Miscelánea Matemática **21**, *21–28 (1994)*

Ecuaciones de tercer y cuarto grado: Teorema de Tulipán

Guillermo Pastor
ITAM
Río Hondo No. 1
San Angel
México, D.F. 01000

La idea fundamental de *la Géométrie* de Descartes fue la de establecer un lazo entre las curvas del plano y las ecuaciones algebraicas. Descartes no sólo redujo el estudio de ciertas curvas a cuestiones algebraicas, sino que también mostró como construcciones geométricas pueden ser utilizadas para resolver ecuaciones algebraicas. Aquí presentamos el método de Descartes para encontrar las raíces reales de ecuaciones de tercer y cuarto grado. Este material puede ser fácilmente incorporado en cualquier curso introductorio de Geometría Analítica tanto a nivel de bachillerato como de licenciatura.

En el siglo XVI los matemáticos italianos habían logrado importantes avances en la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado. Observaron que para obtener las raíces de cualquier ecuación de tercer y cuarto grado bastaba conocer cómo calcular las raíces de una ecuación de cuarto grado sin término cúbico. Para la ecuación de tercer grado

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \tag{1}$$

se sustituye $z = x - a/3$. Al desarrollar los productos se cancelan los términos cuadráticos y obtenemos

$$x^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) = 0. \tag{2}$$

Multiplicando por x se tiene

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{3}$$

donde

$$p = \left(b - \frac{a^2}{3}\right), \qquad q = \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) \text{ y } r = 0.$$

Si x_1, x_2, x_3 son las raíces de (2), entonces x_1, x_2, x_3 y $x_4 = 0$ son las raíces de (3). Si tomamos $z_i = x_i - a/3$, tendremos que z_1, z_2 y z_3 son las raíces de nuestra ecuación original.

La ecuación de cuarto grado $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ puede reducirse a la forma (3) sustituyendo $z = x - a/4$. En este caso,

$$p = b - \frac{3a^2}{8}, \qquad q = c - \frac{ab}{2} + \frac{a^3}{8}, \quad \text{y} \quad r = d - \frac{ac}{4} + \frac{a^2b}{16} - \frac{3a^4}{256}.$$

A pesar de haber reducido la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado al cálculo de ecuaciones de un sólo tipo, las fórmulas que descubrieron los matemáticos italianos son muy complicadas, y en muchos casos aparecen raíces cuadradas de números negativos. Por ejemplo, al aplicar la fórmula de Cardano a la ecuación $x^3 - 15x - 4 = 0$, el resultado es

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Cardano sabía que no había raíces cuadradas de números negativos y sin embargo, también sabía que $x = 4$ era una raíz.

Descartes redujo el problema de calcular las raíces reales de la ecuación (3) al problema de encontrar los puntos de intersección de un círculo con la parábola $y = x^2$. Si escribimos la ecuación

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

de la forma

$$\left(x^4+(p-1)x^2\right)+\left(x^2+qx\right)=-r$$

y al completar los cuadrados en cada uno de los términos del lado izquierdo se obtiene

$$\left(x^2+\frac{p-1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{q}{2}\right)^2=\frac{(p-1)^2}{4}+\frac{q^2}{4}-r.$$

Si definimos

$$h=-\frac{q}{2},\quad k=\frac{1-p}{2},\quad \text{y}\quad R=\frac{q^2+(1-p)^2}{4}-r, \tag{4}$$

y sustituimos $y=x^2$ en el primer término obtenemos la expresión

$$(y-k)^2+(x-h)^2=R \tag{5}$$

que es la ecuación de un círculo con centro en el punto (h,k) y radio $\sqrt{R}$. Observemos que R podría ser negativo. Sin embargo, si (2) tiene una solución real x, entonces el punto (x,x^2) satisface (5) y necesariamente R es no-negativo. Por tanto, las soluciones reales de la ecuación

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

corresponden a las coordenadas x de los puntos de intersección del círculo (5) con la parábola $y=x^2$.

Ejemplo 1. Tomemos la ecuación estudiada por Cardano $x^3-15x-4=0$. Multiplicando por x obtenemos

$$x^4-15x^2-4x=0.$$

En este caso, $p=-15$, $q=-4$ y $r=0$. Entonces $h=2$, $k=8$, y $R=68$. Debemos encontrar los puntos de intersección de la parábola $y=4x^2$ con el círculo $(x-2)^2+(y-8)^2=68$.

En la figura 1 podemos apreciar que las abscisas de los puntos de intersección de estas cónicas son $x_1=4$, $x_2=-2+\sqrt{3}$, $x_3=-2-\sqrt{3}$, y obviamente, $x_4=0$.

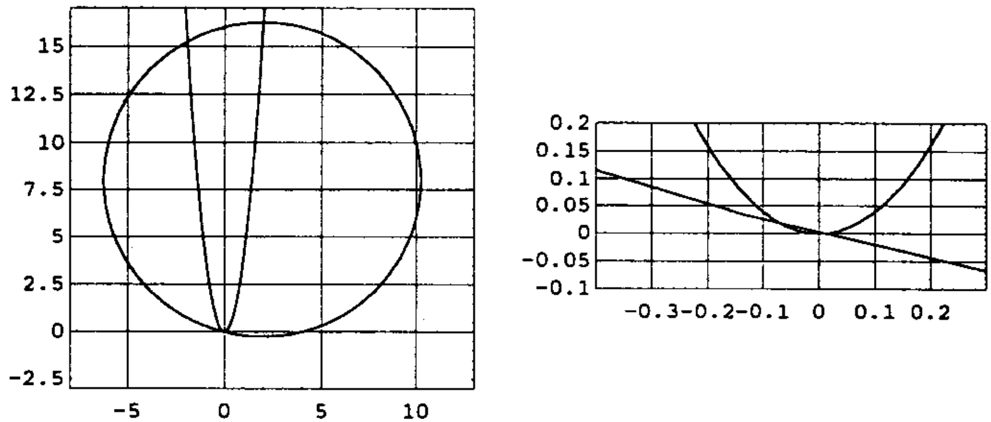

Figura 1:

Ejemplo 2. Consideremos la ecuación $z^4 - z^3 - 6z^2 + 4z + 8 = 0$. Al sustituir $z = x + 1/4$ en esta ecuación se obtiene la siguiente ecuación sin término cúbico:

$$x^4 - \frac{51}{8}x^2 + \frac{7}{8}x + \frac{2205}{256} = 0.$$

Al aplicar las expresiones (4), se tiene que $h = -7/16$, $k = 59/16$, y $R = 1325/256$.

En la figura 2 observamos que el círculo

$$(x + 7/16)^2 + (y - 59/16)^2 = 1325/256$$

es tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(7/4, 49/16)$ y que se cruzan en los puntos $(-9/2, 81/16)$ y $(-5/4, 25/16)$. De aquí se sigue que $x_1 = x_2 = 7/4$, $x_3 = -9/4$, y $x_4 = -5/4$. Las soluciones de nuestra ecuación original son entonces $z_1 = z_2 = 2$, $z_3 = -2$ y $z_4 = -1$.

En los ejemplos anteriores no hemos discutido cómo obtener las coordenadas de los puntos de intersección del círculo con la parábola. El *método de Descartes* es en realidad un método para aproximar las raíces de ecuaciones de tercer y cuarto grado, puesto que una vez que se obtiene la ecuación del

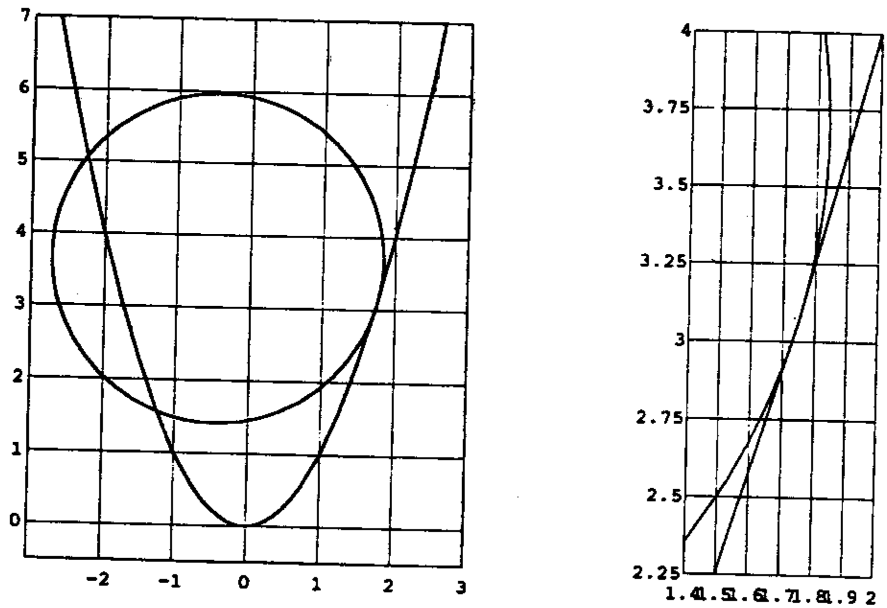

Figura 2:

círculo, en general sólo es posible hacer una figura con mucho cuidado y medir las abscisas de los puntos de cruce.

Ejemplo 3. Tomemos ahora la ecuación $z^4+4z^3+2z^2-3z+1/2=0$. Después de sustituir $z=x-1$ en esta ecuación, obtenemos la siguiente ecuación de tipo (2):

$$x^4-4x^2+x+5/2=0.$$

Ahora $p=-4$, $q=1$, y $r=5/2$. Entonces, $h=-1/2$, $k=5/2$, y $R=4$. Debemos encontrar entonces los puntos de intersección del círculo de radio 2 y centro en $(-1/2,5/2)$ con la parábola $y=x^2$.

En la figura 3 podemos estimar que los puntos de cruce de la parábola con el círculo son *aproximadamente* $x_1=1.5$, $x_2=1.2$, $x_3=-0.7$, y $x_4=-1.95$. De aquí que las raíces de nuestra ecuación original son *aproximadamente* $z_1=0.5, z_2=0.2, z_3=-1.7$, y $z_4=-2.95$.

Este método también nos permite obtener algunos resultados generales

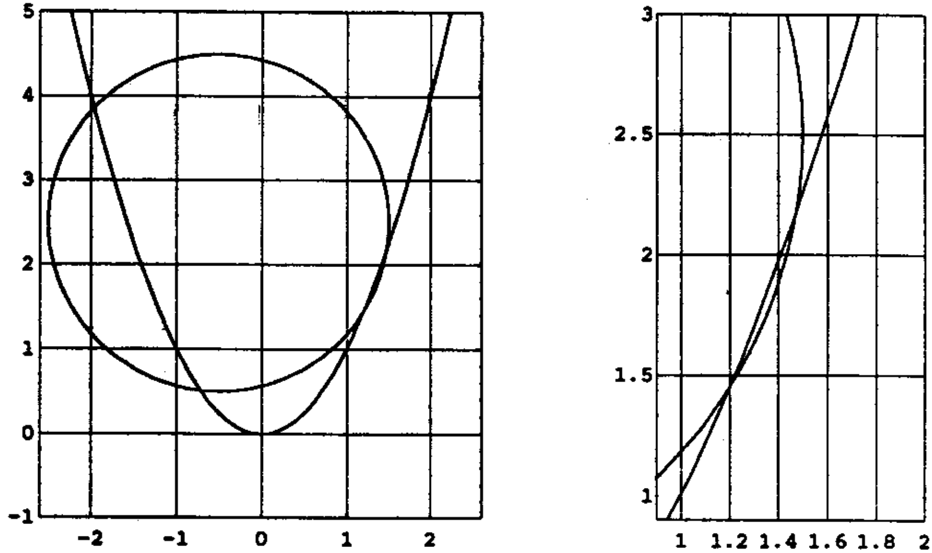

Figura 3:

sobre la naturaleza de las soluciones. Consideremos de ahora en adelante una ecuación de tercer grado de la forma

$$x^3 + px + q = 0, \tag{6}$$

que al multiplicar por x se transforma en

$$x^4 + px^2 + qx = 0.$$

Para calcular las raíces de esta ecuación es necesario intersectar el círculo que pasa por el origen con centro en $(h, k) = (-q/2, (1-p)/2)$. La ecuación (6) tiene raíces reales dobles cuando este círculo es tangente a la parábola $y = x^2$. Si el punto de tangencia es (x, y), entonces se deben de satisfacer las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ (x-h)^2 + (y-k)^2 &= h^2 + k^2 \\ 2x &= -\frac{x-h}{y-k} \end{aligned}$$

donde la última ecuación indica que el segmento que une el centro del círculo con el punto de tangencia es perpendicular a la recta tangente de la parábola en (x, y).

A partir de las dos primeras se tiene que

$$x^3 + (1 - 2k)x - 2h = 0, \tag{7}$$

y de la primera y la última es fácil concluir que

$$2x^3 + (1 - 2k)x - h = 0. \tag{8}$$

Si multiplicamos la ecuación (7) por 2 y la restamos a la ecuación (8), resulta que $(2k - 1)x + 3h = 0$. Así, al despejar x concluimos que

$$x = \frac{3h}{1 - 2k}.$$

Al sustituir esta expresión en (7) y simplificar se obtiene la siguiente condición para h y k:

$$27h^2 + (1 - 2k)^3 = 0. \tag{9}$$

Los puntos del plano que satisfacen esta ecuación forman una curva (ver figura 4). Es fácil verificar que cuando (h, k) está por debajo de esta curva, el círculo sólo cruza a la parábola en un punto (además del origen), mientras que cuando está por encima de esta curva hay tres puntos de cruce (además del origen).

Al sustituir $h = -q/2$ y $k = (1-p)/2$ en la ecuación (9) obtenemos $27q^2 + 4p^3 = 0$. Del análisis geométrico anterior se deduce el siguiente resultado:

Teorema. *Si la ecuación $x^3+px+q = 0$ tiene coeficientes reales y definimos $D = 27q^2 + 3p^3$, entonces tiene sólo una raíz real si $D > 0$, tiene dos raíces reales, una de ellas doble si $D = 0$, y tiene tres raíces reales diferentes si $D < 0$.*

Este teorema también puede obtenerse sin dificultad por medio de métodos puramente algebraicos, o bien, usando cálculo diferencial.

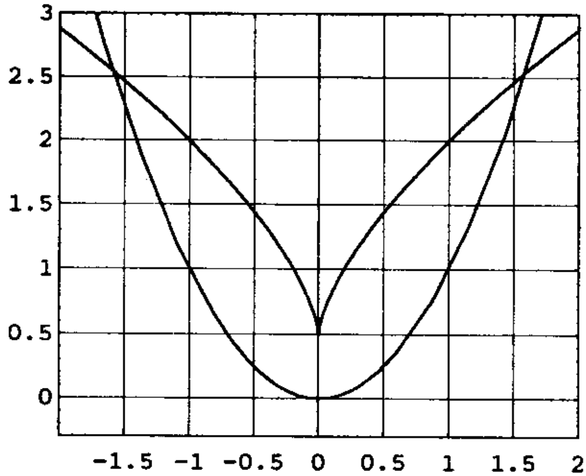

Figura 4:

Bibliografía

[1] C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1968.

[2] B. N. Delone, *Geometría Analítica*, en la colección *La Matemática: su contenido métodos y significado*, Alianza Editorial, Madrid, 1985.

[3] D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, Dover, New York, 1967.