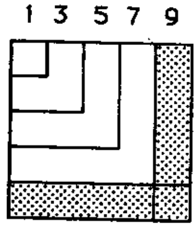

Figura 1b

De igual modo, algunas "pruebas sin palabras" (por ejemplo Cupillari, 1989; Nelsen, 1990; Zerger, 1990), también llamadas "pruebas por vistazo" (Wells, 1991), sugieren la validez de fórmulas numéricas. Estos diagramas explican las fórmulas, le permiten al alumno comprender cómo se pueden obtener. Algunas personas podrían objetar que tales diagramas no constituyen una prueba, ya que están dibujados sólo para un número particular. Sin embargo, una característica esencial de tales diagramas es que sugieren cómo obtener el diagrama para el caso $n + 1$, a partir del diagrama para el caso n. Tales diagramas pueden ser usados para que los alumnos hagan demostraciones por inducción matemática, de modo tal que la prueba no sólo demuestre sino que también explique. He utilizado estos ejemplos en un curso de solución de problemas y demostraciones, que es un curso de transición entre los cursos de cálculo y los cursos más formales de matemáticas avanzadas (álgebra moderna y análisis). A los alumnos les gustó el enfoque diferente a la inducción matemática. Varios alumnos que obtenían algebraicamente la fórmula para el caso $k + 1$, manipulado casi mecánicamente la fórmula para el caso k, tuvieron que pensar a fondo el significado del paso inductivo en este contexto. Alumnos que estaban acostumbrados a pensar sólo en términos de símbolos desarrollaron habilidad para pensar en fórmulas en términos geométricos, aunque fue difícil para algunos al principio. En general los alumnos fueron capaces de usar los diagramas para probar las fórmulas por inducción matemática, y resolver los ejemplos que se dan a continuación, mostrando una mejor comprensión del proceso.

EJEMPLO.

1) La suma de los números impares $1+3+5+\cdots+(2n-1)$

La figura la muestra que $1+3+5+7=4^2$. Podemos extender el cuadrado añadiendo 9 (el siguiente número impar) cuadritos para formar un cuadrado de lado 5 (ver fig. 1b). Sin embargo para probar que $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ es válida para cualquier número no bastan unos cuantos ejemplos. Sin embargo, suponiendo que tenemos un diagrama para el caso n, es decir que la suma de los primeros n números impares forman un cuadrado de lado n, podemos mostrar que se puede añadir el siguiente número impar $(2n+1)$, representado como dos rectángulos de área n y un cuadrado unitario, para formar un nuevo cuadrado de lado $n+1$.

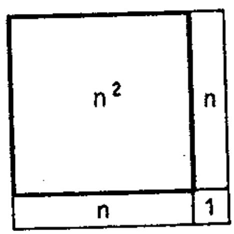

Figura 2

La figura la muestra que la fórmula es válida para un valor inicial, la figura 2 muestra el paso inductivo, es decir, que podemos obtener el resultado para el caso para $n+1$ suponiendo el resultado para el caso n. Así, por el principio de inducción matemática, la fórmula vale para todos los números naturales.

2) Suma de los cubos de los primeros números naturales $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

El triángulo de la figura 3 tiene base (4×5) y altura $(1+2+3+4)$. Su área, por otra parte es igual a $1\times 1^2+2\times 2^2+3\times 3^2+4\times 4^2=(1^3+2^3+3^3+4^3)$. Por tanto

$$(1^3+2^3+3^3+4^3)=(4\times 5)\times(1+2+3+4)/2.$$

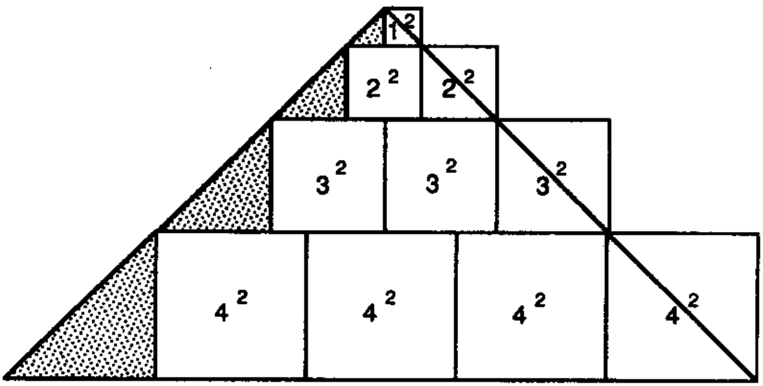

Figura 3

Para demostrar que en general

$$(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=n(n+1)\times(1+2+3+\cdots+n)$$

necesitamos probar el resultado para $n+1$ suponiendo el resultado para n.

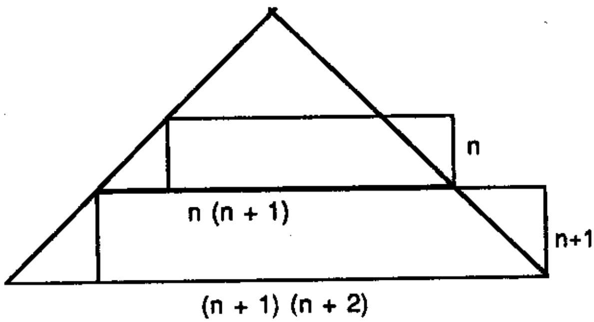

Figura 4

Para el caso n, la base del triángulo es $n(n+1)$ y su altura $(1+2+3+\cdots+n)$. Al añadir $(n+1)^3$ en la forma de una tira de $(n+1)$ cuadrados de área $(n+1)^2$, cortando un cuadrado por la diagonal y reacomodando una de las piezas se extiende el triángulo a uno de base $(n+2)(n+1)$ y de altura $(1+2+\cdots+n+(n+1))$ que es lo que queríamos probar.

3) $(1\times 2)+(2\times 3)+(3\times 4)+\cdots+(n-1)n=(n-1)n(n+1)/3$

El siguiente diagrama (Wu,1989) muestra el paso inicial y el paso inductivo en la demostración del teorema enunciado.

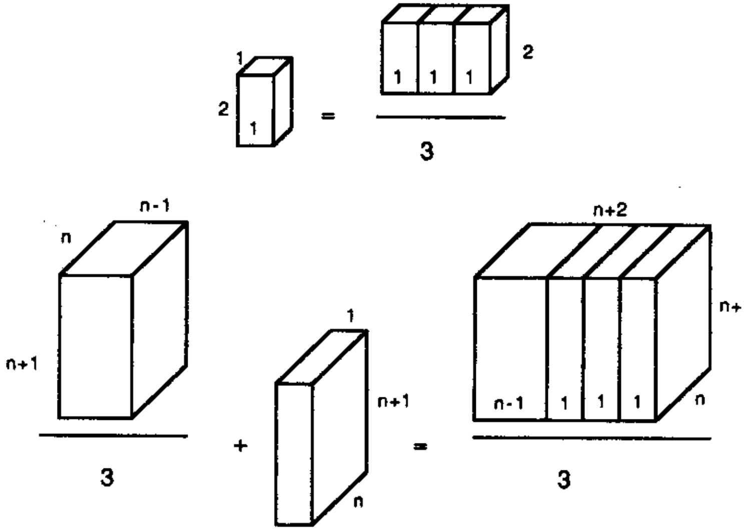

Figura 5

EJERCICIOS.

1) La suma de los primeros números naturales $1+2+3+4+\cdots+n$. El rectángulo de la figura 6 por un lado tiene un área de 4×5, y por otro lado $2(1+2+3+4)$, De aquí se sugiere que en general $1+2+3+4+\cdots+n = n(n+1)/2$. Supón que tienes un diagrama para el caso n de esta fórmula, muestra cómo se puede extender al caso $n+1$.

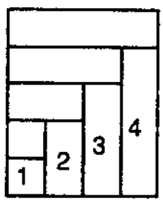

Figura 6

2) Sumas de números triangulares. Sea $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. El siguiente diagrama (Zerger, 1990) sugiere que $3(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = (n+2)(1+2+\cdots+n)$. Supón que tienes un diagrama similar para n. Muestra que puedes extender tal diagrama para el caso $(n+1)$.

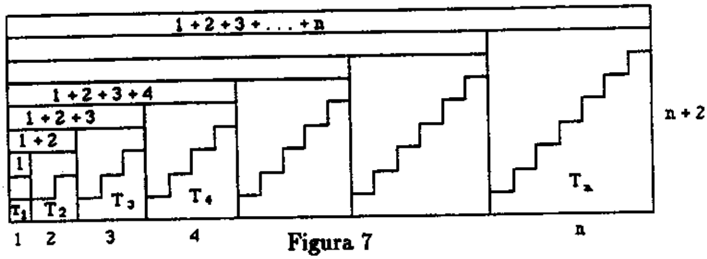

Figura 7

3) La suma de los cuadrados de los primeros n números naturales. El siguiente diagrama, utilizado por Ibn-al-Haitham (Alhazen) hace casi mil años (Baron, 1969), sugiere un método para calcular $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. Supón que tienes un diagrama para el caso n. Muestra cómo puedes extender el diagrama al caso $n+1$. (Este método geométrico fue también utilizado por Ibn-al-Haitham para obtener también las sumas $\sum n^3$ y $\sum n^4$ y se puede extender para otras potencias de números naturales).

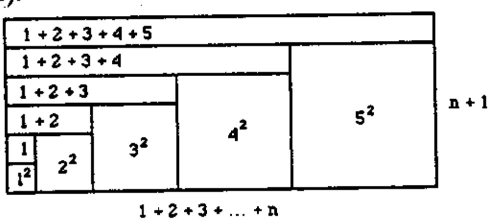

Figura 8

4) Números triangulares. La figura 9 (Wells, 1991) sugiere que $8T_n + 1 = (2n+1)^2$. Supón que tienes un diagrama correspondiente a n. Muestra que puedes extender el diagrama a $(n+1)$.

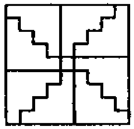

Figura 9

5) Sumas de cubos otra vez.

a) La figura 10 (Wells, 1991) muestra un cuadrado grande, de lados (1+2+3+4+5) compuesto por un cuadrado de 1×1, dos cuadrados de 2×2, tres cuadrados 3×3, etc. El área del cuadrado total es por tanto $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$.

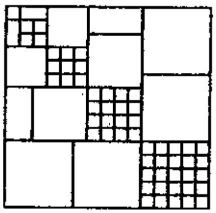

Figura 10

Muestra que si tienes un cuadrado de lados $(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$ formado por cuadrados como en la figura 10, pero que el último conjunto tiene n cuadrados de área n^2, entonces se puede extender a otro cuadrado de lado $(1 + 2 + \cdots + (n + 1))$ sumando $(n + 1)$ cuadrados de área $(n + 1)^2$. Ilustra para el caso n par y n impar. (Sugerencia: para acomodar los $n + 1$ cuadrados de lados $(n + 1)$ de modo que formen un cuadrado, necesitas que $(n + 1) \times n/2 = (n - 1)/2 \times n + n$.)

b) La figura 11 (Schrange, 1992) sugiere que la suma $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ es igual al área del triángulo de base $(n+1)n$ y altura $n(n+1)/2$.

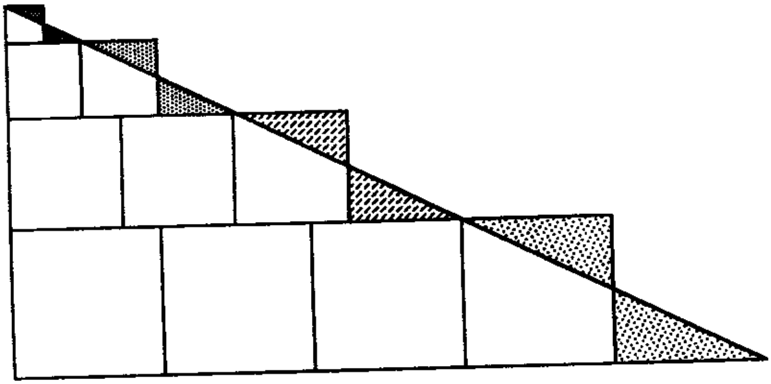

Figura 11

Demuestra que el triángulo correspondiente al caso n se puede extender a un triángulo para el caso $n+1$ añadiendo una tira de $n+1$ cuadrados de área $(n+1)^2$, transformándola en un trapecio de base mayor $(n+2)(n+1)$ y base menor $n(n+1)$. Demuestra que el ángulo agudo de la base del trapecio es siempre igual, sin importar el valor de n.

c) Demuestra utilizando la idea de la figura 12 (Cupillari, 1989), que

$$4(1+2+3+\cdots+n) = (n^2+n)^2$$

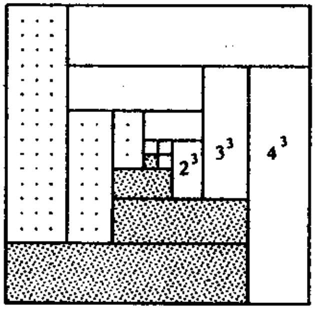

Figura 12

7) **La suma de números triángulares es la suma de cuadrados. Esto es, si**

$$\begin{aligned} T_k &= 1+2+3+\cdots+k, \quad \text{entonces} \\ T_1+T_2+T_3+\cdots+T_{2n-1} &= 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 \\ T_1+T_2+T_3+\cdots+T_{2n} &= 2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2 \end{aligned}$$

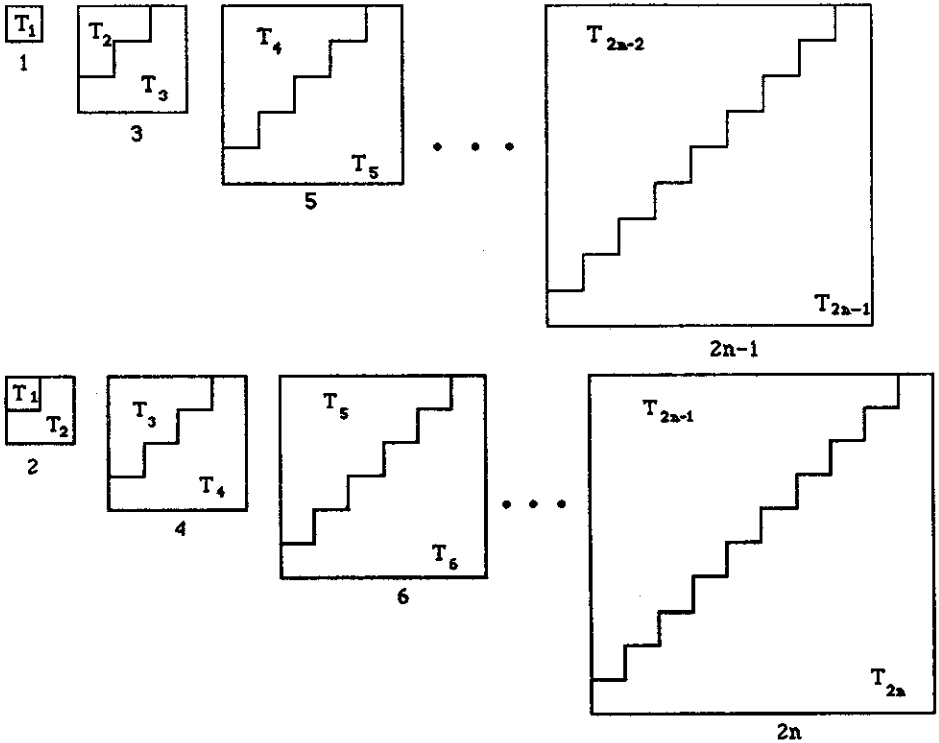

Figura 13

Bibliografía

[1] Baron, M.E. *The origins of the infinitesimal calculus.* Oxford: Pergamon (1969).

[2] Cupillari, A. *Proof without words:* $1 + 2 + 3 + . \cdots + n = [n(n + 1)]/4$. Mathematics Magazine, 62, 259 (1989).

[3] Davis, P.J. & Hersch, R. *The mathematical experience.* Boston: Birkhauser (1980).

[4] Flores, A. (En prensa). A geometrical approach to mathematical induction: Proofs that explain.

[5] PRIMUS: Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies.

[6] Hanna. G. *Some pedagogical aspects of proof.* Interchange, 21(1), 6–13 (1990).

[7] Nelsen, R.B. *Proof without words corollary: Sums of squares.* Mathematics Magazine, 63 , 314–315 (1990).

[8] Schrage, G. *Proof without words* $1 + 2 + 3 + \cdots + n = [n(n + 1)/2]$. Mathematics Magazine, 65, 185 (1992)..

[9] Wells, D. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry.* Harmondsworth: Penguin (1991)..

[10] Wu, T.C. *Proof without words:* $(1\times2)+(2\times3)+(3\times4)+\cdots+(n-1)n = (n-1)n(n+1)/3$. Mathematics Magazine, 62, 27 (1989)..

[11] Zerger, M.J. *Proof without words: Sums of Triangular Numbers.* Mathematics Magazine, 63, 314 (1990).