LA DIFERENCIABILIDAD TÉRMINO A TÉRMINO DE UNA SERIE DE POTENCIAS

Sergio E. Zarantonello de Baños*

En una exposición introductoria del Análisis Complejo es fundamental presentar, inmediatamente después de introducida la definición de derivada compleja, una máxima variedad de ejemplos de funciones analíticas. Una manera efectiva de lograr este propósito es demostrando que una serie de potencias puede diferenciarse término a término. La demostración usual ([1, Th.2, p.39] , [5, pp. 67-68] , [6, Th.10.6, p.215]), si bien elemental, es de carácter mas bien técnico y esencialmente distinta del método que generalmente se sigue para tratar el caso de una variable real [3, p.396] , basado en el Teorema Fundamental del Cálculo Integral Un enfoque diferente ([2, Th.2, p.159] , [4, Th.5, p.77]) consiste en tomar el Teorema de Morera como punto de partida, de donde resulta la diferenciabilidad de una serie de potencias consecuencia inmediata pero demasiada tardía para ser de máxima utilidad. El propósito de este artículo es demostrar en forma elemental y libre de dificultades técnicas, que una serie de potencias puede diferenciarse término a término.

* Departamento de Matemáticas
University of Florida
Gainesville, Florida 32611
Estados Unidos

Un mínimo de integración, que desarrollamos en el texto, es esencial; esta, sin embargo, puede inferirse del caso real y es de un carácter muy elemental. Respecto al lector supondremos una familiaridad con el concepto de convergencia uniforme y con los resultados básicos respecto al disco y radio de convergencia de una serie de potencias.

En lo que sigue, representamos mediante $[a,b]$ al segmento lineal limitado por los puntos a, b del plano complejo. Si f es una función contínua de valores complejos definida en $[a,b]$, indicamos a la integral definida $(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)t]dt$ con el símbolo $\int_a^b f(z)dz$. Supongamos ahora que Ω es un dominio del plano complejo, $[a,b]$ un segmento lineal contenido en Ω, y f una función contínua de valores complejos, con antiderivada F en Ω, i.e. $\frac{d}{dz}F(z) = f(z)$ para todo z en Ω. Siendo $\frac{d}{dt}F[a+(b-a)t] = (b-a)f[a+(b-a)t]$, resulta $\int_a^b f(z)dz = F(b)-F(a)$

La fórmula de Hadamard para el radio de convergencia de una serie de potencias establece que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_o)^{n-1}$ tienen el mismo disco de convergencia $D(z_o;R)$, con modificaciones obvias para los casos $R=0$ y $R=\infty$; por consiguiente, las sumas de ambas series son funciones continuas en $D(z_o;R)$.

<u>Teorema</u>. <u>Si</u> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ <u>converge</u> <u>en</u> $D = D(z_o;R)$ <u>con</u> <u>suma</u> $S(z)$, <u>entonces</u> $\frac{d}{dz}S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_o)^{n-1}$ <u>para</u> <u>todo</u> z <u>en</u> D.

<u>Demostración</u>. Indiquemos mediante $T(z)$ a la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_o)^{n-1}$

Para cada N = 1,2, escribamos $T_N(z) = \sum_{n=1}^{N} na_n(z-z_o)^{n-1}$ y $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_o)^n$.

Fijemos $z\in D$ y $D'\subset D$, tal que D' es compacto y contiene a z en su interior, y tomemos un número complejo Δz tal que $z+\Delta z\in D$. Debido a que $\frac{d}{dz} S_N(z) = T_N(z)$, y que T_N tiende a T uniformemente en subconjuntos compactos de D, podemos escribir

$$\frac{S(z+\Delta z) - S(z)}{\Delta z} = \lim_{N\to\infty} \frac{S_N(z+\Delta z) - S_N(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\lim_{N\to\infty} \int_z^{z+\Delta z} T_N(\zeta)d\zeta = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+z\Delta z} T(\zeta)d\zeta.$$

Por consiguiente

$$\left|\frac{S(z+\Delta z) - S(z)}{\Delta z} - T(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}[T(\zeta)-T(z)]\, d\zeta\right| \leqslant \max_{\zeta\varepsilon[z,z+\Delta z]}|T(\zeta)-T(z)|.$$

La continuidad uniforme de T en D' implica

$\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{S(z+\Delta z)-S(z)}{\Delta z} - T(z)\right| = 0$, completando la demostración.

BIBLIOGRAFIA

1. Ahlfors, L. V. - Complex Analysis. 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
2 Churchill, R. V., Brown, J W., Verhey, R. F - Complex Variables and Applications. 3d ed., McGraw-Hill Book Company,

New York, 1974.

3. Courant, R. - Differential and Integral Calculus. Volume I, 2d ed., Interscience Publishers, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1964.
4. Knopp, K. - Theory of Functions. Dover Publications, Inc., New York, 1945.
5. Nehari, Z. - Conformal Mapping. McGraw-Hill Book Company, New York, 1952.
6. Rudin, W. - Real and Complex Analysis. 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.