

Curvando el espacio

Ernesto Pérez Chavela

Departamento de Matemáticas

ITAM (Instituto Tecnológico Autónomo de México)

Río Hondo 1, Col. Progreso Tizapán,

Ciudad de México, 01080, México

ernesto.perez@itam.mx

1. Empecemos

En este breve escrito mostraremos que, cuando curvamos el plano o el espacio y estudiamos dinámica de partículas sobre estas superficies, entonces de *manera natural* surgen las geometrías no euclidianas. Para ejemplificar estos conceptos, vamos a recurrir a un problema clásico de la mecánica celeste, *el problema de los tres cuerpos* y para facilitar el análisis nos vamos a restringir al plano euclideo. En aras de precisar los conceptos que vamos a estudiar y mostrar lo que entendemos por *curvar el espacio*, empezaremos recordando los cinco postulados de Euclides:

- I) Por cualesquiera dos puntos podemos construir un segmento de recta que los une.
- II) Un segmento de recta se puede extender indefinidamente sobre una línea recta.
- III) Dado un punto y un radio cualquiera podemos trazar un círculo centrado en ese punto y de ese radio.
- IV) Todos los ángulos rectos son iguales.
- V) Dada una recta y un punto fuera de ella podemos trazar una única recta que pase por ese punto y sea paralela a la primera.

La geometría basada en estos cinco postulados, llamada euclidea, es la geometría con la que todos nosotros estamos familiarizados desde pequeños. Con esta geometría podemos hacer maravillosas construcciones con el solo uso de regla y compás. Quizá es debido a esto que, en general, cuando la gente escucha por vez primera el término *geometría no euclidea* queda muy sorprendida, ¿qué significado tiene?

A principios del siglo *XIX*, casi al mismo tiempo pero en trabajos independientes, dos famosos matemáticos, N. Lobachevsky y J. Bolyai,

negaron el V postulado de Euclides y obtuvieron nuevas geometrías, que sorprendieron al mundo matemático de esa época.

Hay dos formas de negar el quinto postulado de Euclides:

- i) Dada una recta y un punto exterior a ella, no existe ninguna recta paralela a la primera que pase por este punto. Tomando esta premisa como un postulado se genera la *geometría elíptica*.
- ii) Dada una recta y un punto exterior a ella, existe más de una recta paralela a ella pasando por ese punto (de hecho una infinidad). Esto genera la llamada *geometría hiperbólica*.

2. Entremos en detalle

La ley de atracción universal de Newton, nos dice que la magnitud de la fuerza con que dos masas en el plano se atraen, es directamente proporcional al producto de sus masas y está en razón inversa del cuadrado de la distancia que las separa. El problema de los tres cuerpos consiste en la descripción del movimiento, en el plano \mathbb{R}^2 , de tres masas puntuales sujetas a sus atracciones gravitacionales. Usando la segunda ley de Newton obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\ddot{q}_k}{dt} = \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{r_{jk}^3} (q_j - q_k) = \nabla_k U, \quad (1)$$

donde $q = (q_1, q_2, q_3) \in (\mathbb{R}^2)^3$, $r_{jk} = |q_k - q_j|$, y la energía potencial, o potencial Newtoniano, es de la forma

$$U = \sum_{j < k} \frac{m_j m_k}{r_{jk}}. \quad (2)$$

En lo que sigue, haremos una extensión de este problema a espacios de curvatura constante conocido como *el problema curvado de los tres cuerpos*. El problema consiste en la descripción del movimiento de 3-masas puntuales, bajo la acción de un potencial que generaliza al potencial Newtoniano.

La historia de este problema para el caso de $n = 2$ cuerpos no es nada nueva. Empezó de hecho con el descubrimiento de las primeras geometrías no euclidianas, el mismo N. Lovachevsky estudió la versión hiperbólica de este problema en dimensión tres. A partir de entonces son incontables los investigadores que han abordado este problema, ver por ejemplo el libro de F. Diacu [1], donde se da un bonito relato de esta historia. Para $n \geq 3$ la historia sí que es reciente, empezó apenas en 2010 cuando F. Diacu, M. Santoprete y el autor de este artículo obtuvieron, en forma unificada, las ecuaciones de movimiento para $n \geq 3$ y cualquier valor de la curvatura, así como varias familias de órbitas periódicas [3].

En el problema curvado de los 3-cuerpos, consideramos 3 partículas puntuales de masas m_1, m_2, m_3 moviéndose sobre una superficie de curvatura constante \mathbf{K} (véase figura 1).

- i) $\mathbf{K} > 0$, las superficies son esferas de radio $R = \mathbf{K}^{-1/2}$ determinadas por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = \mathbf{K}^{-1}$.
- ii) $\mathbf{K} = 0$, recobramos el plano Euclídeano
- iii) $\mathbf{K} < 0$, estudiamos el modelo de Weierstrass de la geometría hiperbólica, representado por la hoja superior ($z > 0$) del hiperboloide de dos hojas determinado por $x^2 + y^2 - z^2 = \mathbf{K}^{-1}$.

Las coordenadas de la partícula de masa m_i están dadas por $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$ y de una restricción que depende de \mathbf{K} . Esta restricción es lo que mantiene el movimiento de las partículas en las superficies respectivas.

El primer paso para nuestro análisis es definir una distancia en estas superficies. La forma natural de hacerlo es tomar la distancia a lo largo de las *geodésicas*, una generalización de las líneas rectas del plano a estas superficies. Esta distancia es la distancia más corta entre las masas sobre la superficie respectiva,

$$d_{\mathbf{K}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \begin{cases} \mathbf{K}^{-1/2} \cos^{-1}(\mathbf{K}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), & \mathbf{K} > 0 \\ |\mathbf{a} - \mathbf{b}|, & \mathbf{K} = 0 \\ (-\mathbf{K})^{-1/2} \cosh^{-1}(\mathbf{K}\mathbf{a} \boxminus \mathbf{b}), & \mathbf{K} < 0, \end{cases}$$

donde $\mathbf{a} \boxminus \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3$ es el producto interno de Lorenz. Es fácil verificar que para $\mathbf{K} > 0$ la fórmula anterior es la longitud de arco sobre el único círculo máximo que contiene a los dos puntos \mathbf{a}, \mathbf{b} . Para $\mathbf{K} < 0$ es la longitud de arco sobre la única hipérbola que los contiene (el lector interesado puede consultar los detalles en [4]).

De forma intuitiva podemos pensar que d_0 es el caso límite de $d_{\mathbf{K}}$ cuando $\mathbf{K} \rightarrow 0$, ya que a medida que $\mathbf{K} \rightarrow 0^+$, el radio de la respectiva esfera es más y más grande, en el límite “coincide” con el plano \mathbb{R}^2 . Este hecho intuitivo se puede demostrar formalmente tomando un cambio de coordenadas y trasladando el origen al polo norte de la esfera. El lector interesado puede consultar por ejemplo [2], donde se da una demostración rigurosa de este hecho para ambos signos de la curvatura, positivo o negativo.

El siguiente paso consiste en definir una fuerza de atracción entre las masas que generalice a la fuerza gravitatoria de Newton, ya que en estos sistemas mecánicos $F = -\nabla U$, es decir la fuerza es igual al negativo del gradiente del potencial, basta definir un potencial tal que al tomar el límite cuando $\mathbf{K} \rightarrow 0$, obtengamos el potencial Newtoniano. Para facilitar los cálculos que iremos usando en este trabajo, introducimos los siguientes conceptos.

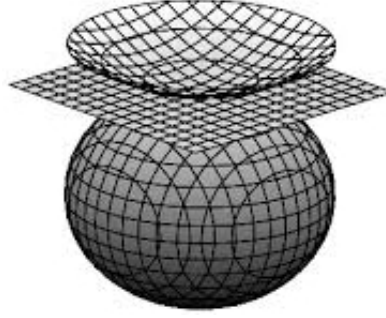


Figura 1. Espacios de curvatura constante.

$$\operatorname{sn}_\kappa(x) := \begin{cases} \kappa^{-1/2} \sin \kappa^{1/2} x & \text{if } \kappa > 0 \\ x & \text{if } \kappa = 0 \\ (-\kappa)^{-1/2} \sinh(-\kappa)^{1/2} x & \text{if } \kappa < 0, \end{cases}$$

$$\operatorname{csn}_\kappa(x) := \begin{cases} \cos \kappa^{1/2} x & \text{if } \kappa > 0 \\ 1 & \text{if } \kappa = 0 \\ \cosh(-\kappa)^{1/2} x & \text{if } \kappa < 0, \end{cases}$$

$$\operatorname{tn}_\kappa(x) := \frac{\operatorname{sn}_\kappa(x)}{\operatorname{csn}_\kappa(x)}, \quad \operatorname{ctn}_\kappa(x) := \frac{\operatorname{csn}_\kappa(x)}{\operatorname{sn}_\kappa(x)}.$$

Observemos que para $\kappa \neq 0$ se tiene

$$\kappa \operatorname{sn}_\kappa^2(x) + \operatorname{csn}_\kappa^2(x) = 1.$$

El potencial para el problema curvado se define como

$$U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) := \sum_{j < k} m_j m_k \operatorname{ctn}_{\mathbf{K}}(d_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_k)), \quad (3)$$

donde $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ es la configuración del sistema. No es difícil verificar, que este potencial en dimensión tres, satisface la ecuación de Laplace, es decir el potencial es una función armónica. También satisface el Teorema de Bertrand que establece que todas las órbitas acotadas generadas por su flujo son periódicas.

Es importante remarcar que este potencial no es único, otros potenciales que se han estudiado son (aquí r es la distancia entre las masas, $R = 1/\sqrt{-\mathbf{K}}$ y \mathbb{S}_R^2 es la esfera bidimensional en \mathbb{R}^3 de radio R).

- $V_1 = \gamma / \sin(r/R)$.
- $V_2 = 1/A(\mathbb{S}_R^2)$.
- $V_3 = 1/r$ con las restricciones necesarias para mantener a las masas sobre la superficie.

Sin embargo en los trabajos de Higgs y Kozlov [7], se demuestra que el único potencial que extiende al potencial Newtoniano y satisface

las dos propiedades mencionadas en la página anterior, es el potencial cotangente definido en (3), razón por la cual es con el que trabajaremos en este artículo y que puede ser escrito en términos del producto punto, en la forma

$$U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) = \sum_{j < k} \frac{m_j m_k (\sigma \mathbf{K})^{1/2} \frac{\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j}{\sqrt{\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i} \sqrt{\mathbf{K} \mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j}}}{\sqrt{\sigma - \sigma \left(\frac{\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j}{\sqrt{\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i} \sqrt{\mathbf{K} \mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j}} \right)^2}}, \quad \mathbf{K} \neq 0, \quad (4)$$

donde para $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$,

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} := (a_x b_x + a_y b_y + \sigma a_z b_z),$$

con

$$\sigma = \begin{cases} +1, & \text{para } \mathbf{K} > 0 \\ -1, & \text{para } \mathbf{K} < 0. \end{cases}$$

Usando las identidades

$$\dot{\mathbf{q}}_i \odot \mathbf{q}_i = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{q}_i \odot \ddot{\mathbf{q}}_i = -\dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i,$$

las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = -m_i \mathbf{K} (\dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{q}_i + \nabla_{\mathbf{q}_i} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}),$$

donde

$$\nabla_{\mathbf{q}_i} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) = \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{m_i m_j (\sigma \mathbf{K})^{3/2} [\mathbf{q}_j - (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_i]}{[\sigma - \sigma (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2]^{3/2}}, \quad \mathbf{K} \neq 0. \quad (5)$$

con las restricciones

$$\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i = \mathbf{K}^{-1}, \quad \dot{\mathbf{q}}_i \odot \mathbf{q}_i = 0, \quad \mathbf{K} \neq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

3. Curvatura $\mathbf{K} = 0$

En esta sección vamos a analizar las órbitas periódicas que queremos generalizar a espacios de curvatura constante. Como ya mencionamos anteriormente, nos vamos a restringir a hacer el análisis en dimensión dos, y solo para tres masas. Es claro que estos resultados pueden extenderse a otras dimensiones para cualquier número de masas. Recordemos un par de definiciones:

Definición 3.1. Una configuración $q = (q_1, q_2, q_3) \in (\mathbb{R}^2)^3$ es llamada central, si los vectores de posición y de aceleración de cada partícula son proporcionales, y la constante de proporcionalidad es la misma para las 3-partículas. En términos de multiplicadores de Lagrange podemos escribir

$$\nabla U(q) = \lambda \nabla I, \quad (6)$$

donde U es el potencial Newtoniano e $I = \sum_{j=1}^3 m_j |q_j|^2$ es el momento de inercia del sistema.

Definición 3.2. Una solución $q(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ del problema de los 3-cuerpos, es llamada homográfica si la configuración de las partículas permanece similar para todo tiempo t . Es decir, si la solución satisface

$$q_k(t) = R(t)\Omega(t)q_k(0), \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \quad (7)$$

donde $R = R(t) > 0$ es una función escalar y $\Omega(t)$ es una matriz ortogonal o de rotación.

Observemos que lo anterior nos da soluciones explícitas del problema de los 3-cuerpos. De la segunda definición vemos que hay dos casos límite:

1. $\Omega(t) \equiv$ Identidad, que genera lo que llamamos una solución homotética, $q_k(t) = R(t)q_k(0)$.
2. $R(t) \equiv 1$, que genera un equilibrio relativo, $q_k(t) = \Omega(t)q_k(0)$.

Estas últimas soluciones periódicas, se interpretan como si las masas formaran un cuerpo rígido, que rota uniformemente alrededor de un eje que pasa por su centro de masa. En el sistema rotatorio correspondiente, estas órbitas forman un punto de equilibrio, del cual podemos estudiar su estabilidad, de ahí el nombre de equilibrios relativos. Son precisamente estos movimientos el objeto del presente trabajo.

La historia de las soluciones homográficas y los equilibrios relativos se remonta a L. Euler, quién en 1764 publicó un tratado sobre el problema de los tres cuerpos, demostrando que si tres masas arbitrarias son colocadas sobre una línea, de tal forma que la razón de sus distancias cumplan una relación que solo depende de las masas, es decir que estén en configuración central, y si velocidades iniciales adecuadas son dadas, entonces las masas se moverán periódicamente sobre elipses, manteniendo en todo momento la configuración colineal y la razón de sus distancias. Si solo se aplica una rotación, entonces las partículas se moverán en círculos concéntricos respecto a su centro de masa, conocido como el equilibrio relativo de Euler. Véase figura 2

Pocos años después, en 1772, J.L. Lagrange encontró una segunda familia de órbitas periódicas, mostrando que si tres masas son colocadas en los vértices de un triángulo equilátero y escogemos en forma adecuada las velocidades iniciales, entonces las masas se moverán periódicamente en elipses, manteniendo en todo momento la configuración de triángulo equilátero. Véanse figuras 3 y 4.

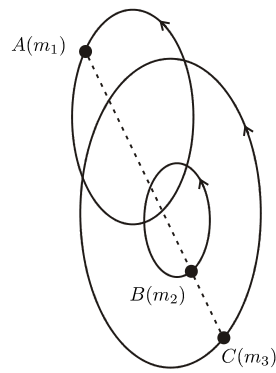


Figura 2. Solución homográfica de Euler.

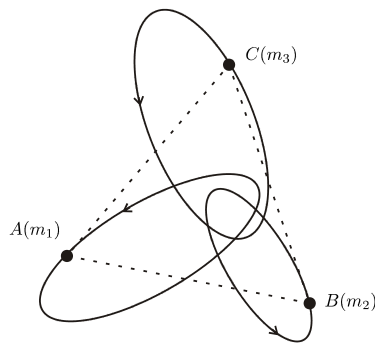


Figura 3. Solución homográfica de Lagrange.

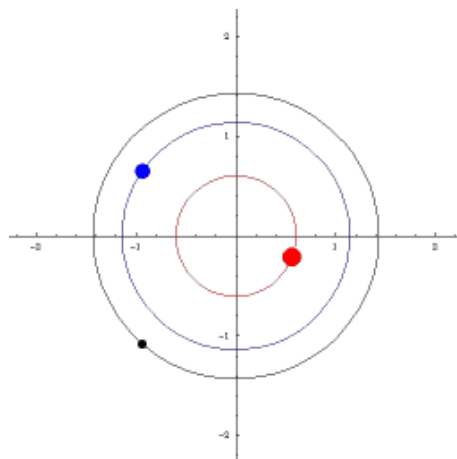


Figura 4. Equilibrio relativo de Lagrange.

4. Curvatura $K > 0$

Los equilibrios relativos en espacios de curvatura constante, son soluciones que son invariantes con respecto a las simetrías de la respectiva superficie, para curvatura positiva ya vimos que la superficie correspondiente es la esfera \mathbb{S}^2 encajada en \mathbb{R}^3 , donde las geodésicas son los círculos máximos. Por cualesquiera dos puntos no antipodales en la esfera existe una única geodésica que los contiene. Dado un círculo máximo sobre la esfera y un punto P fuera de él, cualquier círculo máximo pasando por este punto P interseca al círculo original, es decir en este caso tenemos una *geometría elíptica*. Sabemos de geometría diferencial que todas las isometrías de la esfera corresponden a rotaciones. Afortunadamente en este caso contamos con un resultado sorprendente, *el teorema del eje principal* que establece que cualquier rotación en \mathbb{R}^3 es alrededor de un eje fijo [4, 5]. Sin pérdida de generalidad podemos escoger este eje como el eje q_3 , véase figura 5.

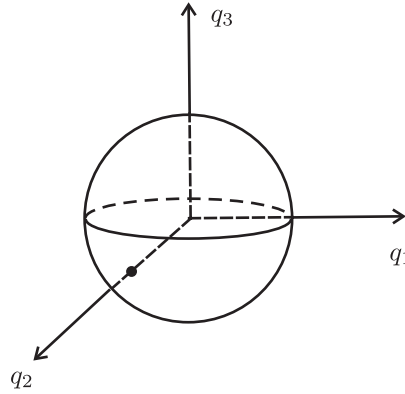


Figura 5. Rotación sobre el eje q_3 .

En los equilibrios relativos de Lagrange sobre \mathbb{S}^2 , se demuestra que las 3 masas m_1, m_2 y m_3 rotan sobre un mismo círculo, en un plano ortogonal al eje de rotación y por tanto tienen que ser iguales es decir $m_1 = m_2 = m_3$. Se demuestra también la existencia de las siguientes bifurcaciones [3]: para cualquier altura $z \in (-1, 1)$, existe una velocidad angular ω que genera un equilibrio relativo de Lagrange, observemos que $-\omega$ también genera otro equilibrio relativo, donde las masas rotan en sentido inverso al anterior, es por esta razón que algunos de nuestros resultados los enunciamos en término de ω^2 y no de ω . En este sentido se tiene que para cada ω^2 existen dos valores de z que generan equilibrios relativos si $\omega^2/m \in (8/\sqrt{3}, \infty) \cup \{3\}$, tres valores si $\omega^2/m = 8/\sqrt{3}$, y cuatro valores si $\omega^2/m \in (3, 8/\sqrt{3})$ [3].

Para los equilibrios relativos de Euler sobre \mathbb{S}^2 , primero consideramos tres masas colocadas sobre una misma geodésica; sin pérdida de generalidad podemos suponer que la masa de enmedio (arbitraria) está colocada sobre el polo norte y que las otras dos masas son iguales; entonces para todo $z \in (-1/2, 0) \cup (0, 1)$ podemos encontrar un valor de $\omega > 0$ que genere un equilibrio relativo tipo Euler. Cuando $z = 0$ tenemos que las dos masas iguales son antipodales, lo cual representa una singularidad de las ecuaciones de movimiento. Si $-1 < z < -1/2$, no existen equilibrios relativos y cuando $z = -1$ tenemos nuevamente una singularidad en las ecuaciones de movimiento véase figura 6.

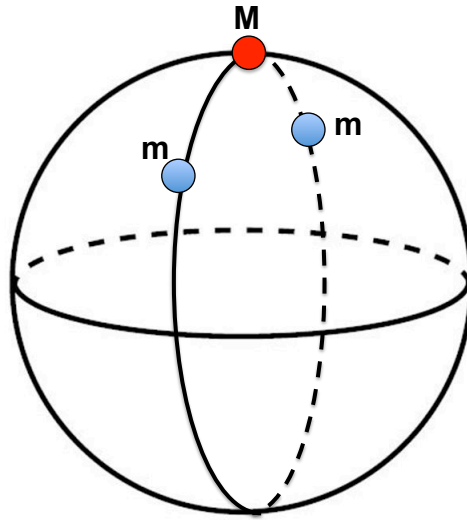


Figura 6. Equilibrios relativos de Euler.

5. Curvatura $K < 0$

En este caso, las geodésicas sobre la parte superior del hiperboloide son hipérbolas, obtenidas al intersectar los planos que pasan por el origen con el hiperboloide. No es difícil demostrar que en este modelo, dada una geodésica y un punto P fuera de ella, por este punto P pasan una infinidad de geodésicas que no intersectan a la primera, es decir aquí estamos trabajando con una *geometría hiperbólica*.

En este caso, véase figura 7, el *teorema del eje principal para el hiperboloide hiperbólico*, establece que toda isometría A en este modelo

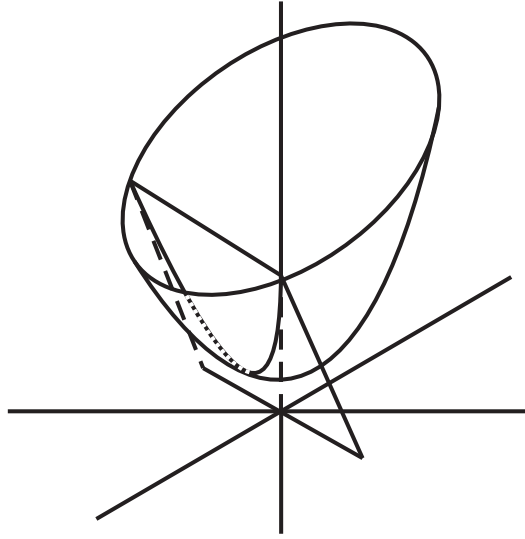


Figura 7. El modelo de Weierstrass.

se puede escribir como (ver [5] para más detalles)

$$A = P \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1},$$

o

$$A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh s & \sinh s \\ 0 & \sinh s & \cosh s \end{bmatrix} P^{-1},$$

o

$$A = P \begin{bmatrix} 1 & -t & t \\ t & 1 - t^2/2 & t^2/2 \\ t & -t^2/2 & 1 + t^2/2 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Es decir en este modelo tenemos esencialmente tres diferentes tipos de isometrías, lo que implica que, a priori podemos tener tres diferentes tipos de equilibrios relativos. Ya que este modelo resulta un poco complicado de analizar, para nuestro estudio vamos a usar otro modelo de la geometría hiperbólica: El modelo del *semiplano superior de Poincaré* \mathbb{H}^2 , donde las geodésicas son semicírculos que cortan al eje x transversalmente y las líneas verticales. Este modelo es por supuesto isométrico al primero a través de una transformación de Moebius, véase figura 8.

Además de que los cálculos en este modelo son mas amigables, el modelo \mathbb{H}^2 tiene otras ventajas:

- Se puede cubrir con una carta global (x, y) , $y > 0$.

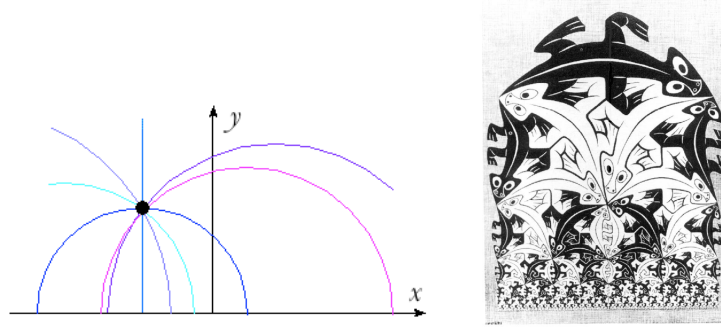


Figura 8. El semiplano de Poincaré $y > 0$, $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. A la izquierda aparece el modelo con las geodésicas. A la derecha aparece el célebre dibujo de M.C. Escher, basada en este modelo.

- Tiene estructura de grupo de Lie

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y > 0.$$

- La métrica hiperbólica es invariante por la izquierda.

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Las ecuaciones de movimiento en este modelo toman la forma

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= m_i \frac{2\dot{x}_i \dot{y}_i}{y_i} + \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j 8(x_j - x_i) y_i^4 y_j^2}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2][(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j)^2]^{3/2}}, \\ m_i \ddot{y}_i &= m_i \frac{\dot{y}_i^2 - \dot{x}_i^2}{y_i} + \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j 4 y_i^3 y_j^2 ((x_i - x_j)^2 + y_j^2 - y_i^2)}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2][(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

El grupo de isometrías de \mathbb{H}^2 es

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \mid \det g = 1\},$$

donde $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ es el grupo de matrices reales invertibles 2×2 . Esta es la parte más técnica del artículo, el ánimo de introducirla es mostrar cómo, de manera natural, en este modelo, aparecen los tres diferentes tipos de equilibrios relativos mencionados anteriormente.

El grupo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ define una acción Ψ sobre \mathbb{H}^2 de la siguiente manera: dada una matriz $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$,

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

y un elemento $(x, y) \in \mathbb{H}^2$, definimos $\Psi(g, (x, y))$ vía la función de Moebius

$$\Psi(g, (x + iy)) = \frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d}.$$

El grupo de isometrías de \mathbb{H}^2 es el cociente $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) := \text{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ tomando en cuenta que $\Psi(g, \cdot) = \Psi(-g, \cdot)$ (para más detalles véanse [6, 8]).

Para encontrar los equilibrios relativos debemos encontrar los elementos ξ_0 en el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, y puntos $m_0 \in M = TQ$, donde Q es el espacio de configuración, tales que $\Psi(\exp(\xi_0 t), m_0)$ sea solución de las ecuaciones de movimiento. En otras palabras, encontrar una configuración $(x_i^0, y_i^0) \in \mathbb{H}^2$ tal que

$$\begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{pmatrix} := \Psi \left(\exp(\xi_0 t), \begin{pmatrix} x_i^0 \\ y_i^0 \end{pmatrix} \right),$$

sea una solución de las ecuaciones de movimiento.

El álgebra de Lie de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ es el espacio vectorial de dimensión 3

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{\xi \in \text{M}(2, \mathbb{R}) \mid \text{traza } \xi = 0\}.$$

Por tanto todo elemento no cero de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ es de uno de los siguientes tres tipos:

1. Elíptico. Elementos que tienen dos valores propios complejos puramente imaginarios.
2. Hiperbólico. Elementos que tienen dos valores propios reales de la misma magnitud y signos opuestos.
3. Parabólico. Elementos que tienen dos valores propios cero y la matriz es no diagonalizable.

Los representantes canónicos del álgebra de Lie son

$$\begin{aligned} \xi_e &:= \omega \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \xi_h &:= \omega \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ \xi_p^\pm &:= \omega \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\omega > 0$.

Los equilibrios relativos parabólicos deben ser de la forma

$$\exp(\xi_p^\pm t) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \pm \omega t \\ y \end{pmatrix},$$

es decir, ellos consisten en movimientos paralelos al eje x , como se muestra en la figura 9.

En [3], demostramos que este tipo de equilibrios relativos no existe.

Las isometrías de tipo elíptico de \mathbb{H}^2 son de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R}).$$

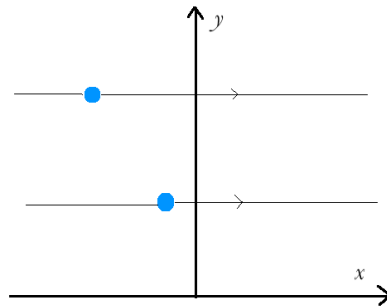


Figura 9. Isometrías de tipo parabólico.

En la figura 10 se muestra una familia de círculos concéntricos centrados en el punto $(0, 1)$, como se puede observar los círculos hiperbólicos continúan siendo círculos, pero su centro obviamente difiere del centro euclideano. Los equilibrios relativos de Lagrange, o aquellos que forman un triángulo equilátero con la métrica hiperbólica, existen si y solo si las tres masas son iguales, invitamos al lector a imaginar cómo serían los movimientos de estos equilibrios relativos en un círculo hiperbólico.

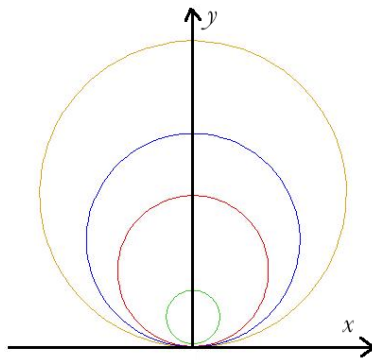


Figura 10. Una familia de círculos hiperbólicos concéntricos.

Los equilibrios relativos elípticos de Euler o colineales, que en este caso significa que las tres masas estén sobre una misma geodésica, correspondientes a los que estudiamos sobre la esfera \mathbb{S}^2 para el caso de curvatura positiva, corresponden a tener una masa arbitraria M fija en el punto $(0, 1)$, y dos masas iguales m moviéndose sobre un círculo hiperbólico.

Finalmente estudiemos los Equilibrios relativos sobre \mathbb{H}^2 generados por las isometrías de tipo hiperbólico. Recordemos que estas son de la

forma:

$$\Psi(\exp(\xi_h(t)), x + iy) = e^{\omega t}(x + iy).$$

Es decir estas isometrías son homotecias por la función exponencial. Empezemos por los equilibrios relativos tipo Euler cuando las masas están en posición canónica, es decir colocamos una masa arbitraria M en la posición $(0, y)$ y dos masas iguales m sobre el semi-círculo centrado en el origen y radio y . En este caso el equilibrio relativo correspondiente es una homotecia de esta configuración, donde las tres masas estarán en todo momento en un mismo semicírculo centrado en el origen (véase figura 11). Más concretamente, después de algunos cálculos podemos mostrar que las masas se mueven a velocidad uniforme $|\omega|$ y $|\omega| \cosh(d)$ donde

$$\omega^2 = \frac{m + 4M \cosh^2(d)}{4 \cosh^3(d) \sinh^3(d)}.$$

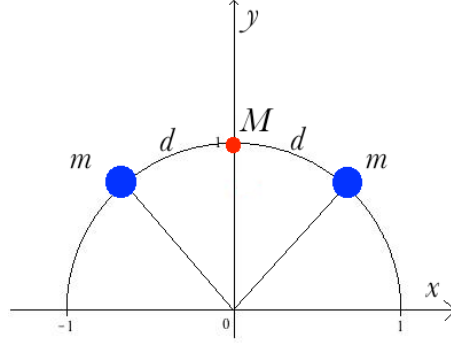


Figura 11. Equilibrio relativo hiperbólico tipo Euler.

En forma general, podemos considerar tres masas sobre una geodésica en \mathbb{H}^2 , con la hipótesis de que las dos masas en los extremos de la geodésica sean iguales y la masa de enmedio M está colocada a la misma distancia hiperbólica de estas (véase figura 12), en este caso tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.1. *Dadas tres masas equidistantes sobre una misma geodésica, donde las masas exteriores son iguales, siempre existe un equilibrio relativo de tipo Euler que pasa por estas configuraciones.*

Para estudiar los equilibrios relativos hiperbólicos de Lagrange, necesitamos precisar algunos conceptos:

Definición 5.2. Un círculo hiperbólico con centro q_0 y radio ρ es el conjunto de puntos sobre \mathbb{H}^2 , cuya distancia al punto q_0 es ρ .

Definición 5.3. Decimos que n puntos $\{a_i\}$ en \mathbb{H}^2 forman un n -polígono regular si están sobre un círculo hiperbólico y todas las distancias hiperbólicas $a_i a_{i+1}$ son iguales para $i = 1, \dots, n$ donde $a_{n+1} = a_1$.

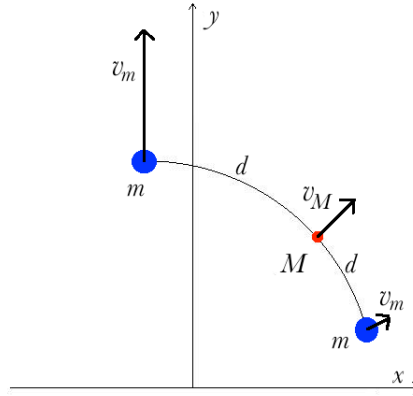


Figura 12. Equilibrio relativo hiperbólico tipo Euler no canónico.

Teorema 5.4. *No existen equilibrios relativos Lagrangianos de tipo hiperbólico.*

En realidad este es un resultado mucho más general establecido en el siguiente teorema [9].

Teorema 5.5. *En el problema de los n -cuerpos con masas iguales sobre \mathcal{H}^2 , no existen equilibrios relativos de tipo hiperbólico sobre un n -polígono regular que mantengan esta configuración.*

Para finalizar este escrito debo puntualizar que este nuevo subcampo de la matemática, que consiste en estudiar la dinámica de partículas en espacios de curvatura distinta de cero, es muy nuevo, pero aun así en menos de diez años ha interesado a varios destacados investigadores que hoy en día están trabajando sobre estos temas, como puede verse en la bibliografía incluida. Como en todo tema nuevo, hay mucho por investigar y descubrir, yo hago una invitación a todos los lectores, particularmente a los jóvenes estudiantes, a adentrarse en este mundo fascinante de los espacios curvados, estoy seguro que se divertirán y obtendrán grandes beneficios.

Agradecimientos

Este artículo fue parcialmente financiado por: Asociación Mexicana de Cultura A.C. El autor agradece a los árbitros por sus comentarios y sugerencias que ayudaron a mejorar la primera versión de este artículo. Este escrito surgió de una charla por invitación de la Universidad Autónoma de Coahuila, en la celebración del XXX aniversario de la Facultad de Física y Matemática. Agradezco a la Universidad por la invitación y su hospitalidad.

Bibliografía

- [1] F. Diacu, *Relative Equilibria of the Curved N-Body Problem*, Series Volume 1, Atlantis Press, 2012.
- [2] ———, «The Classical N-Body Problem in the Context of Curved Spaces», *Canad. J. Math.*, vol. 69, núm. 4, 2017, 790–806.
- [3] F. Diacu, E. Pérez-Chavela y M. Santoprete, «The n-body problem in spaces of constant curvature. part i: Relative equilibria», *J. Nonlinear Sci.*, vol. 22, 2012, 247–266.
- [4] M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, New Jersey, USA, 1976.
- [5] B. Dubrovine, A. Fomenko y P. Novikov, *Modern Geometry, Methods and Applications, Vol. I, II and III*, Springer-Verlag, New York, 1984, 1990.
- [6] S. Kobayashi, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer, 1970, ISBN 3-540-05848-6.
- [7] V. Koslov y A. Harin, «Kepler's problem in constant curvature spaces», *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 54, 1992, 393–399.
- [8] J. Marsden, *Lectures on Mechanics, London Mathematical Society Lecture Note Series, 174*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [9] E. Pérez-Chavela y J. M. Sánchez-Cerritos, «Euler-type relative equilibria in spaces of constant curvature and their stability», *Canadian Journal of Mathematics*, <http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2017-002-7>.