Miscelánea Matemática 26 (1997) 59–69 SMM

Caos en el sistema solar

Ernesto Pérez Chavela
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

A mi maestro y amigo Diego Bricio Hernández de quien por primera vez escuché la palabra caos.

Empecemos.

Desde los inicios de la humanidad el hombre se ha interesado por el movimiento de los astros en el cielo. Los fenicios utilizaron estos conocimientos para poder realizar sus largas travesías comerciales. Algunos planetas del sistema solar fueron la representación de dioses para los griegos y romanos. Qué decir de la luna, nuestro bello satélite cuyo ciclo determina mareas, tiempo de siembras y tantas otras cosas, amén de ser una de las grandes inspiradoras de poesía, música, pintura y escultura. ¿Quién de nosotros no se ha sentido maravillado y atraído por una luna llena?

Hoy en día hemos avanzado muchísimo en el conocimiento de nuestro cielo, lo que nos ha permitido llegar a la luna, seguir la órbita de algún cometa por un cierto tiempo cuando este pasa cerca de la tierra, descubrir nuevos satélites de los planetas, etc. Sin embargo este conocimiento nos lleva a nuevas interrogantes, muchas de las cuales aún permanecen sin respuesta. Dentro de la matemática una rama que estudia el movimiento de planetas, satélites, cometas y en general estudia *el problema de los n-cuerpos* es la *Mecánica Celeste*, que dicho sea de paso, es una de las disciplinas científicas con nombre más bonito.

Es desde la perspectiva de la Mecánica Celeste que quiero abordar la pregunta:el sistema solar ¿es estable, inestable ó caótico? Desde la escala temporal del Universo, la respuesta es obvia, dado que el sol se extinguirá, el sistema solar desaparecerá cuando esto ocurra, y por tanto el sistema solar tal como lo conocemos es inestable. Sin embargo los tiempos en los que estos eventos ocurrirán son tan grandes que resulta complicado aún imaginarlos. Por otro lado, si pensamos en un periodo de tiempo relativamente corto, digamos de hace 100 años a la fecha, cuando ya existe documentación fidedigna del movimiento de los cuerpos celestes, uno llega a la conclusión de que el cielo que observaron los papás de nuestros abuelos es prácticamente el mismo que podemos observar hoy en día. Podemos por tanto concluir que en este periodo de 100 años el sistema solar ha sido estable. Surge entonces la pregunta filosófica: para periodos de tiempo no tan exageradamente grandes pero tampoco tan pequeños, digamos de sólo unos cuantos cientos de millones de años, el sistema solar es ¿caótico ó estable?

Un poco de historia.

La primera vez que se habló formalmente del concepto de estabilidad dentro del sistema solar, fue en referencia a los anillos de Saturno. Estos anillos fueron observados por primera vez en julio de 1610 por Galileo, utilizando un telescopio de su invención. El en un principio creyó haber descubierto dos lunas cercanas a Saturno, esto probablemente porque las imágenes que Galileo percibía eran muy pobres. Sin embargo, él mismo desechó estas primeras suposiciones al notar que lo que había considerado lunas, no variaban su posición respecto a Saturno en el transcurso de varias noches. Sus estudios sobre los anillos quedarían incompletos ya que subitamente aquellas *extrañas cosas* desaparecieron. Hoy en día sabemos que no es posible observar los anillos en toda época del año, sino que esto depende de la inclinación que guardan respecto a la Tierra. A partir de los descubrimientos de Galileo muchas personas estuvieron interesadas en el estudio de estos anillos. En un principio fueron bautizados como anillos A, B y C por la clara división que existía entre ellos; hoy esta división ha sido altamente refinada. El estudio moderno de los anillos de Saturno comenzó con los trabajos del físico James Clerk Maxwell quien en 1865 ganó el premio Adams de la Universidad de Cambridge por su demostración matemática de que los anillos consistían de numerosas masas diminutas moviéndose en órbitas independientes. La idea básica de su demostración fue suponer que dado que los anillos de Saturno han permanecido en la misma posición por muchos años, las soluciones de las ecuaciones que describen su movimiento debían ser estables. A partir de esto Maxwell descubrió que si los anillos fueran sólidos o fluidos, la más ligera perturbación destruiría esta configuración. Hoy día sabemos que efectivamente los anillos de Saturno están formados por pequeñas masas independientes. El trabajo de Maxwell es bellísimo; sin embargo, la suposición original sobre la estabilidad de los anillos es falsa. Las soluciones que describen el movimiento de las partículas que forman los anillos son *altamente inestables* si nosotros consideramos una escala de tiempo mayor. Volvemos nuevamente a la pregunta filosófica sobre la relatividad de medir el tiempo.

Desde un punto de vista matemático, al plantear la pregunta sobre la estabilidad del sistema solar debemos analizar la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones diferenciales usadas para describir los movimientos planetarios; en otras palabras, queremos entender las soluciones de un problema particular de n-cuerpos, en este caso el formado por el Sol y los nueve planetas que conforman nuestro sistema.

Entremos en detalle.

En general el problema de los n-cuerpos consiste en describir el movimiento de n-masas puntuales moviéndose bajo la ley de atracción de Newton, que como sabemos nos dice que la atracción entre dos partículas es directamente proporcional al producto de sus masas y está en razón inversa del cuadrado de la distancia que las separa. Si suponemos que la j-ésima partícula tiene masa positiva (es decir $m_j \in \mathbb{R}^+$) y al tiempo t está en la posición espacial x_j ($x_j \in \mathbb{R}^3$), si además consideramos a la constante de atracción universal $G = 1$, entonces las ecuaciones que describen el movimiento de las n-partículas está dado por

$$m_j \ddot{x}_j = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^3}(x_i - x_j) \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

No es difícil darse cuenta que las ecuaciones anteriores constituyen un sistema demasiado complicado: notemos que si dos o más partículas están en una misma posición en un cierto instante de tiempo, es decir si ocurre colisión de dos o más partículas, entonces tenemos un cero en el denominador del campo vectorial que define nuestro sistema, dando lugar a una singularidad en la solución respectiva. Este sistema fue planteado por primera vez por Newton en sus **Principia** hace un poco más de 300 años y en la actualidad para n mayor o igual que tres sigue siendo un problema abierto, lo cual significa que no conocemos la forma explícita de las soluciones.

Sin embargo, para contestar la pregunta sobre la estabilidad del sistema solar no es necesario conocer explícitamente las soluciones. Si tomamos una condición inicial en el dominio del campo vectorial que define nuestro sistema de ecuaciones diferenciales, sabemos que por tal punto existe una única solución, la cual es analítica, y por lo tanto expresable como una serie de potencias. En un principio los astrónomos y matemáticos creyeron que podían obtener estimaciones razonables sobre la dinámica del sistema solar al evaluar sólo los primeros términos de tales series ya que los términos restantes eran tan pequeños que no podían influir en la respuesta final. Esto en general no es cierto pues depende de la serie involucrada.

Aclaremos un poco estos conceptos. Si $\{a_n\}$ es la sucesión a_1, a_2, $a_3, \cdots, a_n, \cdots$ entonces a la suma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ se le llama serie infinita o simplemente una serie que se puede escribir en forma compacta como $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

A esta serie le asociamos una sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ definida como sigue:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Decimos que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente si la sucesión de sumas parciales converge, es decir si existe L tal que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = L.$$

Por ejemplo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ consiste en tomar la mitad de un segmento de longitud 1, y a la mitad de este segmento le sumamos la mitad del segmento de longitud un medio, repitiendo este proceso un número infinito de veces. Es claro que la suma total es menor o igual a 1. No es difícil demostrar que esta serie converge a 1. Estudiemos ahora la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}} + \cdots\cdots$$

esta serie es divergente ya que los dos primeros términos son mayores que $\frac{1}{2}$, como también lo es la suma de los dos siguientes, y de los 4 que siguen y así sucesivamente. Notemos que en estos dos ejemplos se tiene que el límite del término general es cero, es decir $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Esto muestra que los términos restantes de una serie a pesar de ser cada vez más pequeños pueden ser determinantes en la convergencia o no convergencia de una serie dada. Estudiar sólo los primeros términos de una serie que representa una solución del problema de los n-cuerpos, nos da una buena primera aproximación, pero esto es insuficiente para poder analizar la dinámica del sistema solar en un périodo de tiempo relativamente grande.

La pregunta sobre la estabilidad puede por lo tanto plantearse de la siguiente manera: las soluciones en serie obtenidas del modelo que representa el sistema solar: ¿son o no convergentes? ¿los planetas mantendrán esencialmente el mismo movimiento o puede éste cambiar radicalmente?

Durante muchos años, nadie pensó en la posibilidad de que el movimiento de los planetas en el sistema solar fuera irregular. Fue Henri Poincaré, el creador de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, el primero que se dió realmente cuenta de lo intrincadas y difíciles que podían ser las soluciones del sistema que describe el movimiento de los astros. En otras palabras, Poincaré fue el primer científico en concebir que el sistema solar podría ser caótico, aunque él nunca usó este concepto.

Con el avance de la tecnología moderna aparecen las supercomputadoras y con ello la posibilidad de hacer simulaciones de los movimientos de los astros en nuestro sistema planetario para tiempos relativamente grandes. Uno de los principales investigadores de este nuevo campo de estudio de la Mecánica Celeste es Jacques Laskar, quien se propuso determinar los cambios que habían ocurrido en la órbita de la Tierra en los últimos millones de años. Desarrollando manipuladores algebraicos para el tipo específico de ecuaciones que modelan el sistema solar, Laskar logró obtener expresiones matemáticas que toman en cuenta 150,000 términos de las series correspondientes. Tomando una condición inicial para las posiciones, velocidades y masas de todos los planetas con excepción de Plutón, introduce estos datos a la computadora con sus enormes ecuaciones y obtiene la evolución del sistema solar en los próximos 200 millones de años, en incrementos sucesivos de 150 años.

Para verificar la existencia de *caos*, es decir para mostrar qué tan sensible es nuestro sistema solar ante pequeños cambios de las condiciones iniciales, Laskar repitió los cálculos con condiciones iniciales ligeramente diferentes y comparó los resultados obtenidos. Si las órbitas fueran aproximadamente regulares (o cuasi-periódicas), entonces las trayectorias calculadas deberían permanecer cercanas; sin embargo él notó que a partir de cierto momento la separación entre las órbitas se dobla y luego se redobla y así sucesivamente en iguales intervalos de tiempo. Esto muestra que la dependecia de las condiciones iniciales ante pequeños cambios es muy sensible a pequeños errores con lo cual el *caos* es evidente. Dicho de otra forma, los movimientos dentro del sistema solar son extremadamente sensitivos a su estado presente y a la precisión con que este estado pueda ser medido. Un error tan pequeño como 100 metros es insignificante en pocos años, pero resulta estratosférico en 10 billones de años.

Otros dos reconocidos investigadores del MIT, J. Wisdom y G. Sussman, usando también supercomputadoras pero técnicas diferentes a las empleadas por Laskar, llegaron a las mismas conclusiones del comportamiento caótico del sistema solar, después de una integración numérica que abarca 100 millones de años. Todo esto indica que los resultados obtenidos por Laskar no son particularmente sensibles al modelo o métodos numéricos utilizados.

Muchos otros astrónomos, físicos y matemáticos que trabajan en este campo toman en cuenta varios otros factores en sus modelos como son las resonancias y los producidos por relatividad general, obteniendo interesantes conclusiones que sin embargo, dada la complejidad de las ecuaciones involucradas sólo han sido integradas en períodos de tiempo no lo suficientemente grandes como lo hicieron Laskar, Wisdom y Sussman.

Nuestros conocimientos sobre *caos* hoy en día están basados casi exclusivamente en experimentos numéricos, esto nos proporciona un entendimiento bastante aceptable de lo que es nuestro sistema solar, sin embargo para poder entender completamente las consecuencias de la evolución caótica del sistema solar, debemos entender claramente la dinámica responsable del mismo. Desgraciadamente éste es un problema tan complicado que aún no ha podido ser resuelto. Hagamos un paréntesis para mostrar lo complicado que resulta aún en un problema *simple* demostrar la existencia de *caos* analíticamente.

Un ejemplo sencillo.

Consideremos 4 masas puntuales m_1, m_2, m_3, m_4 en el plano colocadas en los vértices de un rombo donde $m_1 = m_2$ y $m_3 = m_4$. Damos condiciones iniciales simétricas respecto a los ejes coordenados en posiciones y velocidades y dejamos que las partículas se muevan de acuerdo a la ley de atracción de Newton. Debido a las simetrías éstas siempre permanecerán en una configuración romboidal (ver figura 1).

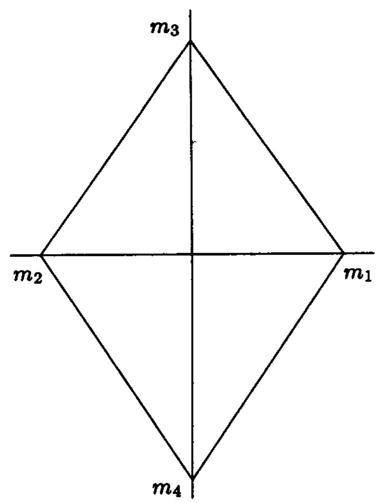

Figura 1: El ejemplo

Como decíamos anteriormente, las colisiones entre partículas producen singularidades en el sistema de ecuaciones diferenciales que modela este sistema. Así, tenemos singularidades debidas a colisiones entre las partículas de masa m_1, entre las partículas de masa m_3 y la singularidad debida a la colisión de todas las partículas. Por la simetría romboidal, las colisiones triples son imposibles.

Las colisiones binarias son regularizables por los métodos clásicos de Sundman o Levi-Civita, esto significa que nosotros podemos *pasar* a través de estas singularidades uniendo la trayectoria que muere en colisión doble con la que nace en ella. De esta forma los choques binarios no representan mayor problema matemático en nuestro sistema.

Desafortunadamente, esta técnica no puede ser aplicada cuando estudiamos singularidades debidas a colisión total. En estos casos utilizamos lo que los geómetras algebraicos llaman *explosiones*, la idea es analizar la naturaleza de la singularidad. Para ello es necesario observar que una colisión total ocurre en tiempo finito. Luego, mediante varios cambios de coordenadas y una reparametrización del tiempo, podemos *frenar* la velocidad de las partículas de tal forma que ahora la colisión total tenga lugar en tiempo infinito. De esta manera es posible estudiar la conducta asintótica de las órbitas que mueren en la colisión total, y también de las que *casi* lo hacen, es decir, trayectorias en las que las 4 partículas se acercan muchísimo, pero donde en ningún momento chocan. En otras palabras con esta técnica podemos *inflar* o *explotar* el punto donde ocurre la singularidad y obtener un conjunto bastante grande, desde el cual es posible observar cómo es que las 4 partículas se vienen acercando.

Los escapes al infinito de dos o más partículas en este sistema no son estrictamente singularidades; sin embargo, podemos aplicar la misma técnica de *explosión* mencionada anteriormente a las trayectorias correspondientes. Una vez que hemos *explotado* el infinito, tenemos cierto control tanto sobre las trayectorias que escapan, como sobre las que van a colisión total. No todas las trayectorias escapan a infinito: las que no lo hacen son llamadas trayectorias elípticas. Analicemos ahora la velocidad de las órbitas de escape; aquéllas en que las partículas llegan al infinito con velocidad positiva les llamaremos órbitas hiperbólicas. Existe una clase especial de trayectorias donde las partículas llegan al infinito con velocidad cero, estas trayectorias son llamadas parabólicas y juegan un papel muy importante en la determinación de la dinámica global del movimiento, ya que *separan* las trayectorias que escapan de las que no lo hacen. Se puede demostrar que existe una órbita parabólica que empieza en colisión total, lo que abre la puerta a una gama muy amplia de movimientos recurrentes: aquellos que casi llegan al infinito pero regresan y entonces pasan muy cerca de colisión total. Se prueba de esta forma la existencia de un conjunto de condiciones iniciales (un conjunto de Cantor para los que se interesen más en estos temas), cuyas trayectorias respectivas comprenden gran parte de estos movimientos recurrentes. Supongamos ahora que dos de las partículas de nuestro sistema son mucho más pesadas que las otras dos, es decir supongamos que m_3 es mucho menor que m_1, lo cual expresamos como $m_3 \ll m_1$. Ahora demos cualquier sucesión de números naturales $n_1, \ldots, n_k$. Se puede demostrar que existe una condición inicial donde las partículas pesadas (las de masa m_1) chocan exactamente n_1 veces antes de que las partículas de masa m_3 se acerquen a colisión cuadruple sin que ésta se produzca, entonces las partículas de masa m_3 chocan una vez y se alejan, ahora las partículas de masa m_1 chocan exactamente n_2 veces antes de que las partículas de masa m_3 regresen para chocar una vez entre sí y alejarse. Este movimiento se repite de la misma manera hasta que después de los n_k choques entre las partículas de masa m_1, las partículas de masa m_3 regresan, chocan una vez y entonces el movimiento se repite con n_1 colisiones entre las partículas de masa m_1, etc. Tenemos de esta forma una órbita periódica, es decir un movimiento que se repite después de un cierto périodo de tiempo. Lo sorprendente del caso es que podemos encontrar otra condición inicial, suficientemente cercana a la primera, donde después que las partículas de masa m_1 chocan n_k veces, las partículas de masa m_3 chocan y después escapan a infinito, mientras las partículas pesadas continúan chocando. Es decir hemos encontrado dos condiciones iniciales suficientemente cercanas cuyas órbitas respectivas son muy diferentes, mientras una produce un movimiento périodico (órbita elíptica), la otra escapa al infinito (órbita hiperbólica). De esta forma se demuestra analíticamente la existencia de *caos* en este sistema. Nuestro ejemplo sencillo no lo es tanto desde el punto de vista de la gran riqueza de movimientos que posee.

En resumen.

El ejemplo anterior muestra lo complicado que resulta demostrar la existencia de *caos* en forma analítica, aún en un caso sencillo uno debe utilizar técnicas matemáticas bastante especializadas. Esta es una de la razones por la cual no se ha podido demostrar analíticamente la existencia de *caos* en el sistema solar. Esto representa un reto muy complicado pero fascinante.

Desde un punto de vista computacional es posible simular no sólo nuestro sistema solar, sino diferentes sistemas planetarios: en todos ellos el *caos* parece ser un hecho común. Una pregunta interesante que surge al analizar diferentes sistemas planetarios es la siguiente: ¿Podría existir un nuevo planeta en nuestro sistema solar? Varios expertos en el tema, basados en una gran cantidad de simulaciones numéricas, opinan que cualquier material adicional estaría en riesgo de ser expulsado del sistema. Esto lleva a especular que hace varios millones de años, el sistema solar posiblemente tenía más planetas del tamaño de la Luna o Marte pero que fueron expulsados del sistema en algún momento. La conformación actual de nuestro sistema solar corresponde a los planetas, los satélites y los asteroides cuyas condiciones iniciales dan lugar a órbitas que dificilmente sufren cambios inmediatos ante pequeñas perturbaciones.

Como comentario final, y con el ánimo de tranquilizar a los que creen que el caos es algo desastroso, debo decirles que en todas las simulaciones númericas del sistema solar hechas hasta hoy día, nada terrible ha sucedido con las órbitas. Estas no se cruzan, anulandose con esto la posibilidad de algún choque, y ninguno de los planetas ha sido expulsado del sistema en un periodo de varios millones de años. Es decir, para el sistema solar los resultados implican que ninguna catástrofe ocurrirá en al menos un billón de años, lo cual es un tiempo enorme aún para escalas astronómicas. Tenemos pues un *caos* con restricciones. Este tipo de *caos* es mucho más común que el *caos* que nos lleva a catástrofes. *Caos* no nesariamente implica catástrofe.

Agradecimientos.

La presentación final de este trabajo refleja los atinados comentarios de: María José Arroyo, Mónica González, Gretchel Lapidus, Luz Vianey

Vela y en especial de Jorge X. Velasco. A todos ellos muchas gracias.

Referencias

[1] E. A. Lacomba and E. Pérez-Chavela, *Motions Close to Escapes in the Rhomboidal Four Body Problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **57**, (1993), 411-437.

[2] J. A. Laskar, *A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system*, Nature, **338**, (1989), 237–238.

[3] J. A. Laskar, *The chaotic motion of the solar system: a numerical estimate of the size of the chaotic zones*, Icarus, **88**, (1990), 266–291.

[4] R. McGehee, *Triple Collision in the Collinear Three Body problem*, Inventiones Math. **27**, (1974), 191–227.

[5] K.R. Meyer and G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Applied Mathematical Sciences **90**, Springer-Verlag (1992).

[6] I. Peterson, *Newton's Clock. Chaos in the Solar System*, Science/Astronomy, Freeman (1993).

[7] D. Saari, *Singularities and collisions of Newtonian Gravitational Systems*, Arch. Rational Mech. Anal. **49**, (1973), 311–320.

[8] J. Wisdom, *Urey prize lecture: chaotic dynamics in the solar system*, Icarus **72**, (1987), 241–275.