MISCELÁNEA MATEMÁTICA 25 (1997) 75–90 SMM

El trabajo de Weierstrass y la propagación de ondas

Antonmaría Minzoni

FENOMEC-IIMAS, UNAM

Resumen

En esta nota se presenta un aspecto del trabajo de Weierstrass relacionado con la propagación de ondas. Se muestra siguiendo de cerca el trabajo original, como la función $\mathcal{P}$ describe ondas largas no lineales propagándose en agua poco profunda.

Se explica como se usa la función $\mathcal{P}$ para construir explícitamente soluciones que son ondas moduladas. Se discute muy brevemente la aplicación de estas soluciones a problemas fuertemente no lineales que escapan a métodos de análisis tradicional.

1 Introducción.

Una de las contribuciones de Weierstrass al análisis es introducir la idea de que el comportamiento local y la analiticidad determinan por completo el comportamiento global de las funciones. En este proceso proporciona formas explicitas para determinar funciones analíticas en base a sus propiedades cualitativas. Es decir, posición de sus ceros, polos, comportamiento al infinito. Este punto de vista permite clasificar todas las funciones analíticas doblemente periódicas y poder representar a todas ellas en términos de una de ellas y su derivada. Esta situación tiene la gran ventaja de poder clasificar de manera simple a todas las soluciones de una amplia clase de ecuaciones diferenciales no lineales que aparecen en problemas de propagación de ondas y oscilaciones no lineales. Esta clasificación se hace en términos de las raíces de una ecuación algebraica y es la que se adapta de manera natural a la que se obtiene cualitativamente en el análisis del plano fase.

En esta nota ilustraremos esta situación usando la ecuación de Korteweg de Vries, que describe la propagación de ondas largas en agua poco profunda. Veremos como la función $\mathcal{P}$ de Weierstrass clasifica de manera completa todo el comportamiento posible de las diferentes ondas que pueden propagarse en agua poco profunda. También se describe cómo la parametrización en términos de la función $\mathcal{P}$ se utiliza para construir soluciones tipo onda modulada. Finalmente se presentan resultados obtenidos con estas ideas que explican comportamientos no lineales inesperados.

En recuerdo al Maestro de la Variable Compleja en esta nota se trató de seguir de cerca la formulación original y la manera de calcular de la época (que de hecho es la misma que se usa hoy en día). También al discutir ondas moduladas lo hacemos directamente a partir de la función $\mathcal{P}$ y no de las funciones de Jacobi o de las funciones Theta, que es la manera moderna de calcular.

Esta presentación, hasta donde el autor conoce, es novedosa. Ilustra como los diferentes resultados de representación de funciones obtenidas por Weierstrass y Mittag Leffler se unifican para aportar, en forma explícita y directa, información cualitativa y cuantitativa fundamental en un problema importante de propagación de ondas no lineales.

2 La teoría cualitativa de las funciones analíticas.

Esta teoría se inicia al formularse la descomposición de funciones racionales en fracciones parciales. Se demuestra que ella queda determinada univocamente en términos sus polos, ceros y comportamientos al infinito. Es Weierstrass el que establece en forma completa los resultados de construcción de funciones analíticas arbitrarias en términos de sus singularidades (finitas o infinitas) y su comportamiento al infinito.

Este análisis nos dice que la función meromorfa más general con polos en los puntos $b_n, n = 1, 2, ...,$ y cuya parte singular es de la forma $\mathcal{P}_n((z - b_n)^{-1})$ donde $\mathcal{P}_n$ es un polinomio sin término constante tiene la forma:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\{P_n\left(\frac{1}{z - b_n}\right) - p_n(z)\} + g(z) \qquad (1)$$

donce $p_n(z)$ son polinomios (que se escogen para que la serie converga) y $g(z)$ una función analítica en todo el plano. En otras palabras que conociendo el comportamiento local de la función es posible determinar el comportamiento global de la misma. Desde este punto de vista es posible deducir las propiedades de

$$f(z) = \sum_{m=-\alpha}^{\infty} \frac{1}{(z - m\pi)^2} = \frac{1}{sin^2 z}$$

directamente en la serie, así como también la ecuación diferencial que ella satisface. Es de esta forma que Weierstrass introuce las funciones doblemente periódicas. La presentación que aquí doy de esta tomada de Withakker y Watson que a su vez la tomaron de las notas de clase del propio Weierstrass. Una función doblemente periódica, con períodos $2w_1, 2w_2$ que son números complejos independientes satisface:

$$f(z + 2w_1) = f(z), \quad f(z + 2w_2) = f(z).$$

En el plano z la f queda completamente determinada por sus valores en el paralelogramo, cuyos vértices son $0, 2w, 2w_1 + 2w_2, 2w_2$. De la periodicidad y analiticidad se sigue de inmediato que, si una función elíptica no tiene polos en un paralelogramo fundamental, entonces es constante. También la suma de los residuos en los polos (que siempre son un número finito en el paralelogramo fundamental) es cero debido a la doble periodicidad.

Finalmente, [esto requiere una prueba más elaborada], cualquier función elíptica puede expresarse en términos de funciones elípticas que tienen o bien polos dobles o bien polos simples con residuos de signo opuesto. La función $\mathcal{P}(z)$ introducida por Weierstrass tiene polos dobles. Las funciones de Jacobi tienen polos simples. Una ventaja matemática de la formulación de Weierstrass que ahora describiremos es que cualquier función elíptica se puede representar en forma racional en términos de $\mathcal{P}(z)$ y $\mathcal{P}'(z)$.

Otra ventaja para las aplicaciones de la formulación de Weierstrass es la posibilidad de parametrizar de manera simple soluciones periódicas a ecuaciones diferenciales ordinarias en términos de las raices de una cúbica. Es esta ventaja y sus implicaciones en la teoría de propagación de ondas la que se describe en la segunda parte de este trabajo.

Para introducir la función $\mathcal{P}(z)$ se pueden fijar los polos dobles en los vértices del paralelogramo, para que la función resulte doblemente periódica. El candidato es pues:

$$f(z) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - 2mw_1 - 2nw_2)^2} \tag{2}$$

que tiene los polos en $z = 0, z = 2mw_1 + 2nw_2$. Sin embargo esta serie no converge. Este es el mismo problema que se encuentra en el caso trigonométrico. Se resuelve restando el término constante que no altera la periodicidad. La función de Weierstrass se define como

$$\begin{aligned} P(z, 2w_1, 2w_2) &= \frac{1}{z^2} + \\ &+ \sum_{m,n=-\infty}^{\infty\prime} \left\{ \frac{1}{(z - 2mw_1 - 2nw_2)^2} - \frac{1}{(2mw_1 + 2nw_2)^2} \right\} \end{aligned} \tag{3}$$

donde excluye el término para el que $m = n = 0$. Con esta definición la serie converge y las propiedades de doble periodicidad son evidentes al rearreglar la serie. La analiticidad también es evidente por la convergencia uniforme de la serie lejos de los polos. La función $\mathcal{P}$ es par.

Es fácil obtener una ecuación diferencial para $\mathcal{P}(z)$. Considérese $\mathcal{P}(z) - \frac{1}{z^2}$ y desarróllese en serie de Taylor alrededor de $z = 0$. Se obtiene:

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{20} g_2 z^2 + \frac{1}{28} g_3 z^4 + 0(z^6)$$

donde:

$$g_2 = 60 \sum_{m,n=-\infty}^{\infty\prime} \frac{1}{(2mw_1 + 2nw_2)^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{m,n=\infty}^{\infty\prime} \frac{1}{(2mw_1 + 2nw_2)^6}$$

Por otra parte

$$\mathcal{P}'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{1}{10} g_2 z + \frac{1}{7} g_3 z^3 + 0(z^5)$$

Es claro que $(P'(z))^2$ y $4\mathcal{P}^3(z)$ tienen la misma singularidad en $z = 0$, de donde se obtiene

$$\mathcal{P}'^2(z) - 4P^3(z) = -g_2 z^{-2} - g_3 + 0(z^2).$$

Por otra parte la singularidad z^{-2} se reemplaza por $\mathcal{P}(z)$ obteniendo $h(z) = \mathcal{P}'^2 - 4\mathcal{P}^3(z) + g_2\mathcal{P}(z) + g_3 = 0(z^2)$. De aqui se concluye que

$h(z)$ es regular en $z = 0$. Como es doblemente periódica sus únicas singularidades están en los vertices del paralelogramo. Como éstos vértices son translación del origen por periodos $(2w_1, 2w_2)$ es claro que $h(z)$ es regular en esos puntos por serlo en $z = 0$. Luego $h(z)$ esta acotada y como es doblemente periódica lo está en todo el plano. Se sigue que $h(z) =$ constante. La constante es cero ya que $h(0) = 0$. De aquí se sigue que $\mathcal{P}(z)$ es solución de la ecuación

$$\mathcal{P}'^2(z) = 4\mathcal{P}^3(z) - g_2\mathcal{P}(z) - g_3. = C(\mathcal{P}) \qquad (4)$$

Desde luego la solución general es $\mathcal{P}(z + \alpha)$ donde α se determina usando las condiciones iniciales.

Si las raíces de la cúbica $C(p)$ se denotan por $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'^2(z) &= 4(\mathcal{P} - \tilde{e}_1)(\mathcal{P} - \tilde{e}_2)(\mathcal{P} - \tilde{e}_3) \qquad \text{donde} \\ g_3 &= 4\tilde{e}_1\tilde{e}_2\tilde{e}_3, g_2, 4(\tilde{e}_1\tilde{e}_2 + \tilde{e}_2\tilde{e}_3 + \tilde{e}_1\tilde{e}_3) = g_2 \\ 0 &= \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 \end{aligned}$$

Resumiendo se tiene que dados dos períodos $2w_1, 2w_2$ es posible construir una función doblemente periódica que satisface una ecuación diferencial con parametros $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ función de los periodos. El recíproco también es cierto. Es decir dados $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ diferentes se puede construir los periodos y la correspondiente función elíptica. La prueba de este resultado es de existencia y el lector interesado puede consultar [2]. Una vez establecida la existencia, el cálculo de los periodos se hace en términos de integrales elípticas tal como se ilustrará en la siguiente sección.

La ecuación para $\mathcal{P}$ es análoga a la que satisfacen dos funciones trigonométricas excepto que la cuadrática que define a la función trigonométrica ahora se reemplaza por la cúbica. Por la misma razón es de esperarse que $\mathcal{P}(w_1), \mathcal{P}(w_2)$ y $\mathcal{P}(w_3), w_3 = (-w_1 - w_2)$, estén relacionados con las raices de la cúbica. Para esto basta observar que

$$\mathcal{P}'(w_i) = -\mathcal{P}'(-w_i) = -\mathcal{P}'(2w_i - w_i) = -\mathcal{P}'(w_i)$$

de donde $\mathcal{P}'(w_i) = 0$. De aqui se sigue que $\mathcal{P}(w_i)$ es raíz de la cúbica, que define a $\mathcal{P}$.

En conclusión, pueden construirse funciones doblemente periódicas que tienen un comportamiento análogo a las funciones trigonométricas.

De esta forma, al igual que las funciones trigonométricas, describen oscilaciones, en este caso no lineales como se explica en la siguiente sección.

3 Propagación de ondas largas en agua poco profunda.

Al estudiar ondas largas en agua poco profunda Korteweg y de Vries obtuvieron una ecuación para la amplitud η de la onda. Esta ecuación es

$$\eta_t + c_0\eta_x + c_0\frac{3}{2}\frac{\eta}{h_0}\eta_x + \frac{c_0}{6}h_0^2\eta_{xxx} = 0 \tag{5}$$

El parametro h_0 es la altura del nivel medio. La velocidad $c_0 = \sqrt{gh_0}$ es la apropiada para ondas lineales en agua poco profunda. Esta ecuación tiene términos dispersivos

$$\eta_t + c_0\eta_x + \frac{c_0}{6}h_0^2\eta_{xxx}$$

y un término no lineal $c_0\frac{3}{2}\frac{\eta}{h_0}\eta_x$ que viene de la conservación del momento en las ecuaciones de la mecánica de fluidos. Esta ecuación describe ondas cuando la dispersión y el término no lineal que produce el rompimiento de las olas están en equilibrio.

Resulta de interés encontrar soluciones con la forma de ondas viajeras para luego tratar de explicar, al igual que en el problema lineal, la evolución de condiciones iniciales arbitrarias en términos de estas soluciones elementales.

Se buscan pues soluciones de (5) con la forma $\eta = h_0\phi(x - Ut)$ donde U debe determinarse como parte de la solución al problema. Es importante notar que si η es solución también lo es la transformación de Galileo de η. Es decir

$$\eta(x - U't) + m \qquad \text{con} \qquad U' = U + \frac{3}{2}\frac{c_0 m}{h_0}$$

también es solución. Con el cambio de variables se tiene que ϕ satisface la ecuación ordinaria

$$\frac{1}{6}h_0^2\phi''' + \frac{3}{2}\phi\phi' - \left(\frac{U_0}{C_0} - 1\right)\phi' = 0$$

donde ϕ' denota la derivada con respecto a $\xi = x - Ut$. Integrándo la ecuación se obtiene:

$$\frac{1}{3}h_0^2\phi'^2 = -\phi^3 + 2\left(\frac{U}{c_0} - 1\right)\phi^2 + 4G\phi + H = Q(\phi)$$

donde G y H son constantes de integración. Dado que ϕ puede reemplazarse por $\phi + m$ podemos escoger $H = 0$ quedando una de las raices de la cúbica $Q(\phi)$ igual a cero. Para obtener soluciones ϕ que sean periódicas las raices de la cúbica tienen que ser reales. Tomemos las raices $\alpha > 0$ y $\alpha - \beta < 0$. Tenemos asi que

$$\frac{1}{3}h_0^2\phi'^2 = \varphi(a - \phi)(\phi - \alpha + \beta)$$

y la solución oscila entre $0 \leq \phi \leq \alpha$. La velocidad tiene la forma

$$\frac{U}{c_0} = 1 + \frac{2\alpha - \beta}{2}$$

y sorprendentemente depende de la amplitud α de la onda. Es decir mientras mayor es la amplitud α de la onda mayor es su velocidad U. Este es un hecho que se observa al ver las olas que rompen, debido a que las más altas viajan más rápido. La onda periódiça más general se obtiene tomando

$$\phi = f + m, \frac{U}{c_0} = 1 + \frac{2\alpha - \beta}{2} + \frac{m}{h_0}\frac{3}{2}$$

donde f satisface la ecuación

$$\frac{1}{3}h_0^2 f'^2 = (f + m)(\alpha - m - f)(f - \alpha + \beta + m)$$

Esta ecuación describe a la onda periódica en términos de los tres parámetros m, α y β. Como última transformación cambiamos de variable independiente y tomando $f = -g\left(\frac{\sqrt{3}}{2h_0^2}\xi\right)$ se obtiene

$$g'^2 = 4(g - e_1)(g - e_2)(g - e_3) \tag{6}$$

donde $e_1 = m, e_2 = m - \alpha, e_3 = -\alpha + \beta - m$. La solución g oscila entre las raices e_1 y e_2.

La ecuación que satisface g es muy parecida a la que satisface $\mathcal{P}$. De hecho, haciendo el cambio de variables

$$g = h + M$$

la ecuación para h escogiendo $M = e_1 + e_2 + e_3$ es precisamente la ecuación para la función $\mathcal{P}$, es decir

$$h'^2 = 4h^3 - g_2 h - g_3 = 4(h - \tilde{e}_1)(h - \tilde{e}_2)(h - \tilde{e}_3)$$

donde las constantes positivas g_2 y g_3 están dadas por

$$g_3 = 4\tilde{e}_1\tilde{e}_2\tilde{e}_3\,, \qquad g_2 = 4(\tilde{e}_1\tilde{e}_2 + \tilde{e}_2\tilde{e}_3 + \tilde{e}_1\tilde{e}_3)\,, \quad \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 = 0$$

con $\tilde{e}_1 = e_1 - M\,,\ \ \tilde{e}_2 = e_2 - M,\ \ \tilde{e}_3 = e_3 - M$. En este caso, la solución h oscila entre las raices $\tilde{e}_1$ y $\tilde{e}_2$. Dado que la ecuación para h es satisfecha por la función $\mathcal{P}(\xi + \alpha)$ en la siguiente sección estudiaremos en detalle el comportamiento de las soluciones asi como su relación con las ondas en agua poco profunda.

4 Solución del problema en términos de la función P.

El problema es el de determinar la constante α asi como los periodos $2w_1$ y $2w_2$ de la función $\mathcal{P}$ que satisface la ecuación (6).

En primer lugar dado que $h(\xi) = \mathcal{P}(\xi + \alpha)$ tenemos que $\mathcal{P}$ oscila entre las raices $\tilde{e}_1$ y $\tilde{e}_2$. Por esto, el periodo real $2w_1$ está dado por

$$2w_1 = 2\int_{\tilde{e}_1}^{\tilde{e}_2} \frac{du}{\sqrt{4(u - \tilde{e}_1)(u - \tilde{e}_2)(u - \tilde{e}_3)}}$$

De la misma manera, si $\tilde{e}_2 \leq h \leq \tilde{e}_3$ la solución es periodica como función de la variable $i\xi$. El periodo complejo está dado por

$$2i\int_{\tilde{e}_2}^{\tilde{e}_3} \frac{du}{\sqrt{(\tilde{e}_1 - u)(u - \tilde{e}_2)(u - \tilde{e}_3)}} = 2w_2$$

Esto fija los periodos $2w_1, 2w_2$. Finalmente, si $h \geq \tilde{e}_3$ la solución va a infinito en un tiempo finito ya que

$$\int_{\tilde{e}_3}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(\tilde{e}_1 - u)(u - \tilde{e}_2)(u - \tilde{e}_3)}}$$

es convergente. Para determinar la constante α recordamos que los valores $\mathcal{P}(w_1), \mathcal{P}(w_2), P(w_3)$ donde $w_3 = -(w_2 + w_1)$ son raices de la cúbica $c(t) = 4(t - \tilde{e}_1)(t - \tilde{e}_2)(t - \tilde{e}_3) = 0$

De la forma (3) de la función $\mathcal{P}$ es facil ver que cuando $\alpha = w_1$ la función $h(z) = \mathcal{P}(z+w_1)$ tiene un polo para $z = w_1$. De aqui $\mathcal{P}(w_1) = \tilde{e}_3$ ya que sólo en este caso la función se hace infinita en un tiempo real finito w_1. Para tener una oscilación regular periodica se debe tener $\alpha = w_2$. En este caso la función $h(z) = \mathcal{P}(z+w_2)$ es regular y periódica para ξ real ya que w_2 es puramente imaginaria. Tenemos además que $h(0) = \mathcal{P}(w_2)$ puede ser bien $\tilde{e}_1$ o $\tilde{e}_2$. Esto determina explicitamente la solución periodica que oscila entre los valores $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ y que representa la onda viajera.

Estudiemos ahora la solución para la altura de la onda f en detalle. Tenemos:

$$f = -M - h = -(e_1 + e_2 + e_3) - \mathcal{P}(z + w_2, 2w_1, 2w_2)z = \frac{\sqrt{3}}{2h_0}\xi$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z + w_2) &= \frac{1}{(z + w_2)^2} + \\ &+ \sum_{mn}{}' \left\{ \frac{1}{(z + w_2 - 2mw_1 - 2nw_2)^2} - \frac{1}{(2nw_1 + 2nw_2)} \right\} \end{aligned}$$

Sabemos que esta solución depende de tres parámetros $e_1 \le e_2 \le e_3$. El promedio de la altura de la onda sobre un periodo es

$$\bar{f} = \frac{1}{2w_1}\int_0^{2w_1} f d_\xi = -(e_1 + e_2 + e_3) - \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m2w_1 + 2nw_2)^2}$$

Por otra parte, la onda oscila entre $\tilde{e}_1$ y $\tilde{e}_2$ de aqui que su amplitud máxima es $\tilde{e}_2 - \tilde{e}_1 = e_2 - e_1$. El periodo, real $2w_1$ que es la longitud de la onda depende de la amplitud ya que la integral que da el periodo w_1 depende de e_2 y e_1.

Finalmente, la velocidad de la onda depende de la altura media $\bar{f}$ y de la amplitud. Tenemos pues ondas de forma permanente cuyas características de propagación están determinadas por su amplitud. Esta situación es consecuencia de la no linealidad del problema. Esta familia de ondas describe fenómenos importantes que se han observado y que a continuación presentamos.

El primer caso es cuando la amplitud de las ondas es pequeña comparada con su longitud. Es decir el término cúbico es despreciable con respecto al cuadrático en la ecuación (6). Las raices $\tilde{e}_2$ y $\tilde{e}_1$ se acercan la una a la otra. El lector interesado puede convencerse que al buscar una solución aproximada de la forma $g = \tilde{e}_1 + (\tilde{e}_2 - \tilde{e}_1)p$ y despreciar términos de mayor orden que $(\tilde{e}_2 - \tilde{e}_1)^2$, la ecuación para p tiene una solución trigonométrica cuyo periodo resulta independiente de la amplitud pequeña $(\tilde{e}_2 - \tilde{e}_1)$.

Veremos ahora que la familia de soluciones que encontramos se reduce precisamente a las ondas lineales cuando $\tilde{e}_2 \to \tilde{e}_1$, desde luego $\tilde{e}_3$ se mueve consistentemente con la restricción $\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 = 0$.

De la expresión para los periodos vemos que cuando $\tilde{e}_2 \to \tilde{e}_1$ el periodo real

$$2w_1 = \int_{e_1}^{\tilde{e}_2} \frac{du}{\sqrt{(u-\tilde{e}_1)(u-\tilde{e}_2)(u-\tilde{e}_3)}} \to \frac{\pi}{\sqrt{e_3 - e_1}}$$

Por otra parte, el periodo complejo

$$2w_2 = i\int_{\tilde{e}_2}^{\tilde{e}_3} \frac{du}{\sqrt{(\tilde{e}_1 - u)(u-\tilde{e}_2)(u-\tilde{e}_3)}} \to -i \cdot ln(e_2 - e_1)\frac{w_1}{\pi}$$

El lector puede convencerse de esto usando una integración por partes en el término $((u - \tilde{e}_1)(u - \tilde{e}_2))^{-1/2}$ o bien usando el cálculo de residuos.

Vemos asi que los polos de $\mathcal{P}$ van a infinito. Por otra parte el periodo real se vuelve independiente de la amplitud $e_2 - e_1$. Invitamos al lector a verificar que la aproximación propuesta en la ecuación diferencial recobra el mismo resultado.

Para estudiar el comportamiento de $\mathcal{P}$ recordamos que $\mathcal{P}$ es una función periódica. Como tal puede desarrollarse en serie de Fourier, obteniéndose

$$\mathcal{P}(\xi + w_2) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\frac{\pi}{w_1}} \quad , \quad a_n = \frac{1}{2w_1}\int_0^{2w_1} \mathcal{P}(\xi + w_2) e^{-in\frac{\pi}{w_1}\xi} d\xi.$$

Para calcular a_n se completa el contorno de integración sobre el eje real al paralelogramo de periodo de $\mathcal{P}$. Los dos lados verticales no contribuyen porque la función es periódica. Por otra parte hay un residuo en $\xi = -w_2$. Las integrales sobre los lados horizontales se combinan para dar

$$\begin{aligned} a_n &= n\frac{\pi^2}{w_1^2}e^{n\pi\frac{|w_2|}{w_1}}/(1-e^{2n\pi\frac{|w_2|}{w_1}}). \quad n \geq 0 \\ a_{-n} &= \bar{a}_n = a_n. \end{aligned}$$

Observamos que como $\mathcal{P}$ es analítica, sus coeficientes de Fourier tienden a cero exponencialmente cuando $|n| \to \infty$. El valor medio, que es a_0, está dado por

$$a_0 = \frac{1}{2w_1}\int_0^{2w_1} \mathcal{P}(\xi + w_2)d\xi$$

Ahora cuando $e_2 \to e_1$ $w_1 \to \frac{\pi}{\sqrt{e_3-e_1}} = w_1^0$ mientras que $|w_2| \to \infty$. Todos los coeficientes de fourier tienden a cero exponencialmente cuando $e_2 \to e_1$. De aquí los términos de orden más bajo esta dado por a_0 y a_1, los demás son más pequeños. Podemos asi aproximar, haciendo las substituciones en la expresión para $\mathcal{P}$ de w_2 por su comportamiento dominante cuando $e_2 \to e_1$ la expresión

$$\mathcal{P}(z + w_2) = a_0^\infty + \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{(w_1^0)^2}(e_2 - e_1)cos\frac{\pi}{w_1^0}z + O(e_2 - e_1)^2$$

cuando $e_2 \to e_1$.

El valor medio a_0^∞ se calcula directamente de la expresión en serie. Tenemos

$$\lim_{w_2\to\infty} \mathcal{P}(\xi + w_2) = -\sum_{m\neq 0}{}' \frac{1}{(2mw_1)^2} = \lim_{w_2\to\infty} \mathcal{P}(w_2) = \lim_{w_2\to\infty} e_1 = e_1.$$

Esta expresión desde luego es la misma que la obtenida por el lector a partir de la ecuación diferencial aproximada. Vemos asi que la función $\mathcal{P}$ recobra la aproximación de ondas lineales cuando la amplitud es pequeña.

Examinemos el extremo opuesto, que es el de la onda de máxima amplitud posible. En este caso tenemos que $\tilde{e}_2 \to \tilde{e}_3$ donde $\tilde{e}_1$ se mueve consistentemente. En este caso el lector puede verificar que la ecuación diferencial que se aproxima por la ecuación:

$$f'^2 = 4(f - \tilde{e}_1)(f - \tilde{e}_3)^2$$

puede integrarse en términos elementales. La solución es una función hiperbólica que tiene un solo mínimo para $f = \tilde{e}_1 < 0$ y que se acerca asintoticamente cuando $|\xi| \to \infty$ al valor $\tilde{e}_3$.

Esta solución es la llamada onda solitaria. Ahora daremos la forma de esta función a partir de la función $\mathcal{P}$ e invitamos al lector a comparar este resultado con el obtenido directamente de la ecuación diferencial.

Para encontrar el límite de $\mathcal{P}$ cuando $\tilde{e}_2 \to \tilde{e}_3$ observamos que el periodo real $w_1 \to \infty$. Este desde luego es responsable del hecho que la solución deja de ser periodica y tiene por asíntota a $\tilde{e}_3$. Por otra parte, el periodo imaginario

$$2w_2 \to \frac{i\pi}{\sqrt{\tilde{e}_3 - \tilde{e}_1}} \qquad \text{cuando} \qquad \tilde{e}_2 \to \tilde{e}_3.$$

En este caso, el límite se obtiene directamente de la serie que define a $\mathcal{P}$. Los únicos términos que no son cero son aquellos que no involucran a w_1. Se tiene asi que

$$\mathcal{P}(z+w_2) = \frac{1}{(z+w_2)^2} + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(z-(2n-1)w_2)^2} - \sum_{n\neq 0}' \frac{1}{(2nw_2)^2} + 0(w_1^{-1})$$

El término independiente de z suma $\tilde{e}_3$. Este resultado se obtiene al substituir el valor de $2w_2$ en el límite $w_1 \to \infty$ y sumar la serie que resulta. Por otra parte los términos dependientes de z pueden reescribirse como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-(n+1/2)2w_2)^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4w_2^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z\frac{\pi}{2w_2} - (n+1/2)\pi)^2} = -(e_3 - e_1)sech^2(\frac{z\pi}{\sqrt{e_3 - e_1}})$$

utilizando el desarrollo, también debido a Weierstrass, de una función en términos de su comportamiento en los polos. La solución en este límite queda en la forma

$$\mathcal{P}(z+w_2) = \tilde{e}_3 - (\tilde{e}^3 - \tilde{e}^1)sech^2\left(\frac{z\pi}{\sqrt{\tilde{e}^3 - \tilde{e}_1}}\right) + 0(w_1^{-1})$$

que representa precisamente una onda solitaria.

Esto demuestra que la función $P(\xi + w_2, w_1 w_2)$ interpola, como función de $\tilde{e}_2$ entre las soluciones linelaes y las ondas solitarias. Al acercar $\tilde{e}_2$ a $\tilde{e}_1$ la amplitud disminuye y la onda viaja con un periodo independiente de la amplitud. A medida que $\tilde{e}_2$ se acerca a $\tilde{e}_3$ el periodo aumenta, depende de la amplitud y la solución se convierte en el límite en una onda solitaria.

Es conveniente interpretar esta situación en términos de los parametros originales e_1, e_2, e_3. Para ello fijemos los parametros e_1 y e_3 y pensemos a $e_1 < e_2 < e_3$ como variable. Es claro por la discusión anterior que $\tilde{e}_2 \to \tilde{e}_3$ cuando $e_2 \to e_3$, y la solución se convierte en un valor medio $-(e_1+2e_2)$ con una onda solitaria con amplitud $-\tilde{e}_1 = -(e_1-M) = 2e_3$. Por otra parte $\tilde{e}_2 \to \tilde{e}_1$ cuando $e_2 \to e_1$ y se tiene una oscilación lineal de amplitud pequeña sobre un valor medio $-(2e_1 + e_3)$.

Vemos asi que al variar el parametro e_2, la función $\mathcal{P}$ interpola las soluciones que comienzan en la onda lineal y terminan en la onda solitaria. Los parametros e_1 y e_3 que son arbitrarios fijan la amplitud de la onda solitaria y el valor medio de la onda lineal. Estos se determinan usando las condiciones iniciales del problema.

Esta propiedad de interpolación es la que hace posible utilizar esta familia de soluciones para consturir de manera analítica soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas. En la siguiente sección describiremos las ideas básicas de este procedimiento.

5 La Teoría de Modulaciones.

Puesto que la familia de soluciones dada por la función de Weierstrass $\mathcal{P}$ parametriza un amplio rango de comportamientos resulta natural [1] (y este es uno de los grandes pasos de la asintótica moderna para problemas no lineales) buscar soluciones aproximadas al problema original con la forma de ondas moduladas. Es decir, suponer que los parámetros e_1, e_2, e_3 de la solución no son constantes sino son funciones de las variables (x, t). Desde luego la propuesta ya no será solución. Sin embargo si e_1, e_2, e_3 varían lentamente con respecto a las escalas espaciales (es decir e_{it}/e_i , $e_{ix}/e_i << 1$) y temporales de la onda que definen puede buscarse una solución aproximada a la ecuación original de K d V en la forma

$$u = \sum_{i=1}^{3} e_i(x_1 t) + \mathcal{P}(z + w_2, (x,t), w_1(x,t), w_2(x,t)) + u^{(1)}$$

donde $u^{(1)}$ es pequeña; del orden de $(e_{ix}, e_{it}/e_i)$. Al substituir en la ecuación se obtiene, a primer orden, una ecuación no homogénea para $u^{(1)}$. Para que su solución $u^{(1)}$ resulte efectivamente pequeña el término no homogéneo debe satisfacer condiciones de compatibilidad (determinadas por la alternativa de Fredholm). Estas condiciones son ecuaciones parciales que satisfacen los parámetros e_1, e_2, e_3 y se llaman las ecuaciones de modulación, ya que al variar los parametros estos modulan la forma de la onda. De hecho Whitham [3] encontró originalmente las ecuaciones en términos de los parametros de las funciones de Jacobi, luego utilizó las raices de la cúbica para simplificarlos. Posteriormente se uso la teoría de Superficies de Riemann para obtener el resultado para fases múltiples. Es el hecho de que el comportamiento de la función $\mathcal{P}$ está parametrizado por sus raices lo que permite obtener una expresión sencilla praa estas ecuaciones como:

$$e_{it} + C_i(e_1, e_2, e_e)e_{ix} = 0 \qquad i = 1, 2, 3.$$

donde las funciones reales C_i están expresadas en términos de los periodos $2w_1$ y $2w_2$. Este resultado es sorprendente e inesperado. En primer lugar las ecuaciones son hiperbolicas. Esto nos dice que cambios en los parametros de la función $\mathcal{P}$ se propagan con velocidad finita. También esto nos dice que las modulaciones son estables ya que si son pequeñas permenecen pequeñas. Finalmente las ecuaciones para e_i estan casi desacopladas. A pesar de ser no lineales admiten soluciones relativamente simples en casos de gran interes que ahora describimos.

El primer ejemplo es la solución a la ecuación de KdV [1]

$$\begin{aligned} u_t + 6uu_x + u_{xxx} &= 0 \\ u(x,0) &= \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

En este caso existe una solución de onda modulada con parametros e_1, e_3 constantes y e_2, con $e_1 \leq e_2 \leq e_3$, que satisface

$$e_{2t} + C_2(e_1, e_2, e_3)e_{2x} = 0$$

La solución esta dada implicitamente por

$$C_2(e_1, e_2, e_3) = \frac{x}{t}$$

Se obtiene que cuando $\frac{x}{t} = u_1 > 0, e_2 \to e_3$ y cuando $\frac{x}{t} = u_2 < 0$, $e_2 \to e_1$. Es decir que la discontinuidad se resuelve en una onda modulada con un soliton de amplitud máxima al frente que viaja hacia $x > 0$, seguido por solitones de menor amplitud. Se genera también sobre la característica $x = u_2 t$ un tren de ondas lineales que se propaga en la región $x < 0$; viajando hacia la izquierda.

Estas ideas también han explicado la influencia de poca dispersión en la formación de ondas de choque. El problema es el de estudiar la ecuación de KdV

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \epsilon u_{xxx} &= 0 \\ u(x,a) &= \frac{\pi}{2} - arctan\, \lambda x \end{aligned}$$

Cuando $\epsilon = 0$ la condición inicial desarrolla una singularidad en u_x en tiempo finito. Esta se resuelve en una onda de choque cuando $\epsilon = 0$. Sin embargo cuando $\epsilon > 0$ a medida que u_x se hace cada vez más grande el término ϵu_{xxx} se vuelve importante. Gurievich y Pitaevskii [1] mostraron, usando nuevamente una solución de las ecuaciones de modulación que la onda de choque que seria la solución de (7) para $\epsilon = 0$ se resuelve en un tren de solitones y oscilaciones.

Este mecanismo explica también la evolución de inestabilidades numéricas que general los esquemas de diferencias finitas que calculan ondas de choque. (Esta inestabilidad se debe a que el error de truncamente introducido por la discretización de la derivada se manifiesta como el efecto de un pequeño término dispersivo. Este a su vez introduce oscilaciones en forma de solitones.

Durante los últimos 10 años estas ideas se han extendido a soluciones multiplemente periódicas utilizando las generalizaciones a la función de Weierstrass a varias o infinitas variables complejas [1]. Actualmente la combinación de ideas de geometria algebraica, que extienden los trabajos de Weierstrass y de asintotica estan abriendo la posibilidad de entender múltiples mecanismos de propagación e interacción de ondas no lineales.

Referencias

[1] S. Novikov, S.V. Manakov, L.P. Pitaevskii, V.E. Zakharov. *Theory*

of Solitons, Plenum 1984.

[2] G.R. Whitham. *Lineal and Nonlinear waves*, John Wiley 1974.

[3] Witthaker, G. Watson, N.G. *A course in Modern Analysis*, Cambridge University Press. 1965.