El segundo problema de Hilbert sobre la compatibilidad de los axiomas de la aritmética

Carlos Torres Alcaraz
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
México
cta@lya.fciencias.unam.mx

Resumen

Este ensayo tiene como propósito hacer un balance de lo sucedido con uno de los 23 problemas que mencionara Hilbert en el año de 1900 como ejemplo de la riqueza y vastedad de la matemática en aquél momento: el relativo a la no contradicción de los axiomas de la aritmética. En la primera parte se presentan los antecedentes inmediatos que llevaron a este problema, haciendo hincapié en la importancia que Hilbert le atribuye en relación al fundamento de la matemática. Tras esclarecer la naturaleza de lo que se diera en llamar *Programa de Hilbert* (tendiente a fundamentar la matemática clásica), se presentan de manera informal los teoremas de Gödel que fueron decisivos en la reorientación del problema, y que tanta luz arrojaron sobre la posibilidad de hallar una prueba elemental de la no contradicción de la aritmética. Hacia el final se explica la demostración que diera Schütte sobre la consistencia de la aritmética de Peano (probada por vez primera en 1936 por Gentzen), y se hacen algunas precisiones acerca de su carácter. Para terminar se revaloriza la importancia de este tipo de demostraciones en tanto que medios para fundamentar la matemática, y se precisa su lugar en el contexto de la lógica moderna.

En el segundo Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en París en el verano de 1900, David Hilbert presentó una lista con los problemas más relevantes que, en su opinión, habría de enfrentar la matemática de cara al siglo veinte. La selección tuvo como base el impulso que imaginaba tales problemas darían a nuevos avances y desarrollos. La lista contenía un total de veintitrés de ellos. El segundo se refiere al fundamento de las matemáticas y lo enunció escuetamente como sigue:

Investigar la consistencia de los axiomas de la aritmética

A cien años de este inusitado evento vale la pena hacer un alto en el camino y recapitular lo sucedido con este problema, que condujo, entre otras cosas, a dos de los más notables resultados de la lógica y la matemática modernas: a los teoremas de Gödel.

Origen del problema

El estudio del fundamento de las matemáticas ocupa un lugar destacado en la obra de Hilbert. Un año antes, en 1899, había expuesto una nueva presentación de la geometría euclidiana en la que renueva la organización axiomática de esta disciplina, tomando en cuenta el discernimiento que la matemática del siglo diecinueve había alcanzado en este dominio. Su libro *El Fundamento de la Geometría* fija un nuevo nivel de eficiencia y rigor para el método axiomático. Hermann Weyl comenta:

> "... fue como si en el horizonte ... hubiese aparecido de súbito el Sol. Con toda claridad vemos determinado el concepto axiomático según el cual toda la geometría es un sistema hipotético-deductivo: sólo depende de la definición implícita de conceptos y relaciones relativas a los objetos espaciales contenida en los axiomas, y no de la descripción de su contenido intuitivo. Erige un sistema completo y natural de axiomas geométricos. A estos se les exige que satisfagan ciertas condiciones de consistencia, independencia y saturación." (H. Weyl, 1944, p. 51)

En su trabajo, Hilbert renuncia a todo intento por definir o describir los objetos espaciales básicos con que trata la geometría: todo lo que se tiene que saber acerca de ellos está en los axiomas. En este sentido utiliza a los postulados como definiciones implícitas de los objetos con los que tratan. A diferencia de Euclides, para él la pregunta sobre la evidencia de los postulados es irrelevante: son tan sólo hipótesis sobre las que nos hemos de apoyar para desarrollar sus consecuencias lógicas. Valga recordar la frase que habría pronunciado en 1891 y que sintetiza su punto de vista axiomático: *Debe ser posible reemplazar en todos los enunciados geométricos las palabras* punto, línea *y* plano *por* mesa, silla *y* tarro de cerveza *sin cambiar en nada la estructura formal de la geometría* (v.g. *trazar una silla de una mesa a otra* sería el primer postulado de Euclides). Presumiblemente, Hilbert ve en su trabajo una continuación del viejo sueño de los geómetras tendiente a desarrollar una teoría puramente racional de la estructura del espacio.

Si bien la lista de axiomas que presenta para la geometría parece completa, aún subsiste la duda sobre la estructura lógica del edificio que sobre ella se levanta. Fue él mismo el primero en moverse en este nivel *metageométrico*, preguntándose por la independencia de sus postulados, por su consistencia y saturación (prefiero ésta voz antes que la expresión *completud* tan en boga hoy en día). No pudo haber mejor culminación de la matemática decimonónica, con su inexorable pérdida de la certeza, que el discernimiento de la naturaleza del método axiomático por parte de Hilbert. Para él, ya no ha lugar la pregunta por la verdad de los axiomas, y sólo las interrogantes por su independencia, consistencia y saturación tienen sentido. Lo demás cae fuera de la jurisdicción de la matemática.

> Históricamente, la introducción de la axiomática formal planteó varios problemas que la antigua axiomática no conoció. Mientras los axiomas fueron evidentes, estaba implícito en la naturaleza de la lógica el que, al deducir correctamente a partir de ellos, no se podía ir a parar a contradicciones. Pero cuando los axiomas pasaron a ser simples suposiciones ni verdaderas ni falsas, no pudo excluirse la posibilidad de que deduciendo correctamente a partir de ellos se llegase a una contradicción. ¿Cómo asegurar, pues, la consistencia de un sistema axiomático? En segundo lugar, al axiomatizar una teoría deductiva ¿cómo asegurar que toda proposición de la teoría es demostrable a partir de los axiomas adoptados (problema de la saturación o completud semántica)? Estos fueron, en esencia, los problemas más importantes que el nuevo enfoque trajo consigo.

Para abordar el problema de la consistencia e independencia de los axiomas Hilbert siguió en un principio el método de la construcción de modelos: interpretaciones de los términos indefinidos de una teoría que hacen verdaderos a los postulados. Fue precisamente esta senda la que lo condujo al problema de la consistencia de los axiomas de la aritmética. En efecto, una solución parcial al problema de la consistencia de los postulados de Euclides consistió en exhibir un modelo aritmético de ellos, mostrando que no son más que una expresión distinta de los hechos del álgebra lineal y de la teoría de las ecuaciones lineales.[1]

¿Con qué materiales construyó Hilbert los modelos de las distintas geometrías? La respuesta es: básicamente, con los que se encuentran en el sistema de los números reales, aunque esto no siempre fue así. Por ejemplo, el modelo de Poincaré para la geometría hiperbólica se construye con materiales tomados de la geometría euclidiana. Esto significa que todo aquél que acepte la geometría euclidiana con sus puntos, líneas, circunferencias, etc. puede, mediante un simple cambio en la nomenclatura, obtener la geometría no euclidiana. Hilbert en cambio, sólo acudió a la aritmética, disciplina que probó ser un terreno sumamente fértil para construir un modelo, de modo que si una contradicción fuese deducible de los postulados de Euclides, ésta conduciría necesariamente a un resultado similar en el sistema de los números reales.

De lo anterior se sigue que la salvaguarda de la consistencia de la aritmética lo es también de las distintas geometrías. No obstante, en el punto en que se encontraba el problema a principios del siglo veinte no se contaba con tal salvaguarda (como tampoco se cuenta hoy en día). La solución al problema de la consistencia de las geometrías era parcial: no se había probado sin más que éstas fuesen consistentes, sino que lo serían en la medida en que la aritmética de los números reales lo fuese (consistencia relativa). Restaba por resolver este último problema.

> Situaciones como la anterior no se presentan cuando el modelo es de naturaleza combinatoria y se obtiene considerando sólo un número finito de objetos y relaciones entre ellos. En tales casos se está ante una prueba absoluta de consis-

[1] El modelo para la geometría euclidiana se determina al asignar a la palabra *punto* el significado *terna ordenada de números reales*, a la palabra *recta* el significado *conjunto de puntos P que son solución de una ecuación vectorial $P = P_0 + t\bar{a}$, donde P_0 es un punto fijo arbitrario, t un número real cualquiera y $\bar{a}$ un vector no nulo*, a la palabra *plano* el significado *conjunto de puntos P que son solución de una ecuación vectorial $P = P_0 + s\bar{a} + t\bar{b}$* etc., tal como se definen estas nociones en geometría analítica.

tencia y ya nada puede hacernos dudar. La idea subyacente es que los eventos no se pueden contradecir entre sí, sólo las proposiciones: si los axiomas reflejan la verdad con respecto a cierto sistema de objetos, no se puede dudar de su consistencia. A manera de ejemplo consideremos el siguiente modelo combinatorio de la geometría de los siete puntos de Fano.

Términos indefinidos

Punto, *recta*, *incide* (relación binaria).

Axiomas

A1. Si A y B son puntos distintos, al menos una recta incide con ellos.
A2. Si A y B son puntos distintos, a lo más una recta incide con ellos.
A3. Si M y N son rectas distintas, al menos un punto incide con ellas.
A4. Hay al menos una recta.
A5. Cada recta incide con al menos tres puntos.
A6. Ninguna recta incide con más de tres puntos.
A7. No todos los puntos inciden con una misma recta

	Δ	Φ	Γ	Λ	Π	Θ	Σ
a	*				*		*
b	*	*				*	
c		*	*				*
d	*		*	*			
e		*		*	*		
f			*		*	*	
g				*		*	*

Arriba, axiomas de Fano para el plano proyectivo de siete puntos. Estos postulados sólo tratan con la relación de incidencia entre puntos y rectas (el punto x incide con la recta y). Abajo de los axiomas, tabla señalando la relación de incidencia entre ciertos objetos a, b, c, ... (los *puntos*) y ciertos conjuntos finitos de puntos $\Delta, \Phi, \Gamma, \ldots$, (las *rectas*) que hacen verdaderos a los axiomas. Cada asterisco en la tabla indica que el punto pertenece a la recta o que la recta incide con el punto (v.g., el asterisco en el cruce del segundo renglón y la sexta columna indica que el punto b pertenece a la recta Θ). El valor de este tipo de modelos radica en que cada axioma se puede verificar por inspección directa (de la tabla en este caso). Por ejemplo, del hecho de que cada columna de la tabla tiene tres asteriscos se sigue que los axiomas A5 y A6 son verdaderos en esta interpretación.

¿Será posible definir un modelo combinatorio para los axiomas de la aritmética? La respuesta es negativa: simples consideraciones hacen ver que todo modelo de los mismos ha de consistir en una infinidad de objetos.

Necesidad de una prueba de consistencia *absoluta*

Hilbert advirtió rápidamente que, como consecuencia de los trabajos de Weierstrass y Dedekind relativos a los números irracionales, el problema de la consistencia de un sistema de axiomas para los números reales remitía al problema correspondiente en relación a los números enteros. Más en este caso, al igual que en el de la teoría de conjuntos, el método de los modelos no procuraba ninguna ayuda, ya que para estos sistemas axiomáticos no había ninguna teoría a la que se pudiese apelar. Si lo que se quería era dar una respuesta definitiva a la pregunta por la consistencia, había que proceder de manera distinta. El rumbo que habrían de tomar las investigaciones era el de la búsqueda de una prueba directa de la no contradicción de la aritmética o, en palabras de Hilbert, de una *prueba absoluta* de consistencia.[2] A fin de cuentas, el problema comenzaba a dar lugar a nuevos avances y desarrollos.

En 1904, en el Congreso Internacional de Heidelberg, Hilbert expuso un primer bosquejo sobre cómo lograr una prueba absoluta de la consistencia de la aritmética. Su plan consistía en demostrar que todas las fórmulas derivables en la aritmética poseían cierta propiedad (la de ser *homogéneas*), mostrando que los axiomas la tenían y que ésta era *hereditaria*, en el sentido de que a partir de fórmulas homogéneas sólo se podían derivar fórmulas con la misma propiedad. La prueba de consistencia se lograría al probar que la negación de una fórmula homogénea no lo es, lo que equivaldría a demostrar que a partir de los axiomas no se pueden derivar contradicciones. A la sazón Hilbert se encontraba muy lejos de alcanzar su objetivo. Enfrentaba, además, la crisis desencadenada en torno al fundamento de las matemáticas entre

[2] En los distintos trabajos que Hilbert consagra al fundamento de las matemáticas, el significado del término *axiomas para la aritmética* es unas veces el de *axiomas para el sistema de los números reales* y otras el de *axiomas para la teoría de los números naturales*, de modo que cuando nos referimos al problema de la consistencia de los axiomas de la aritmética nos podemos estar refiriendo a cualquiera de estos dos.

otras cosas por la aparición de paradojas como la del conjunto de todos los conjuntos de Russell, a la cual se vinieron a sumar años más tarde las severas críticas de Brouwer en torno al empleo de nociones como la del infinito actual o el uso del Principio del Tercero Excluido en ciertas áreas de la matemática. Hilbert, a diferencia de los intuicionistas, no estaba dispuesto a renunciar al *paraíso que Cantor ha creado para nosotros*, a la teoría de conjuntos, y juzga que una prueba de consistencia de una teoría que englobe nociones constructivas e ideales será suficiente para justificar su legitimidad. No obstante, aun debía forjar las herramientas necesarias para lograr su propósito.

Probar de manera directa la consistencia de una teoría axiomática X requiere someter a un examen minucioso sus proposiciones y sus demostraciones. Una prueba de consistencia diría: *en la teoría X es imposible demostrar dos proposiciones una de los cuales es la negación de la otra.* Esta tarea se antoja imposible en la matemática usual, en la que las proposiciones se presentan bajo una extraña mezcla de lenguaje ordinario y lenguaje simbólico, y las demostraciones no tienen una estructura bien definida que permita un análisis exhaustivo. Para someter la demostración a un examen minucioso había que reducir las proposiciones a meras *fórmulas* (combinaciones de signos carentes de todo significado), y las demostraciones a simples *combinaciones de fórmulas* sujetas a reglas precisas. De este modo, toda demostración se convertiría en un objeto concreto susceptible de ser examinado en todas sus partes, tal como lo son las derivaciones algebraicas.[3]

La formalización

La prueba de consistencia absoluta de la aritmética se llevaría a cabo a través de su total *formalización.* A ésta se superpondría una *teoría de la demostración* consagrada al análisis minucioso de las demostraciones aritméticas ya formalizadas. El objetivo de esta nueva teoría sería probar de manera indubitable que en la teoría formalizada no es posible demostrar dos fórmulas contradictorias entre sí (v.g. una la negación de la otra). Para distinguir esta segunda teoría de la primera Hilbert acuñó

[3]Si bien en la axiomática formal los términos primitivos carecen de significado, en ella las demostraciones aún dependen del lenguaje ordinario, en el que nombres, adjetivos, verbos, etc. se usan según atributos gramaticales que intervienen en su manejo, y en el que los términos lógicos *no*, *y*, *si* ... *entonces* ... , *para todo*, etc. poseen significados sobre los que descansan las deducciones. Esto incorpora cierto grado de subjetividad en las demostraciones que para los fines que Hilbert persigue hay que eliminar.

el vocablo *metamatemática*. El esquema era *grosso modo* el siguiente:

Primero. Todo lo que hasta ese momento había constituido la aritmética se convertía en objeto de una formalización estricta, en un conjunto de fórmulas demostrables. Las fórmulas de este cuadro se habrían de distinguir de las de la matemática usual en que estarían construidas con signos tomados de un alfabeto predeterminado y en conformidad con reglas precisas que no apelarían al significado que los signos pudiesen tener.

Segundo. A esta matemática formalizada se habría de superponer una segunda teoría, una *metamatemática*, cuya función sería la de asegurar a la primera mediante una prueba de su consistencia. En contraposición a aquélla, esta segunda teoría tendría un contenido preciso (se ocuparía de las fórmulas y las demostraciones formales de la primera) y en ella se utilizarían métodos de deducción intuitivos alejados de toda sospecha (deducción material).

A lo anterior se le vino a conocer bajo el nombre de *Programa de Hilbert.*

Sorprendentemente, la tarea de formalización ya había sido hecha casi en su totalidad por los logicistas. En *Principia Mathematica* (1910-1913) Russell y Whitehead suministran una enorme evidencia experimental de que la matemática clásica se puede representar en un cálculo lógico recurriendo a un número muy reducido de signos y reglas de inferencia. Esto resulta particularmente cierto en el caso de la aritmética elemental, cuya formalización sólo requiere, además de signos para las variables, los conectivos, los cuantificadores y la igualdad, de los símbolos $+$, $\cdot$, s y 0 para las operaciones de *suma, producto* y *sucesor* y el número *cero.* Lo único que había que hacer era adaptar el simbolismo de Russell y Whitehead al *programa* declarando que las fórmulas del cálculo lógico son enunciados ideales que nada significan por sí mismas (en *Principia* los signos se introducen con la intención de comunicar). Transformada la aritmética en un *juego deductivo* sometido a reglas precisas, Hilbert y sus seguidores encaminaron sus esfuerzos a demostrar mediante un razonamiento intuitivo e irrebatible que la teoría formalizada era no contradictoria.

> Una idea que se juega en el *programa* es que si bien en múltiples teoremas matemáticos aparecen nociones no constructivas (como la de infinito actual), en la deducción de los mismos sólo se realiza un número finito de pasos lógicos. Si la deducción fuese errónea, los errores saltarían a la vista (las reglas del juego habrían sido rotas, lo que se haría no-

torio tal como una jugada ilegal en el ajedrez). Es así que Hilbert pretende establecer la validez de la matemática no constructiva apelando al carácter finitista de las demostraciones matemáticas. La idea subyacente es que los métodos deductivos de la matemática adquieren una forma tan exacta al ser formalizados, que se transforman en objetos de inspección e investigación directa. La suficiencia de los métodos finitistas en el tratamiento de los formalismos obedecería a la naturaleza constructiva de estos últimos.

Hacia el final de los años veinte había gran confianza en llevar a buen término el *programa.* Para entonces ya se contaba con una prueba de la consistencia de ciertos fragmentos de la teoría formal de los números en los que el esquema inductivo se restringe a fórmulas no muy complejas. Sobre la imposibilidad de extender dichas pruebas a la totalidad de la aritmética habremos de decir algo más adelante.

Considérese el siguiente sistema de axiomas $\mathbb{Z}$ en el que los signos s, $+$, $\cdot$ y 0 formalizan a las funciones *sucesor, suma y producto* y al número *cero.*

$x = x$	(Identidad)
$x = y \to (A(x) \to A(y))$	(Axioma de Leibniz)
$\neg(sx = 0)$	(Axiomas para el sucesor)
$sx = sy \to x = y$	
$x + 0 = x$	(Axiomas para la suma)
$x + sy = s(x + y)$	
$x \cdot 0 = 0$	(Axiomas para el producto)
$x \cdot sy = x \cdot y + x$	
$(A(0) \wedge \forall x(A(x) \to A(sx)) \to A(x))$	(Axioma de inducción completa)

A este sistema hemos de añadir las reglas deductivas y los axiomas del cálculo de predicados de primer orden. Aunque $\mathbb{Z}$ no contiene al signo $<$, el predicado $x < y$ se puede definir como sigue:

$$x < y \equiv_{\text{def}} \exists z(\neg(z = 0) \wedge x + z = y)\,.$$

> Si bien sólo se cuenta con la adición, la multiplicación y la función sucesor, el poder expresivo de $\mathbb{Z}$ es enorme, pudiéndose traducir en él diversas proposiciones relativas a los números naturales y demostrar aquellas tenidas como verdaderas en la teoría de los números como, por ejemplo, el teorema de Euclides sobre la existencia de una infinidad de números primos o el algoritmo de la división. En 1925 W. Ackermann probó de manera constructiva la consistencia del sistema que resulta al restringir el axioma de inducción completa a fórmulas $A(x)$ en las que la variable x no figura libre dentro del alcance de algún cuantificador, mas el método por él utilizado no es extensible al sistema en su totalidad.

Para entender correctamente la naturaleza del programa y el sentido de los teoremas de Gödel, conviene hacer algunas precisiones. La primera de ellas se refiere al carácter del lenguaje simbólico requerido en la formalización, y la segunda a los procedimientos demostrativos admisibles en una prueba de consistencia.

En cuanto al lenguaje, éste debía ceñirse a la exigencia de que sus reglas de construcción fueran explícitas y sólo apelaran a la *forma* de los símbolos, no a su significado. A su vez, la reconstrucción formal de la teoría requería que tanto los axiomas como las reglas deductivas se estipularan de antemano y fueran enteramente sintácticas, es decir, que sólo apelaran a la forma de las fórmulas, no al significado que se les pudiera adscribir a los signos. Así, las demostraciones matemáticas quedarían formalizadas como combinaciones reglamentadas de fórmulas cuya figura quedaría expuesta a la mirada. Este último requisito era inapelable: si los objetos de estudio de la metamatemática eran, no los objetos usuales de la matemática clásica –números, funciones, espacios de funciones, etc.– sino sus *métodos de prueba*, había que *materializar* las demostraciones dándoles una forma concreta, accesible a la intuición.

Si bien todas estas exigencias fueron satisfechas plenamente, no todas las dificultades fueron superadas con ello: aun faltaba satisfacer una tercera condición relativa a los métodos de prueba aceptables en la metamatemática, es decir, por toda demostración de consistencia de las teorías formalizadas.

Precisemos la naturaleza de esta cuestión. Tras la formalización, las demostraciones matemáticas quedarían reducidas a meras sucesiones de fórmulas, en las que cada una de las fórmulas sería un axioma o se habría inferido de anteriores mediante la aplicación de alguna regla de inferencia. Así, la teoría se convertiría en un *cálculo* o sistema simbólico sometido a reglas de combinación muy precisas. En este sistema ciertas sucesiones de combinaciones de signos serían pruebas, y otras no. En particular, cada proposición P y su negación *no-P* quedarían representadas mediante expresiones de la forma ϕ y $\neg\phi$, donde la única diferencia entre ellas sería que en la segunda figuraría antepuesto el símbolo "$\neg$", que correspondería a la negación en el lenguaje formal. Por ejemplo, en el sistema $\mathbb{Z}$ la proposición 2 *es un número primo* está representada por la fórmula $\forall x(\exists y(x \cdot y = ss0) \rightarrow (x = 1 \vee x = ss0))$, mientras que su negación, es decir, la proposición 2 *no es un número primo* está simbolizada por la fórmula $\neg\forall x(\exists y(x \cdot y = ss0) \rightarrow (x = 1 \vee x = ss0))$ que resulta de anteponer el símbolo "$\neg$" a la primera.

En este contexto, como ya lo hemos señalado, la consistencia de la teoría equivaldría a la imposibilidad de derivar, con base en los axiomas y las reglas de inferencia dadas, dos fórmulas de la forma ϕ y $\neg\phi$, y el problema de la no contradicción quedaría reducido a un problema de combinatoria (¿qué combinaciones de símbolos se pueden derivar con estas reglas de inferencia formal a partir de estas fórmulas (axiomas)?). Esta posibilidad de *convertir* las demostraciones en *mosaicos o despliegues simbólicos* hizo pensar a Hilbert que su objetivo se podría alcanzar, es decir, que se podría probar la consistencia de la teoría mediante un argumento de naturaleza combinatoria que no iría más allá de la aritmética elemental, de modo que las formas de argumentación utilizadas en la prueba metamatemática estuvieran al margen de toda sospecha. De no satisfacerse esta condición, ninguna prueba de consistencia sería admisible como fundamento de la matemática clásica.

Para hacer más clara esta última la exigencia, pensemos en el caso contrario. Supongamos, por ejemplo, que con base en el axioma de elección hemos demostrado que el axioma de elección es consistente con el resto de los axiomas de la teoría de conjuntos. ¿No habría en ello una circularidad, una petición de principios? El argumento equivaldría a decir lo siguiente: si aceptamos el axioma de elección, podemos demostrar que el axioma de elección no introduce contradicciones en la teoría de conjuntos; una demostración de escaso valor epistemológico: el principio X nos dice que el principio X es confiable.

A finales de los años veinte Hilbert y sus seguidores no imaginaban los problemas que encontrarían en su camino. Kurt Gödel era entonces un estudiante de la Universidad de Viena que preparaba su disertación doctoral sobre la completud del cálculo de predicados, una de las herramientas fundamentales en el programa de formalización.

Aunque este resultado armonizaba enteramente con las expectativas de Hilbert, nada parecido se podría decir de los teoremas que ya entonces se gestaban en su imaginación. Justo al inicio de 1931 Gödel puso en duda la viabilidad del programa con dos resultados cuyos ecos aún se escuchan no sólo en las matemáticas, sino en disciplinas tan distantes como la filosofía de la mente o la teoría de la elección racional. En un breve artículo que no sobrepasa las 25 páginas este joven académico demostró dos hechos sorprendentes:

G1) Como quiera que se formalice la matemática clásica, si la formalización es consistente, siempre habrá en ella proposiciones *indecidibles*, es decir, proposiciones de la forma ϕ y $\neg\phi$ que no son deducibles en el sistema. A este resultado se le conoce como *primer teorema de incompletud de Gödel.*

G2) En todo formalismo de esta índole, digamos SF, siempre es posible construir una fórmula aritmética α que expresa la propiedad de que SF es consistente. El *segundo teorema de incompletud de Gödel* afirma que la fórmula α no es deducible en SF en caso de que SF sea consistente. En breve: Gödel demuestra que en ningún sistema formal consistente se puede demostrar la fórmula α que afirma su consistencia.

Como se ve, estos resultados marchan en la dirección contraria a la del proyecto de Hilbert, el cual aspira, primero, a una formalización *completa* de la matemática clásica y, segundo, a una *prueba elemental* de su consistencia.

De los teoremas de Gödel nos habremos de ocupar con mayor detalle en la siguiente sección, no sin antes advertir al lector que la exposición será un poco más técnica que la desarrollada hasta ahora, en parte porque el trabajo de Gödel no se entendería cabalmente sin adentrarse en los mecanismos en que se apoya, y en parte porque a partir de su intervención se vio que el problema de la consistencia no se podría resolver sin recurrir a métodos de demostración más sofisticados que los suministrados por la aritmética elemental, y que habremos de explicar parcialmente.

Gödel

A la distancia, la fase del formalismo que perduró hasta 1930 se contempla como un tanto ingenua. Como ya lo hemos señalado, esta etapa, caracterizada por el trabajo constructivo en la teoría de la demostración, llegó a un abrupto final con los teoremas de Gödel, que llevaron a una profunda revisión del *programa* de Hilbert (si no es que a su destrucción) y dejaron una huella indeleble en la lógica moderna. Utilizando tan sólo métodos finitistas como los aceptados por la escuela de Hilbert, Gödel demostró que a partir de la aritmética formal, la consistencia de un sistema formal no se puede probar mediante un argumento que se pueda repetir dentro del formalismo (como se puede, por ejemplo, reproducir en $\mathbb{Z}$ el teorema de Euclides sobre la existencia de una infinidad de números primos). Esto significa, entre otras cosas, que los recursos y métodos de razonamiento incorporados en todo formalismo aritmético no muy restringido son insuficientes para probar su consistencia, es decir, que para alcanzar la anhelada prueba de consistencia es forzoso recurrir a una teoría en cierto sentido más potente que la que se ha formalizado.

Lo anterior significó un fuerte golpe a la pretensión de Hilbert de *eliminar para siempre los problemas de fundamentación* de las matemáticas: ahora resultaba que la justificación de cualquier teoría con cierto poder expresivo habría de encontrarse en otra teoría que de alguna manera la desbordaba, quedando pendiente el problema de la consistencia de esta última. Esto ponía en entredicho la posibilidad de justificar la validez del análisis, el uso del infinito actual o la legitimidad del tercer excluido con una prueba finitista de consistencia.

¿Cómo llegó Gödel sus descubrimientos? En la teoría de la demostración de Hilbert las matemáticas son tratadas como un sistema de signos sometido a reglas de manipulación muy precisas, mientras que la metamatemática se mantiene dentro de la esfera de la argumentación intuitiva, pues en ella hay un contenido objetivo y preciso como lo son las fórmulas (sucesiones de signos) y la pruebas formales (sucesiones de fórmulas). Gödel, al investigar estas cuestiones, se dio cuenta de que la metamatemática, dedicada al examen de las posibilidades combinatorias de los formalismos, era de una índole no muy distinta a la de la aritmética constructiva, y mediante un ingenioso artificio creado por él logró *traducir* sus enunciados a la aritmética (es decir, *subsumió* la metamatemática en la aritmética). Básicamente, la idea consiste en substituir los objetos del formalismo –signos, fórmulas, pruebas formales– por números de tal modo que las reglas de construcción del formalismo (i. e. las reglas que rigen la edificación de fórmulas y pruebas) queden expresadas en términos de simples operaciones con los números correspondientes. De este modo, el *discurso* metamatemático se convierte en un *discurso* aritmético. Este método se aplica prácticamente a cualquier formalismo, incluyendo todos los sistemas ideados por Hilbert y su escuela para la aritmética y la teoría de conjuntos. En particular, al aplicar este novedoso método a la teoría formal de los números –digamos, a un sistema como el sistema $\mathbb{Z}$ recién mencionado–, la metateoría (i. e., la disertación metamatemática)[4] se convierte en parte de la teoría formalizada, pues sus enunciados son de corte aritmético, y sus proposiciones se pueden expresar dentro de la teoría formal (suponiendo que ésta es suficientemente expresiva). Con ello, la metamatemática queda formalizada en la teoría de que trata.

Con este recurso a su disposición, Gödel mostró cómo construir en cualquier formalismo A que contenga una representación de la aritmética recursiva (como, por ejemplo, $\mathbb{Z}$) dos fórmulas que desde el punto de vista metamatemático expresan dos cuestiones relevantes:

1) una fórmula G que *dice* de sí misma ser indemostrable en A, es decir, que afirma, en su lectura metamatemática, que *La fórmula G es indemostrable en A*;

2) una fórmula C que afirma la consistencia de A, es decir, que en su lectura metamatemática, afirma que *en el sistema A no es posible probar dos fórmulas ϕ y $\neg\phi$, una de las cuales es la negación de la otra.*

Estas dos fórmulas son los principales actores de los famosos teoremas de incompletud de Gödel que, dado nuestro interés en el problema de la consistencia, debemos citar de manera más precisa. En ellos se hace referencia explícita a la propiedad de la consistencia y los podemos enunciar parcialmente como sigue:

(1) Si el sistema A es consistente, entonces G es indemostrable en A.

(2) El enunciado C que expresa la consistencia de A es indemostrable en A.

El primer teorema tiene consecuencias muy interesantes respecto a la relación entre las nociones de *verdad y demostrabilidad* en la aritmética. Supongamos que A es en realidad consistente. Dado que G dice de sí misma que es indemostrable en A, se sigue de inmediato que es verdadera, pues en realidad G no se puede demostrar en A. Por otra parte, añadiendo como hipótesis que A es ω-consistente (véase la nota

[4]En general, el prefijo *meta* indica que se trata de una noción perteneciente a la metamatemática, no al formalismo, como cuando se dice *metateorema*, *metavariable*, *metateoría*, etc.

al pie)[5], se prueba que la fórmula $\neg G$ tampoco es demostrable en A, y G es *indecidible* en el formalismo (es decir, A no lo *decide*), aunque su verdad se ha determinado mediante consideraciones metamatemáticas. La conclusión a la que se llega mediante esta extraña situación es que el conjunto de fórmulas demostrables en A no coincide con el de fórmulas verdaderas (G es verdadera si y sólo si no es demostrable en A).

Por su parte, el metateorema (2) es de suma importancia para el problema de la consistencia. Su demostración se logra formalizando en A la del metateorema (1), es decir, derivando en A la fórmula

$$C \to G$$

que es la transcripción formal de la proposición (1). Si la fórmula C, que expresa la consistencia de A, fuese demostrable en A, también lo sería la fórmula G, pues se tendría como teoremas C y $C \to G$, y G se inferiría en un sólo paso, cosa que, por el primer teorema, sabemos que no sucede en caso de que A sea consistente. Por consiguiente, la fórmula C no es demostrable en A, es decir, A es *incapaz de probar la fórmula C que afirma su propia consistencia.* He aquí dos limitaciones inherentes a los formalismos aritméticos considerados por Hilbert: no pueden ser completos en un sentido absoluto, ni pueden contener la garantía de su propia coherencia. Para probar la consistencia de la aritmética, del análisis o de la teoría de conjuntos no queda otro recurso que ir más allá de lo que permite el sistema, i. e., hay que recurrir a métodos más generales que aquellos que figuran en el formalismo.

La situación anterior trajo consigo una enorme desilusion entre los seguidores del programa, pues se hizo evidente que una solución como la propuesta por Hilbert para el problema de los fundamentos, basada en una prueba elemental de la consistencia de una teoría como la de Cantor, estaba lejos de ser alcanzada. Nuevamente se suscitaban problemas que habrían de estimular el avance y desarrollo de la matemática.

> La solución esperada por Hilbert al problema de la consistencia apuntaba en la dirección opuesta a la señalada

[5]Una aclaración técnica. Un formalismo es ω-inconsistente si para algún predicado $P(x)$ se tiene que $\neg P(k)$ es demostrable para cada $k \in \mathbb{N}$ al igual que la fórmula $\exists\, xP(x)$; de lo contrario se dice que es ω-consistente. La segunda parte del teorema (1) es la siguiente:

(1') Si el sistema A es ω-consistente, entonces $\neg G$ es indemostrable en A.

La ω-consistencia es una condición más poderosa que la de consistencia simple. Esta hipótesis fue eliminada posteriormente por Barkley Rosser en favor de la consistencia simple en 1936, por lo que aquí no nos ocuparemos más de ella.

por el segundo teorema de Gödel. Desde el punto de vista de Hilbert, las teorías matemáticas habrían de formar una suerte de pirámide en cuya base se encontraría aquella formada por los elementos más simples. Esta base serviría como punto de partida para asegurar la consistencia de todo el edificio. Así, por ejemplo, la aritmética finitista probaría la consistencia de la aritmética de Peano, y una vez probada la coherencia de ésta última se le podría utilizar para probar la consistencia de, digamos, la teoría de conjuntos sin el axioma de elección, para a su vez utilizar esta teoría en una prueba de la consistencia de la teoría de conjunto con el axioma de elección, etc. de modo que cada vez que se hubiera probado la consistencia de un nivel, lo habido en él se podría utilizar para asegura la consistencia de los subsiguientes niveles, cada vez más complejos. No obstante, a la luz del teorema de Gödel se puede ver que la situación es otra. En efecto, si *acabar* un sistema significa probar su consistencia, es imposible contentarse con las suposiciones que en él se hacen (no basta considerar el sistema a la luz de sus métodos y principios, pues estos son insuficientes para probar su consistencia: hay que hacer la siguiente suposición). Para continuar con nuestra metáfora diremos que la imagen de la pirámide ha de ser invertida, ya que para consolidar un *piso* ¡es necesario construir el siguiente! (Para acabar un sistema, hay que acabar el sistema que formaliza la prueba de su consistencia). En tal caso, como afirma Jean Piaget, la base de la pirámide se encontraría suspendida en la cúspide, una cúspide inconclusa por si misma, y que debe ser elevada sin cesar. En verdad, las consecuencias del teorema Gödel para el programa de Hilbert fueron devastadoras.

Gentzen et al

Tras la catástrofe gödeliana todo parecía indicar que lo único que quedaba por hacer era finiquitar las investigaciones y marcharse a casa. Pareciera como si la teoría de la demostración hubiese fracasado, pues ¿quién iría a estar satisfecho con una justificación de la matemática transfinita de Cantor que fuese más amplia que la teoría cantoriana? Los seguidores del *programa* adoptaron actitudes que iban desde la incredulidad hasta la resignación. Hilbert mismo se negó a aceptar la imposibilidad de una prueba de consistencia finitista, mientras que otros optaron por modificar el *programa*, renunciando a la pretensión de una prueba *absoluta* de consistencia. De inmediato se planteó el siguiente problema: hallar una prueba de consistencia que cayese fuera del formalismo en cuestión pero que fuese aceptable para todos, incluyendo a los intuicionistas. Esto al menos para algunos fragmentos de la matemática. La búsqueda de tales pruebas inició de inmediato.

No hubo de pasar mucho tiempo antes de que se hubiesen obtenido algunos resultados en relación a la aritmética. En 1936 Gerhard Gentzen, un joven colaborador de Hilbert, logró probar la consistencia de la aritmética mediante un argumento que no es finitista en el sentido estricto de la palabra, pues en él se acepta como evidente un argumento inductivo que penetra en la segunda clase de los números ordinales de Cantor. Pruebas similares fueron presentadas posteriormente por Ackermann (1940), Lorenzen (1951), Schütte (1951, 1960), Gödel (1958) y Hlodovskii (1959). El problema con este tipo de demostraciones es que implican la aceptación de principios en general más poderosos e inciertos que aquéllos cuyo funcionamiento consistente se prueba con ellos. Por ejemplo, la demostración de Gentzen asegura que el principio de inducción finita, fundamental en la demostración de múltiples teoremas de la aritmética y del análisis clásico, es compatible con los demás axiomas de Peano acerca de los números naturales.[6] El inconveniente radica en que la demostración hace uso de una extensión un tanto del principio de inducción, que lo acepta como válido no sólo para los números naturales, sino para una clase más extensa de números que los contiene como un subconjunto propio: nos referimos a los números ordinales numerables, definidos y estudiados en la teoría transfinita de Cantor, y de los que aquéllos no son sino la parte correspondiente a los conjuntos finitos.

Si bien a la luz del segundo teoremas de Gödel difícilmente podríamos imaginar cómo podrían ser las cosas de otra manera, el teorema de Gentzen nos muestra cuál es el mínimo requerido para lograr la demostración de consistencia de la aritmética de Peano, es decir, el mínimo que debemos suponer dadas las restricciones impuestas por Gödel. No obstante, desde un punto de vista epistemológico, la demostración no se puede considerar como un fundamento de la teoría, pues en ella se supone algo más poderoso que la inducción finita para

[6]El principio establece lo siguiente: que si una propiedad $P(x)$ es válida para $x = 0$ y es *hereditaria*, en el sentido de que si un número n tiene la propiedad, también su sucesor sn la tiene, (i.e., que $P(n) \to P(sn)$ para todo $n \in \mathbb{N}$), entonces la propiedad es válida para todos los números naturales: $\forall x \in \mathbb{N},\ P(x)$.

asegurar a la inducción finita.

En cuanto a la demostración de consistencia de la aritmética de Peano, al final del texto el lector encontrará un apéndice con un comentario una tanto técnico de la demostración que diera Schütte en 1951, la cuál no es substancialmente distinta a la de Gentzen. Creemos relevante incluir este comentario en la medida en que muestra el avance y el tipo de desarrollos a que condujo el problema de la consistencia en el siglo veinte, siendo tal resultado quizá el más importante que se ha logrado en este renglón. Aún así, no se puede negar que el razonamiento de Gentzen tuvo que pagar el precio de un nivel substancialmente menor de evidencia que el esperado por Hilbert. El problema radica en que si se duda de los métodos de la aritmética ordinaria como, por ejemplo, de la inducción finita, cuya consistencia se quiere probar, con mayor razón se debe dudar de aquellos métodos que hacen uso de la inducción transfinita. De acuerdo con el *programa*, lo que procedería en tal caso sería formalizar tales métodos de inducción transfinita y comprobar que el nuevo sistema es consistente como garantía de su fiabilidad. No obstante, dado que la misma forma de inducción no sería suficiente para asegurar la consistencia del sistema que la formalizase (a consecuencia del segundo teorema de Gödel), sería necesario recurrir a sistemas de tipo *superior*, cada uno de los cuales estaría a su vez en espera de su respectiva prueba de no contradicción (como ya lo hemos señalado). En este sentido, pocos han sido los avances reportados, y en la actualidad casi nadie investiga el problema en tanto que búsqueda de un fundamento para el análisis clásico o la teoría de conjuntos: en esas zonas no se han logrado grandes victorias.

El presente, el futuro

Al reflexionar sobre el valor de las pruebas de consistencia surge la duda sobre si éstas algún día ocuparán el sitio de privilegio que Hilbert había reservado para ellas, en el sentido de asegurar la solidez de todo el edificio matemático. En el mejor de los casos, lo que priva es la confusión. Escuchemos algunas opiniones contrastantes al respecto:

> La búsqueda de tales métodos de deducción [métodos que desbordan el marco de los sistemas que se examinan y que sin embargo estructuran alguna capacidad concreta de nuestras mentes finitas, de modo que aun los intuicionistas los aceptarían] comenzó de inmediato, y se vio coronada por el éxito. Gentzen encontró la herramienta bajo la forma de

> la *inducción transfinita*, con cuya ayuda logró probar la no contradicción de la teoría de los números en su totalidad. El rebaño de los números naturales puede vivir y desarrollarse en paz; ningún lobo podrá volverse contra él. (Péter, 1961, p. 247).

> El valor de verdad que puede atribuirse a este razonamiento [el de Gentzen] es sin duda menor que el de los que satisfacen las exigencias iniciales de Hilbert, y es esencialmente una cuestión de psicología para cada matemático. (Bourbaki, 1972, p. 70).

> Cuando G. Gentzen llenó el vació de una prueba de consistencia para la aritmética, ... , logró su propósito sólo con una disminución substancial del estándar de evidencia de Hilbert. La línea divisoria de los que es intuitivamente digno de confianza se torna de nuevo imprecisa. En la medida en que toda la energía se hubo de canalizar a la defensa del terruño aritmético, la invasión del análisis nunca se emprendió, por no mencionar la teoría general de conjuntos.

> Este es el punto en el que se encuentra el problema; no hay a la vista ninguna solución. Pero al margen de lo que nos depare el futuro, es indudable que Hilbert y Brouwer condujeron el problema de los fundamentos de las matemáticas a un nuevo nivel. Un regreso al punto de vista de Russell y Whitehead en Principia Mathematica es inimaginable. (Hermann Weyl, 1944a, p. 620).

Para resumir diremos que ha menester no insistir en las pruebas de consistencia como única vía de validación de las teorías axiomáticas. En este sentido éstas han perdido casi todo su valor. No obstante, como tema de investigación se presentan como un verdadero reto tras las restricciones impuestas por los teoremas de Gödel, acentuando su atractivo. Para quienes se interesan en el fundamento de las matemáticas se plantea el problema de investigar si el programa de Hilbert es parcialmente realizable, es decir, de determinar si alguna *porción* de la matemática transfinita se puede justificar por medio de una prueba finitista de consistencia, cuestión interesante por sí misma. También debemos mencionar el problema de investigar qué otros métodos podrían ser útiles para atacar el problema de los fundamentos. Ante la imposibilidad aparente de una justificación finitista surge la pregunta: ¿a qué teorías constructivas se puede reducir la matemática? La búsqueda de un programa reduccionista de tal índole es materia de investigación en la actualidad.

No obstante, el sitio de mayor interés en torno a los fundamentos se ha desplazado a otro lugar. A diferencia de Hilbert, ya no se trata de justificar las teorías axiomáticas, sino de investigar los vínculos entre la matemática constructiva y la no constructiva. Todo esto se engloba en lo que se sigue llamando *teoría de la demostración*, aunque con un sentido distinto. Si en un principio el horizonte se limitó a los métodos finitistas, esto se debió al radicalismo epistemológico de Hilbert y al papel asignado a la metamatemática. Pero al liberarse la teoría de la demostración (ahora distinta de aquélla) del fardo de ser un instrumento para la solución del problema del fundamento de las matemáticas, se le transformó, en el fondo, en un medio para explorar la dos tendencias predominantes en matemáticas, la constructiva y la platónica. Este fue el destino de lo que inicialmente planteó Hilbert como el problema de investigar la consistencia de la aritmética, el sitio al que se llegó tras el impulso que el problema dio a la investigación y a nuevos desarrollos. En esto Hilbert no se equivocó: la vida de la matemática son sus problemas, la búsqueda de soluciones, la sed de saber, y sin el afán de resolver el problema de la consistencia jamás habríamos tenido el privilegio de un Gödel, al menos del Gödel que conocimos.

Apéndice. La prueba de Schütte

La prueba de Schütte presupone cierta familiaridad con la aritmética ordinal de Cantor y la lógica matemática. Si el lector no se siente cómodo con su lectura, le recomendamos que le dé una ojeada superficial o la abandone por completo sin sentirse desesperanzado.

Grosso modo, el procedimiento seguido por Schütte es el siguiente. Supongamos que lo que se quiere es probar la consistencia del formalismo aritmético $\mathbb{Z}$. Para tal fin Schütte construye un sistema de deducción natural $\mathbb{Z}^*$ con el mismo lenguaje que $\mathbb{Z}$ y las siguientes propiedades:

(1) Si una fórmula ϕ es derivable en $\mathbb{Z}$, también lo es en $\mathbb{Z}^*$

(2) Si P es una derivación de una fórmula ϕ en $\mathbb{Z}^*$, entonces P se puede reemplazar por una derivación P' de ϕ con la propiedad de que todas las fórmulas elementales que figuran en P' siguen estando presentes en ϕ, con la posible substitución de términos constantes por variables (las fórmulas elementales son todas aquellas de la forma $s = t$ ó $\neg(s = t)$, donde s y t son términos cualesquiera).

Los axiomas de $\mathbb{Z}^*$ son las *fórmulas elementales cerradas* (sin variables) que son *correctas*, es decir, que al ser evaluadas conforme a las operaciones de suma, producto y sucesor dan lugar a un enunciado aritmético verdadero. Por ejemplo, $2 \cdot (2+3) = 10$ y $\neg(2 \cdot 3 = 5)$ son fórmulas elementales cerradas que, siendo verdaderas en tanto que enunciados aritméticos, son axiomas de $\mathbb{Z}^*$; por el contrario, $1+1=0$ y $\neg(0=0)$ no son axiomas de $\mathbb{Z}$, pues como enunciados aritméticos son falsas.

Una característica del sistema $\mathbb{Z}^*$ que lo distingue de $\mathbb{Z}$, y en general de los sistemas formales considerados por Hilbert, es que incluye una singular regla de inferencia que admite una infinidad de premisas; a ésta se le llama *Regla de Inducción Infinita.* Las demostraciones basadas en ellas son una extensión de la noción tradicional de demostración, en la que sólo se admite un número finito de premisas en cada paso. La regla se enuncia así:

Del conjunto $\{A(k) \wedge D \mid k \in N\}$ se infiere $\forall x A(x) \wedge D$ (Ind. inf.)

Con base en el teorema (2) es fácil demostrar la consistencia de $\mathbb{Z}^*$. En efecto, si el sistema fuese inconsistente, la fórmula $\neg(0=0)$ sería un teorema. No obstante, esta fórmula sólo sería derivable de otras con la misma forma, por lo que los axiomas considerados en su derivación deberían ser iguales a ella, es decir, se debería tratar de un axioma, lo que no es el caso. En virtud del teorema (1), la consistencia de $\mathbb{Z}$ es una consecuencia inmediata de la de $\mathbb{Z}^*$, pues si $\mathbb{Z}$ fuera inconsistente la misma contradicción se podría derivar en $\mathbb{Z}^*$. Sin entrar en detalles, diremos que en la prueba del teorema (2) se recurre a la inducción transfinita. Su uso en la demostración de Schütte se logra asignando en cada derivación de $\mathbb{Z}^*$ un número ordinal a cada una de las fórmula que figuran en ella. Dada la forma en que se hace la asignación, es indispensable llevar la inducción hasta un número ordinal que abarque a todas las derivaciones posibles. Dicho número no es finito, sino el ordinal ε_0, el primer ordinal transfinito inaccesible por medio de las operaciones de suma, producto y exponenciación con ordinales menores que él.[7] Así, el recurso a la inducción transfinita es inevitable.

> En la prueba del teorema (2) se considera inicialmente una derivación que no cumple con el enunciado del teorema, es decir, una derivación en la que se aplicaron reglas de inferencia en cuya conclusión ya no figuran algunas fórmulas

[7] Formalmente, ε_0 se define como sigue: $\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$, donde ω es el conjunto de los ordinales finitos, cuyos elementos podemos identificar con los números naturales.

presentes en las hipótesis. Se procede entonces a demostrar que el último paso en que se aplicó alguna de tales reglas se puede substituir con un derivación que no recurre a ellas (es decir, que en el *árbol* de la derivación se puede *podar* cada rama en que se han aplicado tales reglas e *injertar* en su lugar otra deducción en la que no se recurre a ninguna regla de tal naturaleza y que tiene la misma conclusión). Por el modo en que se asignan los números ordinales a las fórmulas de la derivación, hay, para cualquier ordinal $\alpha < \varepsilon_0$ una prueba con ordinal $\beta > \alpha$, pero a todas ellas les corresponde siempre un ordinal $\beta < \varepsilon_0$. Por tanto, la inducción transfinita no se puede detener antes de ε_0.

Aunque a la luz de la matemática constructiva la inducción transfinita hasta ε_0 aún conserva un cierto valor, en el sentido de que comenzando con cualquier derivación P por complicada que ésta sea, en sólo un número finito de aplicaciones del procedimiento se habrá llegado a la derivación P' referida en el teorema (2), no podemos decir que esta peculiar aplicación de la inducción transfinita hará sentir más seguro a alguien que duda del principio de inducción finita: en este sentido, la prueba de consistencia de Schütte no tiene ningún valor epistemológico; más bien, su interés radica en que establece un vínculo entre fragmentos progresivos del principio de inducción y permite explorar el alcance de algunos métodos constructivos de demostración (esto en el sentido laxo de la palabra) que a su vez podrían ser útiles al investigar el problema de la consistencia del análisis o algunas de sus partes. En esta dirección ya hay algunos resultados en la teoría de la demostración, aunque a éstos no se les atribuye ningún valor como fundamento, sino como respuestas a problemas teóricos de interés general.

Referencias

Benacerraf, Paul, y Putnam, Hilary, (editores)
1983 *Philosophy of mathematics, selected readings*, Cambridge, Massachusetts, Cambridge University Press, 1983.

Bourbaki, Nicolás,
1972 *Elementos de historia de las matemáticas*, Madrid, Alianza Universidad, 1972.

Cavaillès, Jean,
1992 *Método Axiomático y Formalismo.* Colección Mathema, UNAM. México, 1992.

Feferman, Solomon,
1988 ≪Hilbert's program relativized: proof-theoretical and foundational reductions≫, *Journal of Symbolic Logic*, **53** (2).

Gentzen, Gerhard,
1969 *The Collected Papers of Gerhard Gentzen* (editado por M. E. Szabo). Amsterdam, North-Holland Publishing Company.

Gödel, Kurt,
1931 ≪On Formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I≫, en van Heijenoort 1967, 82–108.

Heijenoort, Jean van, (editor)
1967 *From Frege to Gödel*, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1967.

Hilbert, David,
1899 *Foundatios of Geometry*, La Salle, Illinois, Open Court Publishing Co., 1962, vii–143.

1900 ≪Acerca del concepto de número≫, En Hilbert 1993, 17–22.

1917 ≪El pensamiento axiomático≫, En Hilbert 1993, 23–35.

1922 ≪La nueva fundamentación de las matemáticas≫, En Hilbert 1993, 37–62.

1926 ≪Acerca del infinito≫, En Hilbert 1993, 83–121.

1976 ≪Mathematical Problems≫, en *Mathematical Developments Arising From Hilbert Problems*, American Mathematical Society, Vol. 28 parte 1.

(1993) *Fundamentos de las matemáticas* (recopilación), Colección MATHEMA, Facultad de Ciencias, UNAM, 1993.

Kleene, Stephen C.,
1974 *Introduction to Metamathematics.* Princeton, New Jersey, D. Van Nostrand Company, Inc., 1952.

Kreisel, Georg,
1958 ≪Hilbert's Programme≫, en Benacerraf y Putnam, 1983, 207–238.

Körner, Stephan,
1967 *Introducción a la filosofía de la matemática*, México, Siglo XXI editores, 167.

Mendelson, Elliot,
1964 *Introduction to Mathematical Logic*, Nueva York, Van Nostrand Reinhold Company, 1964.

Nagel, Ernest y Newman, James, R.,
1959 *La prueba de Gödel*, México, Cuadernos del Centro de Estudios Filosóficos, UNAM, 1959.

Neumann, John von,
1931 ≪The formalist foundations of mathematics≫, en Benacerraf y Putnam, 1983.

Péter, Rózsa,
1961 *Playing With Infinity*, Nueva York, Dover, 1961.

Rosser, J. Barkley,
1936 ≪Extension of some theorems of Gödel and Church≫, *Journal of Symbolic Logic*, Vol. I, 1936, 87–91.

Schutte, Kurt,
1951 ≪Beweistheoretische Efrassung der unendlichen Induktion in der Zalhentheorie≫, *Mathematische Annalen*, Vol. 122, 369–389. (Nota: la versión de su prueba fue tomada de Mendelson, 1964, 252–271.)

Simpson, Stephen,
1988 ≪Partial realizations of Hilbert's program≫, *Journal of Symbolic Logic*, **53** (2).

Takeuti, Gaisi,
1987 *Proof Theory*, Amsterdam, North Holland, 1987.