Miscelánea Matemática **53** (2011) 101–121 SMM

Evariste Galois y sus trabajos publicados antes de morir

César Guevara Bravo

jcgb@fciencias.unam.mx

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Exterior
Cd. Universitaria
04510 México D. F., México

Resumen

Se comentarán los trabajos de Galois publicados antes del 31 de mayo de 1832. Son cinco textos sobre matemáticas y una carta donde critica al sistema educativo francés. Se verá que algunos de estos artículos son una parte complementaria de otros trabajos que no le fueron publicados antes de la fecha mencionada.

El 31 de mayo de 1832, cuando Evariste Galois tenía solamente 20 años murió como consecuencia de su participación en un duelo. Lo abatían las preocupaciones y anhelos frustrados. Previo al duelo, una de sus últimas comunicaciones fue una carta[1] para sus amigos Napoléon Lebon y V. Delaunay, donde al final les decía:

> "[...] *por favor recordadme, ya que el destino no me ha dado bastante vida para ser recordado por mi patria. Muero vuestro amigo.*"

El paso del tiempo finalmente le dio una respuesta a su petición, y fue de tal magnitud que llegaría a ocupar un lugar fundamental en las matemáticas, cosa que él nunca consiguió en vida.

La vida de Galois está llena de elementos apasionantes que sobrepasan las sensaciones que comúnmente dejan la mayoría de las historias sobre personajes de la ciencia. Si bien es cierto que se han elaborado mitos alrededor de su vida y muerte, también es innegable que sus escasos

[1]Las cartas completas se pueden consultar en [Bourgne y Azra 1997].

veinte años, unas cuantas decenas de páginas de trabajo matemático, así como su disidencia política, generaron las bases suficientes para que fuera reconocido como uno de los íconos de las matemáticas de todos los tiempos.

En este contexto es comprensible que algunos interesados en el tema centren su atención en los sucesos de la noche previa al duelo o en la memoria que pasó por las manos de Cauchy, Fourier y Poisson. Para entender de manera integral la vida y obra de Galois, es conveniente adentrarse más allá de lo acontecido en la noche del 29 de mayo de 1832; es necesario voltear por lo menos hacia los últimos tres años de su vida y conocer las ideas que influyeron en su pensamiento, sus lecturas y primeros objetivos.

En vida solo pudo ver publicados cinco de sus trabajos matemáticos, y aunque es conocido que no se le publicó antes de morir su memoria más importante y trascendente, sí es importante saber cuáles le fueron aceptados. Estas aportaciones son un primer reflejo de lo que le interesaba a Galois y muestran que sus ideas no son el resultado de un conmovedor esfuerzo emprendido unas horas antes de morir.

En las secciones siguientes se comentarán partes de los trabajos que le fueron publicados en vida, y aunque examinados por separado pareciera que no son los más importantes, estos reflejan los intereses de un joven de diecinueve años que ya había transitado por los caminos de las obras de Legendre, Lagrange, Gauss y Abel, entre otros.

1. Las fracciones continuas

Galois nació (1811) en una época complicada para Francia. En 1812 Napoleón invadió Rusia. Como es sabido, obtuvo pésimos resultados y con su caída del poder en 1815 se acabó la era napoleónica. Con la llegada al poder de Luis XVIII la burguesía pensó que era posible regresar a un escenario semejante al de antes de 1789, pero todo quedó en un proyecto. En 1824 Carlos X reemplazó a su hermano y la clase gobernante esperó que la situación mejorara, pero no fue así, y esto llevó a los franceses a circunstancias parecidas a las que desencadenaron los brotes revolucionarios cuarenta años antes.

Hasta estos años Evariste no había tenido contacto con profesores de matemáticas, su educación y la de sus hermanos había estado a cargo de su madre, de la que recibió buenas bases de latín y griego. En 1823, cuando tenía doce años, entró en contacto con la educación institucional. El liceo al que acudió a estudiar fue el *Louis le Grand*, de los pocos que aún funcionaban en París, dadas las complicaciones causadas por los sucesos de la revolución. Los primeros dos años en el liceo le fueron de mucho beneficio, pero en el tercer año surgen inconvenientes que lo orillan a tener que repetir algunos cursos del periodo 1826-1827. Resignado, tuvo que repetir el curso denominado como 'segunda clase'. Gracias a esta disposición de las autoridades del liceo, también cambió de profesor de matemáticas y así conoció a Jean Hippolyte Vernier, quien lo incentivó a buscar cosas novedosas en las matemáticas. Y fue en ese entorno que empezó a leer a Legendre, Lagrange y Gauss. Un tema común entre los autores mencionados fue la teoría de ecuaciones, y sin mayor preámbulo Galois la empezó a estudiar con gran atención.

En octubre de 1828 conoció en el liceo al profesor Louis Émile Richard,[2] y en poco tiempo encontró en él a un entusiasta de las matemáticas, que estaba enterado de las investigaciones recientes y dispuesto a ponerle especial atención cuando aún era un joven de diecisiete años.

De sus reuniones con Richard y de la lectura de Lagrange, surgió un escrito que le fue publicado en abril de 1829 por la revista *Annales de mathématiques pures et appliquées*. Este fue su primer trabajo sobre el tema de raíces de funciones polinomiales, y lo tituló: *Démonstration d'un théoréme sur les fractions continues périodiques*.[3] Antes de pasar a ver el contenido del artículo, primero se revisará cuál fue el punto de partida de Galois para estos resultados de fracciones continuas.

La fuente de Galois es muy directa. En el artículo menciona el trabajo de Lagrange [1826], y aunque no dice cuál es la obra, no es difícil saber que se refería al *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*. En el capítulo III del *Traité*, titulado *Nouvelle méthode pour approcher des racines des équations numériques*, Lagrange menciona que se pueden encontrar valores aproximados de una raíz de la ecuación

$$f(x) = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots = 0.$$

Primero supone que se puede localizar un intervalo $(p, p+1)$, con p entero, alrededor de una raíz.[4] Después propone que la raíz x se

[2] A Richard lo conoció cuando regresó al liceo después de haber intentado entrar a la *École Polytechnique*, de la que fue rechazado porque consideraron que no tenía la preparación suficiente. Este hecho le generó un resentimiento permanente contra las autoridades educativas.

[3] Los artículos que publicó Galois se pueden consultar íntegramente en [Bourgne y Azra 1997], [Toti Rigatelli 2000] o directamente en las revistas donde originalmente Galois publicó los trabajos.

[4] Es importante señalar que en este intervalo pueden existir más raíces, pero parece que Lagrange centra su atención en una de ellas.

puede escribir de la forma $x = p + \frac{1}{y}$, con $y > 1$;[5] posteriormente sustituye este valor de x en $f(x)$ para obtener un nuevo polinomio en términos de la variable y. Como $y > 1$ entonces el nuevo polinomio tendrá una raíz también mayor que 1, y si se sigue el mismo proceso ahora para un intervalo $(q, q+1)$, y con $q \geq 1$, entonces se deduce que y puede ser representado como $y = q + \frac{1}{z}$. De la misma forma se procede para $z = r + \frac{1}{u}$, y así sucesivamente para u y para los demás números mayores o iguales que 1 que se generan en el proceso. Posteriormente se sustituyen todas las igualdades a partir de $x = p + \frac{1}{y}$, y se obtiene:

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{t + \dots}}}}$$

Así, la aproximación que ofrece Lagrange queda en términos de los convergentes que se generan cada vez que se sustituye una de las $y, z, u, \ldots$. Entonces, en la medida que cada convergente tiene más términos se llega a un racional que se aproxima más a la raíz x.[6]

Para Galois parece que era importante mostrar que concordaba con la obra de Lagrange en lo que corresponde a este tema. Desde el inicio lo menciona y deja ver que conoce su teoría de las fracciones continuas, mismo método que usará al final de su artículo para calcular las raíces de una cuadrática, que es el ejemplo para algunos de los resultados que propuso en el documento.

El camino que siguió Galois para este artículo va en el sentido de que si la fracción continua –que representa a una irracionalidad cuadrática– es periódica, entonces existirá otra raíz –es decir, otra irracionalidad cuadrática– que también podrá ser representada por una fracción continua periódica.

El resultado que enuncia formalmente establece que si en una ecuación de cualquier grado se tienen dos raíces irracionales periódicas que corresponden a un mismo factor racional de segundo grado, y si una de

[5] Recuérdese que en el método de Newton se considera que x puede ser sustituida por $x = p + y$.

[6] Lagrange en el capítulo VI de su obra consideró tambin la posibilidad de que la raíz mencionada se encontrara más cerca de $(p+1)$ que de p, y para este caso propuso a $x = (p+1) - \frac{1}{y}$, en lugar de $x = p + \frac{1}{y}$, después asume un proceso semejante al anterior, pero nótese que las características de lo que es una fracción continua simple se modifican.

estas raíces es inmediatamente[7] periódica, entonces existe una relación "curiosa" de esta primera fracción continua con la segunda raíz. Esto queda formalizado en el siguiente resultado

Teorema 1 *Si una de las raíces de una ecuación de cualquier grado es una fracción continua inmediatamente periódica, entonces esta ecuación tendrá necesariamente otra raíz igualmente periódica que se obtiene al dividir la unidad negativa por la fracción continua anterior, pero escrita en el orden inverso.*

Esto es, si se tiene una ecuación de la forma $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots = 0$ que tiene una solución obtenida a través del método de Lagrange, y que se puede representar por una fracción continua periódica

$$x_1 = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \dots}}}}}$$

entonces la segunda solución será de la forma

$$x_2 = -\cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \dots}}}}}}$$

Al inicio de la demostración supone que la raíz x_1 es mayor que uno, ya que considera que $a > 1$, pero al final de la demostración contempla la posibilidad de que la raíz sea menor que 1, y plantea que si

$$x_1 = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{a + \dots}}}}} \text{ entonces } \frac{1}{x_1} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \dots}}}}}$$

[7]El término 'inmediatamente periódica' es equivalente a lo que hoy se conoce como 'periódica pura'.

y con un proceso semejante al anterior llega a x_2. Aquí termina su demostración.

Nótese que el enunciado del teorema señala que el resultado vale para una ecuación de cualquier grado; en la demostración se referirá, como ya se mencionó antes, a las ecuaciones cuadráticas o a factores cuadráticos de ecuaciones de grado mayor.[8]

Después de probar el teorema ya tiene la idea de que si la raíz irracional x_1 de una ecuación está representada por una fracción continua inmediatamente periódica M, entonces existirá otra fracción N que se obtiene al invertir el periodo y da lugar a la otra raíz $x_2 = -\frac{1}{N}$, y aunado a lo anterior señala que si $M > 1$ entonces $-1 < -\frac{1}{N} < 0$, y viceversa si $-1 < M < 0$ pasa que $-\frac{1}{N} > 1$.

Este resultado que mencionó de manera informal, y no el teorema que enunció, es actualmente el punto más conocido respecto a este artículo, y en términos modernos dice:

El número real ζ es una fracción continua periódica pura si y sólo si ζ es una irracionalidad cuadrática y además cumple que $\zeta > 1$ y $-1 < \zeta' < 0$, donde ζ' es la otra raíz.[9]

Con el resultado anterior Galois está marcando la diferencia respecto a sus antecesores. Por un lado Euler [1796] abordó en la *Introduction a l'analyse infinitésimale* el hecho de que *el valor de una fracción continua periódica constituye una irracionalidad cuadrática*, y esta fracción continua a la vez proporcionaba una aproximación racional de una de las raíces de la ecuación respectiva. Por su lado Lagrange tenía –aunado a lo que ya se mencionó– el inverso del teorema de Euler, es decir, que *toda irracionalidad cuadrática se representa mediante una fracción continua periódica.* Estos resultados sin duda le proporcionaban a Galois la seguridad de que la ecuación de su teorema tenía por lo menos una raíz que se representaba por una fracción continua. Pero la contribución que complementó el trabajo de sus antecesores fue la de obtener directamente la segunda irracionalidad cuadrática a partir de la primera, que está representada por una fracción continua periódica pura.

---

[8]Por ejemplo, del teorema se puede ver que si $2x^2 - 6x - 3 = 0$, entonces

$$x_1 = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{55}{16} \quad \text{y} \quad x_2 = -\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}} = -\frac{24}{55}$$

donde x_1 y x_2 son convergentes que se aproximan a las raíces irracionales.

[9]Lo que conocemos como el conjugado algebraico.

De esta forma Galois se presentó por primera vez ante la comunidad matemática y sin duda este avance fue un aliciente en su vida.

El año 1829 auguraba grandes momentos en su vida: por un lado en abril publicó el primer artículo, y por otro, en mayo su maestro Richard lo impulsó para que presentara ante la *Academia de Ciencias* de París las que serían sus primeras aportaciones originales. Escribió dos trabajos, el *Recherches algébriques* y el *Recherches sur les équations algébriques de degré premier*, que constituyeron el punto de partida para dar a conocer su criterio respecto a cuáles ecuaciones polinomiales, con coeficientes racionales, podían ser resueltas por radicales a partir de los coeficientes. Este era uno de los grandes problemas pendientes de las matemáticas, y para resolverlo Galois usó una nueva estructura vinculada a las raíces de la ecuación a la que llamó grupo de la ecuación. La ecuación tendría solución por radicales o no la tendría dependiendo de que su grupo tuviera la propiedad que hoy se conoce como solubilidad. En estos dos trabajos es donde se gestaba lo que vendría a ser conocido como la teoría de grupos, y que constituiría un verdadero vuelco para lo que se conocía como álgebra en los inicios del siglo XIX.

El profesor Richard percibía que estos trabajos de Galois eran trascendentes e intercedió ante Cauchy para que fueran presentados a la *Academia de Ciencias*. Richard nunca imaginó que esta memoria sería publicada hasta diecisiete años después.[10]

Lo sucedido con los artículos anteriores parece que fue el inicio de una serie de problemas que erradicaron de su vida la tranquilidad. Su padre se suicidó en julio del mismo año, y unos días después su segundo intento por ingresar a la *École Polytechnique* terminó en un desastre y nunca más podría volver a intentarlo. Todo esto lo llevó a una actitud de desconfianza y de rechazo hacia la clase gobernante.

A pesar de lo acontecido, el año que seguía, 1830, parecía ofrecer a Galois algunos incentivos. Sucedió que en febrero de ese año fue admitido por la *École Normale*, y aunque su objetivo era ingresar a la *École*

[10]El artículo pasó por tres momentos muy difíciles para Galois: i) el que se mencionó, donde Cauchy tuvo el encargo por parte de la *Academia* de emitir un dictamen, pero resulta que este no se dio explícitamente; ii) en enero de 1830 la *Academia* convocó al premio de matemáticas, y para esta ocasión Galois reescribió el artículo que incluía algunos cambios y lo presentó para el concurso. El trabajo fue encargado a Jean Fourier, secretario de la *Academia*, quien se lo llevó y al poco tiempo murió, sin antes haber entregado sus comentarios del artículo de Galois. Esto explica que su trabajo ni siquiera fue contemplado para ser comparado con los de otros competidores; iii) para enero de 1831 tenía escrita una nueva versión de sus teorías, la más depurada y avanzada que Poisson le pidió que redactara. Aquí estaba lo mejor de Galois, pero en julio del mismo año el dictamen fue negativo. Esto se debió a algunos tecnicismos que hoy parecen absurdos.

Polytechnique, esto le proporcionaría al menos un ingreso fijo durante los próximos meses. En el ámbito de lo matemático ya sabía que por el momento su trabajo no sería publicado por la *Academia*, pero aun así no cesó de trabajar y durante ese año le fueron publicados cuatro artículos.

2. Se acerca a Gauss

En abril de 1830 Galois terminó el artículo *Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations*. Este trabajo da a conocer que otra de sus fuentes de conocimiento provenía de las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss [1966]. El *Analyse* de Galois así como otros de sus trabajos tienen puntos comunes con la sección VII de las *Disquisitiones* y aunque en lo general cada uno tiene un proyecto diferente respecto al tema de las ecuaciones, Galois lo tuvo presente hasta los últimos días de su vida, como se puede ver en la carta a Chevalier.[11] Por lo anterior es importante saber qué encontró Galois en esta parte del trabajo de Gauss.

En la sección VII "*Ecuaciones que definen secciones de un círculo*" Gauss pretende dividir el círculo en partes iguales solo con regla y compás, o dicho de otra forma, encontrar lo que hoy conocemos como los polígonos construibles. Desde el inicio de esta sección (parte 335) Gauss enuncia que percibe que la teoría de las funciones circulares, útil para estudiar funciones correspondientes a los arcos que son conmensurables con la circunferencia (*i.e.*, inscribir polígonos regulares), solamente había alcanzado un desarrollo parcial hasta esos días, y señala lo siguiente:

> "la teoría que vamos a explicar de hecho se extiende mucho más allá de lo que indicaremos. Puede ser aplicada no solamente a funciones circulares sino también a otras funciones trascendentales, como aquéllas que dependen de la

[11]El 29 de mayo de 1832 Evariste escribió tres cartas y una fue la que dejó para Auguste Chevalier. En ella establece una serie de recomendaciones y precisiones respecto de sus trabajos sin publicar y también de algunos que sí lo fueron. También le pide a Chevalier que publique esta carta en la *Revue encyclopédique*. Para terminar le dice: "*Haz una petición pública a Jacobi o a Gauss para que den su opinión, no acerca de la veracidad, sino sobre la importancia de estos teoremas. Confío en que después algunos hombres encuentren de provecho descifrar este embrollo*".

Como se puede ver, hasta los últimos momentos Galois esperaba el reconocimiento de su trabajo, lo que revela una conciencia clara de que sus ideas eran innovadoras.

integral[12] $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ pero aquí hemos decidido considerar solamente funciones circulares".

El punto de partida de esta sección fue la división del círculo, pero para llegar a ello desarrolló elementos que enriquecerían la teoría de las ecuaciones algebraicas.

Esta parte del trabajo de Gauss está dedicada principalmente al estudio de la ecuación $x^n - 1 = 0$, con n primo impar, y ahí prueba que la ecuación

$$X = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1 = \frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$$

puede ser resuelta por radicales. Antes de bosquejar el método de Gauss para encontrar las raíces de la ecuación es conveniente ver un ejemplo (con el método usado en su época) para que posteriormente sea más fácil visualizar los elementos que emplea en la demostración. Para $x^7 - 1 = 0$ se tiene que $\frac{x^7-1}{x-1} = x^6 + x^5 + x^4 + \cdots + x + 1 = 0$, ahora se pasa a dividir $x^6 + x^5 + x^4 + \cdots + x + 1 = 0$ entre x^3, y de la nueva igualdad se sustituye $y = x + \frac{1}{x}$, con lo que se obtiene la ecuación $Y_1 = y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$, y utilizando las fórmulas de Tartaglia-Cardano, se encuentran las tres raíces θ_i. Al sustituir las θ_i en $y = x + \frac{1}{x}$ se obtienen tres ecuaciones del tipo $Y_2 = x^2 - \theta_i x + 1 = 0$. Después se resuelven las ecuaciones cuadráticas, obteniendo así por radicales las seis raíces de $x^6 + x^5 + x^4 + \cdots + x + 1 = 0$.

Para estar más cerca de la generalización de Gauss, considérese que en el mismo ejemplo las raíces de $x^6 + x^5 + x^4 + \ldots x + 1 = 0$ se pueden escribir como $r, r^2, \ldots, r^6$, con r una raíz primitiva, y con esto se observa que $\theta_1 = r + r^6$, $\theta_2 = r^2 + r^5$, $\theta_3 = r^3 + r^4$.[13]

Para resolver la ecuación $X = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1 = \frac{x^n-1}{x-1} = 0$ Gauss expresa a las raíces en términos de las raíces de una sucesión de ecuaciones auxiliares $Y_1 = 0, Y_2 = 0, \ldots$, cuyos coeficientes son funciones racionales de las raíces de ecuaciones precedentes de la sucesión. Los grados de las ecuaciones $Y_i = 0$ son los factores primos de $(n-1)$, incluso los Y_i se pueden repetir si se da el caso que existan factores primos repetidos. Para una factorización cualquiera de $(n-1) = rs$, es posible construir r cantidades, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ donde cada una es un 'periodo gaussiano' de s términos. Cada uno de estos periodos satisface una

[12]Gauss se refiere a la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, que tiene la característica de que sus longitudes de arco son compatibles con los valores de la integral mencionada.

[13]Las últimas expresiones de θ_i es a lo que se conoce como los periodos gaussianos, que son sumas de raíces primitivas de la unidad.

ecuación auxiliar de grado r, mientras que cada raíz primitiva n-ésima satisface alguna de las ecuación de grado s, cuyos coeficientes dependen racionalmente de los periodos. Si se factoriza s se pueden obtener más ecuaciones auxiliares, y de esta manera se sigue la factorización de $(n-1)$ hasta llegar solo a factores primos.[14] A través de esta vía Gauss mostró que para la ecuación $X = x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1=0$ se pueden determinar los periodos y otros elementos vinculados a las ecuaciones auxiliares, y estas eran suficientes para obtener las soluciones por radicales.

Es en este contexto del trabajo de Gauss con el que Galois inicia el artículo *Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations* de abril de 1830. Escribió lo siguiente:

> "Se llaman ecuaciones no primitivas a las ecuaciones que siendo de grado, por ejemplo, mn se descomponen en m factores de grado n, mediante una sola ecuación de grado m; éstas son las ecuaciones de Gauss. Las ecuaciones primitivas son aquéllas que no gozan de una simplificación similar".

Inmediatamente después propuso los siguientes resultados para las ecuaciones primitivas:

1. Para que una ecuación de grado primo sea resoluble por radicales es necesario y suficiente que siendo conocidas dos cualesquiera de sus raíces, las otras se deduzcan de las primeras racionalmente.

2. Para que una ecuación primitiva de grado m sea resoluble por radicales es necesario que $m = p^v$, con p primo y v entero positivo.

3. Además de los casos mencionados antes, para que una ecuación primitiva de grado p^v sea resoluble por radicales es necesario que siendo conocidas dos de sus raíces, las otras se deduzcan de las primeras racionalmente.

Estas proposiciones definitivamente no estaban al alcance de un lector común de la época. Lo primero que se requería era conocer el trabajo de Gauss sobre raíces de ecuaciones, y en particular la factorización de polinomios ciclotómicos. En el caso de Galois, cuando menciona las ecuaciones de Gauss se refería a aquellas de la forma $x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1=0$, con n primo impar. Y es más

[14]Para el caso de los polígonos construibles es necesario que $(n-1)$ sea una potencia de 2.

evidente su cercanía a la sección VII del *Disquisitiones* cuando se refiere a la descomposición de las ecuaciones no primitivas de grado mn. El problema es que Galois no explica nada previo antes de enunciar los teoremas.

Su artículo no muestra la importancia que tuvo la teoría de Gauss en sus reflexiones; para poder comprender cómo asimiló Galois estos resultados del *Disquisitiones* es necesario consultar el trabajo que presentó a la *Academia* de París en enero de 1831, *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*, o la carta a Chevalier, entre otros. Más aún, para comprender el fondo del artículo en cuestión, *Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations*, es fundamental consultar, además de lo antes recomendado, el otro trabajo de Galois *Des équations primitives qui sont solubles par radicaux*. Los dos artículos y la carta se estructuran de manera más amplia y cuentan con una metodología más adecuada para tratar de llegar a los objetivos. Galois lo mencionó, el *Analyse* es sólo un lema previo a los resultados que estaban en preparación. Todo el material mencionado que pudo servir para entender lo que Galois quería trasmitir en este artículo se publicó años después de su muerte, entonces era muy difícil que sus contemporáneos entendieran plenamente cuáles eran sus contribuciones para la teoría de ecuaciones.

Además de todo lo anterior también se tiene que considerar que había recibido recomendaciones de que tenía que presentar sus artículos de manera más comprensible; parece que Cauchy y Poisson le hicieron señalamientos al respecto. Como un ejemplo de esto se puede ver que en los enunciados 1) y 3) escribe "*las otras se deducen de esas racionalmente*"; aquí es importante considerar que en la época de Galois el término 'racional' se podía encontrar con diferentes usos. Parece que le hicieron saber que no diera por hecho que los lectores conocían toda su terminología, por eso es que la *Memoria* enviada a la *Academia* en enero de 1831, inicia con una serie de definiciones y lemas, y entre las primeros puntos que trata es el de los conceptos de 'racional' y 'función racional'. Parece que en este artículo ya había entendido lo importante que era la manera de exponer los resultados matemáticos.

Después de las 3 proposiciones finaliza el trabajo enunciando otros resultados y una nota que tratan sobre ecuaciones modulares de funciones elípticas. Dice lo siguiente:

> "1° Sea k el módulo de una función elíptica y p un número primo dado > 3; para que la ecuación de grado $p+1$ con diversos módulos dados de funciones transformadas con relación al número p, sea resoluble por radicales, es necesaria

> una de las dos cosas, o bien que una de las raíces sea racionalmente conocida, o bien que todas sean funciones racionales, unas de las otras. Por supuesto, es para valores particulares del módulo k. Es evidente que no sucede en general. Esta regla no se cumple para $p = 5$.
>
> 2° Es de señalar que la ecuación modular general de sexto grado que corresponde al número 5, se puede disminuir a una de quinto grado que es la reducida. Por el contrario, para grados superiores las ecuaciones modulares no se pueden disminuir".

En el segundo enunciado Galois tiene una imprecisión respecto al grado de las ecuaciones que se pueden reducir. Él mismo lo reconoce[15] en la carta a Chevalier.

3. Un año de aportaciones

En junio de 1830 le publicó el *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques* el artículo *Sur la théorie des nombres*. Este trabajo –al igual que el de abril– se puede considerar como una aplicación de la *Memoria* sobre ecuaciones resolubles por radicales que envió a la *Academia* en febrero de 1830. Dada la relación tan estrecha de *Sur la théorie des nombres* con el trabajo mencionado, entonces no es extraño que la esencia de su contenido sea complicada de entender sin conocer el otro trabajo, y parece que Galois lo entendió posteriormente. En la carta a Chevalier del 29 de mayo le mencionó que había hecho nuevas reflexiones sobre teoría de ecuaciones, y que esto le había dado la oportunidad de profundizar en la descripción de todas las transformaciones posibles sobre una ecuación aún cuando esa no es resoluble por radicales. Le menciona que con la información que deja se pueden hacer tres memorias: de la primera dice que ya está escrita y que a pesar de lo dicho por Poisson él mantiene su posición con las correcciones que ya hizo; sobre la segunda le menciona que contiene unas aplicaciones bastante "curiosas" de la teoría de ecuaciones; la tercera memoria concierne a las integrales. El contenido de la propuesta para la segunda memoria es el que se abordará en los siguientes párrafos, y es porque a través de él se puede entender parte del contenido del artículo *Sur la théorie des nombres*.

[15] Véase a [Toti Rigatelli 2000, p. 47].

Respecto a la segunda, Galois le menciona a Chevalier que de la Memoria que leyó Poisson se ve que cuando un grupo[16] G contiene otro H, entonces el grupo G se puede dividir en grupos, cada uno de ellos se obtiene operando en las permutaciones de H una misma sustitución, así

$$G = H + HS + HS' + \ldots,$$

y también G se puede descomponer en grupos que tengan todos las misma sustituciones, de modo que

$$G = H + TH + T'H + \ldots, .$$

A lo anterior Galois dice que estos dos géneros de descomposición generalmente no coinciden, pero si llega a pasar, entonces a esta descomposición se le llama *propia*.

Después le indica que cuando el grupo de la ecuación no tiene una descomposición propia entonces los grupos de las ecuaciones transformadas tendrán el mismo número de permutaciones. Por el contrario, si el grupo admite una descomposición propia, de manera que se divida en M grupos de N permutaciones, entonces se podrá resolver la ecuación por medio de dos ecuaciones: una tendrá un grupo de M permutaciones, y la otra un grupo de N permutaciones. Cuando en el grupo de la ecuación se agotan las descomposiciones propias entonces se tendrán grupos que sí se podrán transformar. Si estos grupos tienen cada uno un número primo de permutaciones, entonces la ecuación será resoluble por radicales, de otra manera no.

Continuando con los señalamientos a Chevalier, Galois le menciona que las descomposiciones más simples son aquellas que son logradas por el método de Gauss,[17] y es porque las descomposiciones son evidentes, y pregunta ¿cuáles descomposiciones son posibles sobre una ecuación que no es simplificable por el método de Gauss?. Y aquí es cuando le señala a Chevalier que trabajará con las primitivas que en ciertos

[16] La idea de *grupo* en Galois corresponde a un conjunto de permutaciones cerradas bajo la composición.

A lo largo de sus artículos se puede encontrar un proceso de evolución de la idea de *grupo*, que va del manejo de los casos particulares hasta llegar a un sentido más teórico. En *Sur la théorie des nombres* se encuentra el punto de inicio de lo que conocemos como teoría de campos finitos y lo que hoy entendemos como campos de Galois.

[17] Parece que Galois toma de Gauss parte de sus métodos usados para los polinomios ciclotómicos, así como una generalización de la ley de reciprocidad cuadrática. Con lo anterior y del manejo de Galois para ciertos conjuntos de residuos de potencias se llegaría al resultado que ahora conocemos, de que los grupos multiplicativos de campos finitos son cíclicos.

casos pueden ser resueltas por radicales y le menciona que como un lema a la teoría de ecuaciones incluyó en *Sur la théorie des nombres* un análisis sobre ciertas raíces en la teoría de los números, y le dice que ahí encontrará dos teoremas y sus demostraciones. Son los siguientes:

1) Para que una ecuación primitiva sea resoluble por radicales debe ser de grado p^v con p primo y v entero positivo.

2) Todas las permutaciones de una ecuación semejante son de la forma
$$X_{k,l,m,\ldots}/X_{ak+bl+cm+\cdots+h,a'k+b'l+c'm+\cdots+h'+}$$
donde $k, l, m, \ldots$ son v índices que tomando cada uno p valores, indican todas las raíces. Los índices son tomados según el módulo p, esto es, la raíz será la misma cuando se agrega a uno de los índices un múltiplo de p. El grupo que se obtiene operando todas las sustituciones de esta forma lineal contiene $p^v(p^v - 1)(p^v - p)\ldots(p^v - p^{v-1})$ permutaciones.

Pero al final del segundo teorema dice que: "Lejos se está que de esta generalidad las ecuaciones que le corresponden sean resolubles por radicales".

Bajo la perspectiva de algunos de los resultados que Galois consideró importante comunicarle a Chevalier de *Sur la théorie des nombres*, ahora regresamos al inicio del mismo artículo para indicar otros de los puntos sobresalientes. Se puede apreciar que aborda la solución de ecuaciones o congruencias $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$), para $F(x)$ una función algebraica y p primo. Considera que una raíz es de grado v si satisface una ecuación o congruencia de grado v; así Galois caracteriza al conjunto de raíces de una congruencia (módulo p), y en este contexto es que a estas raíces se les conoce hoy como los números 'imaginarios de Galois'.

Para desarrollar su teoría adoptó los residuos de potencias de Euler –además de los de Gauss–, y con ellos tuvo los elementos para llegar más tarde al resultado que en términos modernos dice: "el número de elementos de un campo de Galois de característica p es una potencia de p".

En este artículo se encuentra que el aparato matemático que está construyendo para la solución de las ecuaciones algebraicas, lo tratará de relacionar con la solución de ecuaciones algebraicas primitivas. Galois dice:

"Es principalmente en la teoría de las permutaciones donde se necesita cambiar la forma de los índices, y la consideración de las raíces imaginarias de las congruencias es indispensable. Esto da una manera fácil de reconocer en qué casos una ecuación primitiva tiene solución por radicales".

Así, su propuesta es que dada una ecuación algebraica $f(x)$ de grado p^v, entonces se podrá formar un grupo de permutaciones tal que cada función de las raíces es invariante para estas permutaciones y las raíces deben admitir un valor racional cuando la ecuación de grado p^v sea primitiva y resoluble por radicales.

Casi al final de *Sur la théorie des nombres* dice que el teorema general que acaba de enunciar desarrolla las condiciones que enunció en el *Boletín* del mes de abril. Con esto, se puede ver que todo lo anterior no es fácil entender con base en un análisis individual de los trabajos de abril, junio, la carta a Chevalier y el artículo que envió a la *Academia*; el estudio se tiene que hacer partiendo de lo escrito en 1831 y 1832 y regresar a lo de abril y junio 1830.

Finalmente cabe decir que si bien este trabajo de junio de 1830 tuvo cambios posteriores, sí se reconoce que estaba en la ruta adecuada.

4. El contacto con Legendre

Los meses pasaban y para mediados de 1830 Galois aún no recibía el reconocimiento que esperaba por el trabajo entregado por segunda vez a la *Academia*, pero mientras tanto seguía generando escritos que de algún modo nutrían su gran proyecto sobre las ecuaciones. Entre las personalidades que rondaban su mente no podía faltar la de Adrien Marie Legendre, y aunque trabajaba en diferentes proyectos matemáticos, era imposible que Galois no lo hubiera leído.

El mismo mes de junio de 1830 Galois terminó de escribir la *Note sur la résolution des équations numériques*, publicada también en el *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques.* Este trabajo no es de los que le llevó a las alturas que ahora le reconocemos, pero si se quiere tener una visión más completa de su obra entonces es recomendable adentrarse en él.

En dicho artículo Galois hace comentarios y simplificaciones a un método de aproximación de Legendre para calcular raíces de ecuaciones algebraicas y contiene algunos puntos que es importantes mencionar. Es en este contexto que el espíritu de *Résolution des équations numériques* podría situar a Galois, al menos en algunos momentos, dentro de la posibilidad de resolver problemas específicos a través de cálculos algebraicos, y esto podría ser un elemento de equilibrio, que modifica la idea de que sólo comulgaba con un perfil abstracto del álgebra.

Galois no lo indica explícitamente pero deja ver en el artículo ya mencionado que conocía el *Suppléement del Essai sur la théorie des nombres* de Legendre [1816], y en particular un método de aproximación de raíces de funciones descrito en términos geométricos. Esta manera de aproximar raíces sería el tema de trabajo de su nuevo artículo. En él modificó uno de los procedimientos de Legendre para proponer otra manera que hacía más fácil el cálculo. Su propuesta quedó en términos de una forma analítica que daría lugar a una sucesión que se aproxima a un punto fijo.[18]

4.1. El método de Legendre

Galois conoció los procesos iterativos de Legendre en el *Suppléement*, ahí encontró un método para aproximar raíces de ecuaciones algebraicas.

Legendre consideró el polinomio

$$F(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \cdots = 0. \tag{1}$$

sin raíces múltiples.

La ecuación (1) se puede reescribir de la forma

$$x^n \left[1 + \frac{r}{x} + \frac{s}{x^2} + \dots\right] = ax^{n-k} + bx^{n-k-1} + \dots, \tag{2}$$

en particular el lado derecho de (2) contiene los términos con coeficientes negativos de (1); además, entre los términos $r, s, \dots$, pueden existir ceros. Después se despeja x^n para obtener $x^n = \dfrac{ax^{n-k} + bx^{n-k-1} + \dots}{\left[1 + \frac{r}{x} + \frac{s}{x^2} + \dots\right]}$, aquí necesita que el lado derecho sea positivo y creciente para $x > 0$.

Define $\Gamma(x) = \dfrac{ax^{n-k} + bx^{n-k-1} + \dots}{\left[1 + \frac{r}{x} + \frac{s}{x^2} + \dots\right]}$ y en consecuencia $\Gamma(x) = x^n$. Ahora, Legendre supone que existe por lo menos una raíz positiva para $F(x) = 0$ y que β es la mayor de estas raíces. Después toma las dos funciones $y = x^n$ y $y = \Gamma(x)$, y se tiene que $\Gamma(\beta) = \beta^n$. Posteriormente muestra cómo obtener una aproximación de la raíz β. Toma una θ tal que $\theta > \beta$, y en consecuencia, $\Gamma(\theta) > \Gamma(\beta) = \beta^n$.

Lo que resta del procedimiento para encontrar la aproximación es muy geométrico (ver 4.1). Se localiza primero $\Gamma(\theta)$ y después se traza una paralela al eje de las X en el punto $P_0 = (\theta, \Gamma(\theta))$; esta recta interseca a $y = x^n$ en el punto $P_1 = \left(\sqrt[n]{\Gamma(\theta)}, \Gamma(\theta)\right)$ y, además,

[18]Aunque el argumento de Legendre en gran medida depende de consideraciones geométricas, Galois nunca hace referencia a diagramas.

$\beta < \sqrt[n]{\Gamma(\theta)} < \theta$. El proceso sigue de la misma forma para llegar a $P_2 = \left(\sqrt[n]{\Gamma(\theta)}, \Gamma\left(\sqrt[n]{\Gamma(\theta)}\right)\right)$, $P_3 = \left(\sqrt[n]{\Gamma\left(\sqrt[n]{\Gamma(\theta)}\right)}, \Gamma\left(\sqrt[n]{\Gamma(\theta)}\right)\right)$, y así sucesivamente, hasta que P_i se aproxime tanto como se quiera a la raíz β.

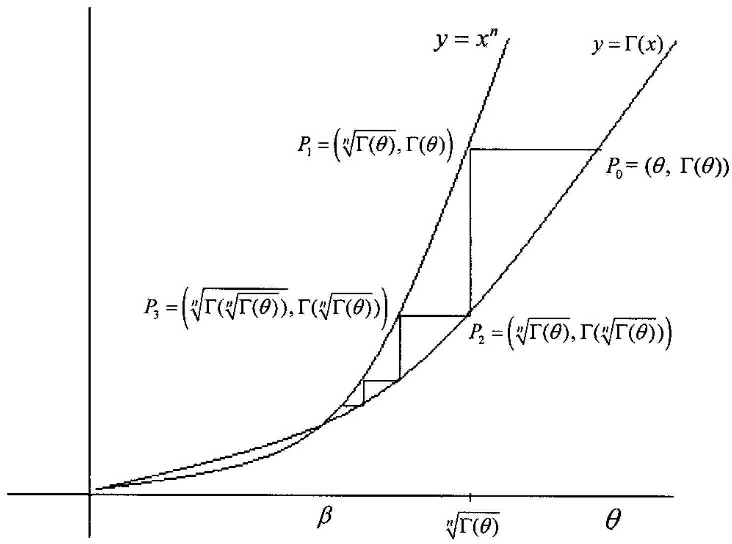

Figura 1:

La observación que hace Galois en su artículo se dirigió principalmente a la parte donde Legendre proponía que si las dos funciones que se usan para encontrar la raíz ahora son de la forma $y = x$ y $y = \Psi(x)$, entonces el proceso iterativo antes expuesto, se reduce a desarrollar la sucesión

$$a, \Psi(a), \Psi(\Psi(a)), \Psi(\Psi(\Psi(a))), \ldots$$

que converge a la raíz del polinomio, donde a es una cota superior de las raíces.

Galois señala que el procedimiento de Legendre para llegar a esa sucesión se centra en separar $F(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \cdots = 0$ como $F(x) = X - Y = 0$, donde X contiene los términos positivos y Y los negativos, y para ello se proponen las formas

$$Y = x^n\left(\frac{X}{x^n}\right) \quad \text{o} \quad X = x^n\left(\frac{Y}{x^n}\right),$$

y respectivamente $\Delta(x) = x = \sqrt[n]{\frac{X}{\left(\frac{X}{x^n}\right)}}$ o $\Upsilon(x) = x = \sqrt[n]{\frac{Y}{\left(\frac{Y}{x^n}\right)}}$, donde ambas funciones son crecientes. Con este procedimiento Galois menciona que Legendre tiene que tomar las funciones $y = x$ y $y = \sqrt[n]{\frac{X}{\left(\frac{X}{x^n}\right)}}$, para seguir con su método antes mencionado de la intersección con las dos curvas (4.1). Galois critica este proceso porque le incomoda tener que realizar una cantidad considerable de cálculos usando las dos funciones, principalmente $y = \sqrt[n]{\frac{X}{\left(\frac{X}{x^n}\right)}}$.

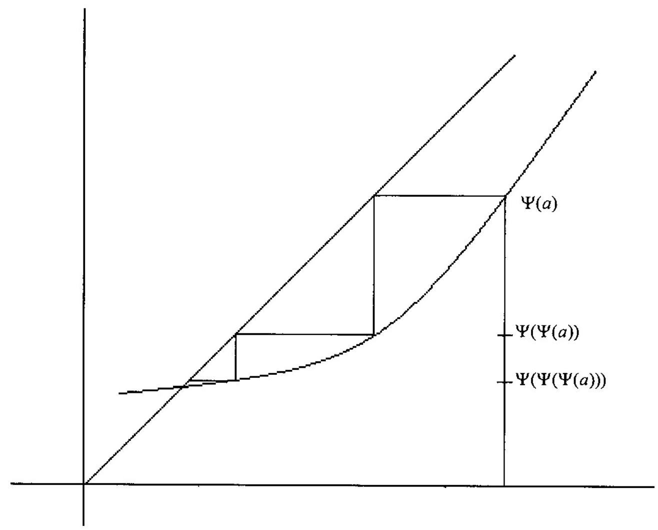

Figura 2:

Por estas razones es que Galois propone otra forma que juzga más sencilla para aproximarse a las raíces con las dos funciones $y = x$ y $y = \Psi(x)$. Supone que el polinomio $F(x) = X - Y = 0$ tiene una raíz mayor que 1 y supone que se puede encontrar una q para la que $\Psi(x) = x + \frac{F(x)}{qx^n}$, que es creciente para $x > 1$, y como consideró que es monótona, entonces con la primera derivada puede deducir la forma de q.

La ventaja en la propuesta de Galois expuesta en *Note sur la résolutions des équation numériques* es el manejo de $y = x + \frac{F(x)}{qx^n}$, sobre la de Legendre $y = \sqrt[n]{\frac{X}{\left(\frac{X}{x^n}\right)}}$ que era más complicada. Así, la forma de construir la sucesión

$$a, \Psi(a), \Psi(\Psi(a)), \Psi(\Psi(\Psi(a))), \ldots$$

para aproximarse a la raíz, es más conveniente con las funciones de Galois.[19]

[19]La propuesta de Galois se puede usar no sólo en polinomios, para ver ejemplos

5. Las últimas publicaciones

Antes de terminar el año 1830 publicó un breve trabajo –de dos páginas– titulado *Notes sur quelques points d'analyse en annales de mathématiques pures et appliquées*. De este artículo no se sabe mucho y no hizo ningún comentario al respecto en la carta para Chevalier. El trabajo contiene dos resultados: el primero es un teorema que enuncia lo siguiente:

Sean dos funciones cualesquiera $F(x)$ y $f(x)$, ahora, para toda x y h, se tiene que

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{f(x+h)-f(x)}=\varphi(k),$$

donde φ es una función determinada y k está entre x y $x+h$.

Después del enunciado expone la demostración pero en ninguna parte hace un comentario a través del cual se pudiera contextualizar este teorema, y tampoco se podría considerar como un lema previo al segundo resultado que propone en el artículo.

El segundo resultado es una breve nota sobre la manera de obtener el radio de curvatura de una curva en el espacio, y escribió lo siguiente:

> "*El radio de curvatura de una curva en cualquier punto M es la perpendicular bajada desde este punto M sobre la intersección del plano normal al punto M con el plano normal consecutivo*".

De la misma forma terminó la construcción y no señaló algo que diera ideas para saber cuál era el fondo de este escrito.

A pesar de todas las adversidades que hemos mencionado, esta serie de publicaciones de 1830 pudieron darle esperanzas para que 1831 fuera mejor, pero no fue así.

Desde mediados de 1830 la oposición republicana llamó la atención de Galois y a ello se suma que la convulsión revolucionaria ya estaba a las puertas de la *École Normale*; la combinación de estos elementos fue determinante en su vida, y entre otras consecuencias sucedió que fue expulsado de la *École* en diciembre de ese año.

Empero, pese a su activismo político y su reciente expulsión, para enero de 1831 ya tenía la nueva versión que le había sugerido Poisson que escribiera del artículo que ahora tituló *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* y que entregó a la *Academia de Ciencias* de París. Esto significa que estaba concretando la mayoría

consulte [Galuzzi, 2001].

de las ideas acerca de la teoría de ecuaciones que tenía hasta el momento.

Durante 1831 su situación se tornó muy complicada: la mayor parte del año estuvo preso, su situación económica empeoró y la *Academia* rechazó nuevamente el artículo. Con todo esto sobre sus hombros, ya no fue posible que pudiera ver publicado otro trabajo suyo de matemáticas en el poco tiempo de vida que le quedaba. Con todo, en enero de ese mismo año pudo descargar parte del enojo que seguramente le provocaron el rechazo de la *École Polytechnique* y la expulsión de la *École Normale*, además de la negativa de la *Academia* de reconocer su trabajo, entre otras cosas. La manera en que pudo dar a conocer una parte importante de lo que pensaba fue a través de la última publicación de su vida, siendo ésta un artículo donde criticaba la enseñanza de las ciencias en Francia. El trabajo se titula *Lettre sur l'enseignement des sciences* y lo publicó la *Gazette des Écoles* el 2 de enero de 1831.

La carta refleja no sólo su situación de los últimos años, también es una fotografía de lo que sigue ocurriendo actualmente en muchas instituciones educativas de todo el mundo.

Inicia con un ataque hacia los criterios utilizados para otorgar los puestos, pues consideraba que no deben ser concedidos como una recompensa por las preferencias políticas o religiosas de las personas, y que las opiniones científicas de los postulantes deberían ser consideradas prioritariamente para tomar esas decisiones. Por todo lo anterior piensa que sólo se termina privilegiando la mediocridad.

Protesta por la forma como se procede para decidir sobre quiénes ingresan a las instituciones. Siente que no se trasmite adecuadamente el espíritu de las ciencias, y que la forma en que algunos profesores enseñan no es la adecuada. Pregunta hasta cuándo los jóvenes estarán obligados a escuchar y repetir, cuando lo importante está en darles tiempo para reflexionar sobre los temas aún sin resolver. Critica que se les enseñen teorías inconclusas e inútiles, mientras que se omiten las teorías más importantes del álgebra.

Dice que la causa de estos males se encuentra en los examinadores, quienes generalmente trabajan solo en defensa de sus intereses y tratan de obstaculizar a los jóvenes, debilitando el espíritu de búsqueda, y señala que las formas de enseñanza solo los encaminan a estudiar para pasar algún examen.

No hay duda que Galois estaba describiendo su caso. Nunca imaginó que cuando la *Gazette* publicó la carta le quedaría poco más de un año de vida, y ya no vería publicado algo más de sus reflexiones y aportaciones matemáticas.

Agradecimientos: a Rafael Martínez y Rafael Reyes pos sus comentarios.

Bibliografía

1. L. Adrien, *Essai sur la théorie des nombres*, Paris: Courcier, 1816.
2. B. R. et Azra J. P., *Écrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois*, París: Gauthier Villars, 1997.
3. G. C. F., *Disquisitiones Arithmeticae*, Yale University Press, 1966.
4. L. J. L., *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, París: Bachelier, 1826.
5. T. R. Laura, *Évariste Galois. Scritti matematici*, Torino: Bollati Boringhieri, 2000.
6. E. Leonhard, *Introduction a l'analyse infinitésimale*, Paris: Barrois, 1796.
7. G. Massimo, Galois' note on the approximative solution of numerical equations (1830), *Archive for History of Exact Sciences* **56** (2001) 29–37.