Miscelánea Matemática **48** (2009) 59–74 SMM

Casos en los que no es aplicable la fórmula $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$

Juan Carlos Ponce Campuzano,
Antonio Rivera Figueroa

CINVESTAV-IPN

jcponce@cinvestav.mx, arivera@cinvestav.mx

Resumen

Sin duda alguna, el Teorema Fundamental del Cálculo, nombre que abreviaremos por TFC, es una de las herramientas más poderosas en las aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral, debido a que nos permite calcular integrales definidas de una manera relativamente simple y expedita. La integral a la que nos referimos en este artículo es en el sentido de Riemann, esto aplica en particular al título. Un recurso nemotécnico para recordar el TFC es la relación formal $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$. Presentaremos dos situaciones interesantes en las que esta fórmula no es aplicable. Uno de los casos puede surgirnos en la práctica, por lo que el ejemplo que exponemos nos advierte del cuidado que debemos tener cuando pretendamos aplicar el TFC.

1. El Teorema Fundamental

El Teorema Fundamental del Cálculo establece dos relaciones de reciprocidad entre la derivada y la integral. Algunos autores llaman Teorema Fundamental solamente a una de estas relaciones, nosotros daremos ese nombre al teorema que incluye ambas relaciones, las cuales establecemos en dos incisos. Centraremos nuestra atención en el segundo de ellos.

Teorema 1 (Fundamental del Cálculo). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable.*

1. *Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ está dada por*

$$F(x) = \int_a^x f(u)du$$

para toda $x \in [a,b]$, entonces F es continua en cada $x \in [a,b]$. Además si f es continua en $x \in [a,b]$, entonces F es derivable en x, en este caso $F'(x) = f(x)$.

2. *Si $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable en $[a,b]$ tal que $G'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(u)du = G(b) - G(a).$$

Recordemos que una función P se llama *función primitiva* de f en un intervalo $[a,b]$, si es derivable en $[a,b]$ y $P'(x) = f(x)$ para toda x del intervalo. Si una función tiene una primitiva entonces tiene una infinidad de primitivas, de hecho, si P es una primitiva de f, entonces $G = P + C$ es una primitiva de f para toda constante C. La segunda parte del TFC, formulada en términos de primitivas, nos dice que si G es cualquier primitiva de f, entonces $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$. Esta fórmula nos ofrece un enorme potencial para calcular integrales en un intervalo, también llamadas integrales definidas, razón por la cual resultan importantes los llamados Métodos de Integración, que no son otra cosa que métodos para encontrar primitivas de funciones.

La segunda parte del TFC también podemos formularla como sigue.

Teorema 2 *Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es derivable en todo $x \in [a,b]$ y F' es integrable, entonces $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$.*

Más adelante nos referiremos a este enunciado.

2. Acerca del cambio de variable $u = \tan \frac{x}{2}$

Algunos de los métodos de integración más populares que suelen estudiarse en los primeros cursos de Cálculo son:

- Identificación de integrales inmediatas.
- Integración de funciones racionales, mediante la descomposición en fracciones parciales.
- Integración por partes.
- Sustitución trigonométrica (para integrales donde aparecen raíces de sumas de cuadrados).
- Cambio de variable $u = \tan \frac{x}{2}$ para funciones racionales en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Por alguna inexplicable razón estos métodos se han convertido en las técnicas de integración de casi todo primer curso de Cálculo Integral. Ilustremos el último de ellos.

Ejemplo 1 Hallando una primitiva del integrando, calculemos la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\cos x} dx.$$

Si acudimos al método de integración que propone el cambio de variable $u = \tan \frac{x}{2}$, y regresamos a la variable x, obtenemos la función

$$F(x) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} \right). \tag{1}$$

Se invita al lector a que lleve a cabo los detalles. Es fácil verificar que efectivamente $F'(x) = f(x)$ para toda x donde F es derivable. Si usamos esta función para calcular la integral definida, obtenemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\cos x} dx = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

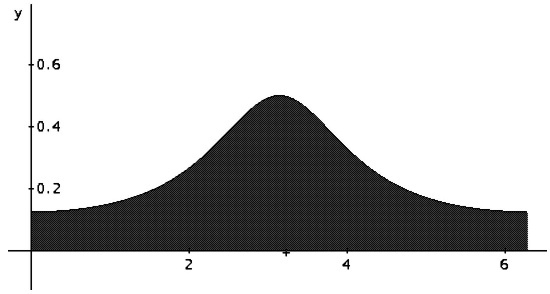

Figura 1: Área bajo la gráfica de $f(x) = \frac{1}{5+3\cos x}$

Sin embargo, observemos que la función f es continua y positiva en el intervalo $[0, 2\pi]$ por lo que el valor de la integral definida debe ser positivo, esto es contradictorio con el resultado obtenido.

La aparente contradicción se debe a que la "primitiva" F no está definida en los puntos de la forma $x = (2n+1)\,\pi$, donde n es cualquier entero, en particular F no está definida en el punto $\pi \in [0, 2\pi]$. Así que F no cumple la condición $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [0, 2\pi]$. Observemos que no se trata de una primitiva discontinua (esto no existe, pues toda función derivable es continua), simplemente F no es una primitiva del integrando f en $[0, 2\pi]$. Entonces el método de integración que acude a la sustitución trigonométrica $u = \tan \frac{x}{2}$ ha fallado.

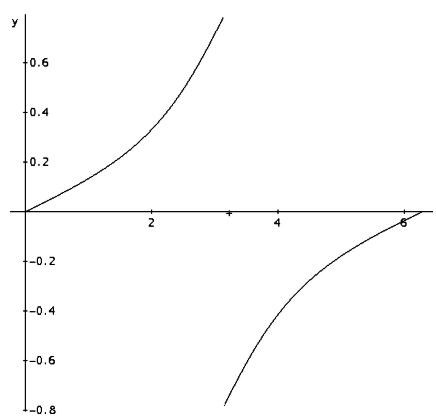

Figura 2: Gráfica de $F(x) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)$

Una primitiva del integrando $\frac{1}{5+3\cos x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, que podemos usar para aplicar el TFC es

$$G(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3+\cos x}\right)$$

Se puede verificar que efectivamente $G'(x) = \frac{1}{5+3\cos x}$ para toda $x \in [0, 2\pi]$.

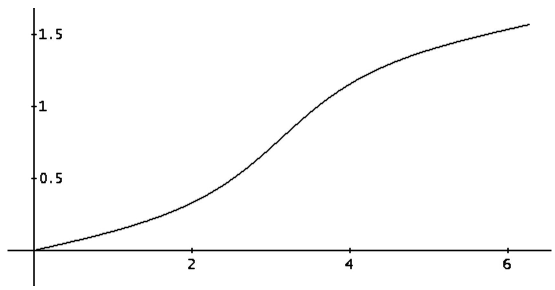

Figura 3: Gráfica de $G(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3+\cos x}\right)$

Usando esta primitiva, obtenemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos x}dx = G(2\pi) - G(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Salvo algunos detalles sutiles, la función que produce la sustitución $u = \tan\frac{x}{2}$, podemos utilizarla para calcular la integral vía la propiedad aditiva de la integral

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos x}dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{5+3\cos x}dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos x}dx \\
&= (F(\pi) - F(0)) + (F(2\pi) - F(\pi)) \\
&= \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + \left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

3. Integral de una derivada

La aplicación de un método de integración requiere en general de procesos laboriosos por lo que para facilitar la búsqueda de primitivas, se construyen extensas tablas de primitivas, también llamadas integrales indefinidas. Una manera trivial de construir tablas de primitivas es mediante la derivación. La siguiente tabla se ha construido de esta manera.

$F(x)$	$F'(x)$
$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	x^n
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\tan x$	$\sec^2 x$

$\longrightarrow$

$f(x)$	Primitiva de $f(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\sec^2 x$	$\tan x$

Esta técnica para elaborar tablas de primitivas es muy socorrida en los primeros cursos de Cálculo Diferencial e Integral, pues permite ilustrar inmediatamente la segunda parte del TFC, la cual hemos reformulado en el Teorema 2 y que recordamos mediante la fórmula

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Al escribir esta fórmula fuera del contexto del TFC, surge la pregunta: si $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable en todo $[a, b]$,

¿podemos asegurar que F' es integrable? (en el sentido de Riemann)

La respuesta es negativa, así que la técnica trivial para elaborar tablas de primitivas no siempre produce funciones integrables. A continuación presentamos dos ejemplos que muestran esta situación.

Notemos primero que para que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sea Riemann integrable se requiere, por definición, que sea acotada. Por lo tanto las funciones no acotadas no son Riemann integrables, pues para ellas no aplica la definición.

La siguiente función es derivable en su dominio $[0, 1]$ y su derivada es no acotada en ese intervalo, por lo tanto es no integrable en el sentido de Riemann.

Ejemplo 2 Sea $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F\left(t\right) = \begin{cases} t^2 \cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right), & \text{si } 0 < t \leq 1; \\ 0, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Esta función es derivable en $[0,1]$ y su derivada está dada por

$$F'\left(t\right) = \begin{cases} 2t \cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right) + \frac{2\pi}{t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t^2}\right), & \text{si } 0 < t \leq 1; \\ 0, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Un ejemplo más interesante es el de una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable cuya derivada F' sea acotada pero no integrable (en el sentido de Riemann), una tal función la construiremos en la siguiente sección.

4. Función cuya derivada es acotada y no integrable

El primer ejemplo de una función derivable con derivada acotada pero no integrable se debe a Volterra, el cual data de 1881. Actualmente este mismo ejemplo puede consultarse en Hobson ([3], p. 490), Thielman ([7], p. 165), Swartz ([6], p. 98) y en Galaz-García ([2], p. 98) de esta misma Miscelánea. La construcción de la función de Volterra se basa esencialmente en la función f dada por $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, cuya derivada está dada por $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f'(0) = 0$. Si se mira superficialmente la construcción de la función de Volterra, puede quedar la impresión de que la no integrabilidad de la derivada se debe a que la función en la cual se basa esa construcción, oscila infinitas veces alrededor del origen, por esta razón presentamos en este artículo una función similar a la de Volterra, cuya función base, que se utiliza para su construcción, tiene una derivada mejor comportada. Las ideas que aplicamos son las mismas que las del ejemplo de Volterra.

Para construir la función antes mencionada, como en el caso del ejemplo de Volterra, usaremos un conjunto de Cantor generalizado. La no integrabilidad se probará usando la importante caracterización de las funciones Riemann integrables en términos de sus discontinuidades (Spivak, [5], p. 53).

En el siguiente teorema y en lo sucesivo, la medida de un conjunto será en el sentido de Lebesgue (véase Royden [4] y Rudin [5]).

Teorema 3 *Una función acotada f definida en $[a,b]$ es Riemann integrable si y solamente si el conjunto de discontinuidades de f tiene medida cero.*

La función que contruiremos será derivable en $[0,1]$ con derivada discontinua en un conjunto de Cantor de medida mayor que cero, específicamente, de medida $\frac{1}{2}$.

Construyamos un conjunto de Cantor contenido en $[0,1]$ de medida $\frac{1}{2}$. El primer paso de esta construcción consiste en eliminar del intervalo $[0,1]$ un subintervalo abierto E_0^1 centrado en $[0,1]$ de longitud $\frac{1}{6} = \frac{1}{2\cdot 3}$. Este intervalo es $E_0^1 = \left(\frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right)$.

Sea C_1 el conjunto compacto que resulta de la unión de los $2 = 2^1$ intervalos cerrados restantes

$$C_1 = \left[0, \frac{5}{12}\right] \cup \left[\frac{7}{12}, 1\right].$$

El segundo paso consiste en eliminar $2 = 2^1$ intervalos abiertos, uno de cada uno de los subintervalos compactos que componen C_1, ambos intervalos abiertos centrados en sus respectivos intervalos compactos y de longitud $\frac{1}{2\cdot 3^2} = \frac{1}{18}$. Sean E_1^1 y E_1^2 estos intervalos abiertos.

En general, habiendo construido el conjunto compacto C_k constituido por 2^k intervalos cerrados, construimos C_{k+1} mediante la eliminación de 2^k intervalos abiertos, cada uno centrado en el intervalo cerrado correspondiente que componen C_k. Cada uno de estos intervalos abiertos, que denotamos por E_k^i, de longitud $\frac{1}{2\cdot 3^{k+1}}$.

Para cada entero no negativo k, sea U_k la unión de los intervalos abiertos E_k^i

$$U_k = \bigcup_{i=1}^{2^k} E_k^i.$$

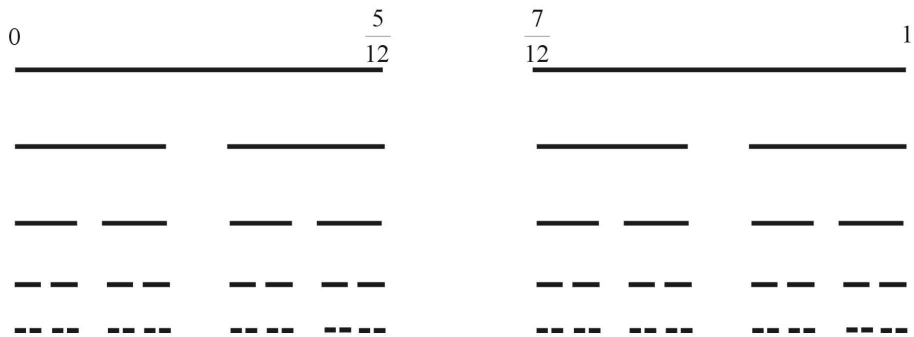

Figura 4:

Como los 2^k intervalos abiertos E_k^i son ajenos a pares, la medida de U_k es $m(U_k) = 2^k \frac{1}{2 \cdot 3^{k+1}}$.

Para cada entero no negativo n, sea

$$V_n = \bigcup_{k=0}^{n} U_k.$$

Como V_n es la unión de intervalos abiertos ajenos, su medida está dada por

$$m(V_n) = \frac{1}{2 \cdot 3} + 2\frac{1}{2 \cdot 3^2} + 2^2\frac{1}{2 \cdot 3^3} + 2^3 \cdots \\ + 2^n \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

Puesto que $(V_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente de conjuntos abiertos, tenemos que la medida de la unión de ellos

$$U = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$$

es $m(U) = \lim_{n \to \infty} m(V_n) = \frac{1}{2}$. Por lo tanto el conjunto de Cantor

$$H = [0,1] \setminus U = [0,1] \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{2^k} E_k^i \right)$$

también es de medida $\frac{1}{2}$.

Observemos que H es la intersección infinita de conjuntos compactos C_k, es decir

$$H = \bigcap \{C_k \mid k \in \mathbb{N}\},$$

así que H es un conjunto compacto. De hecho, el conjunto de Cantor H es infinito no numerable, cerrado, sin puntos interiores y sin puntos aislados. Un conjunto cuya adherencia tiene interior vacío se llama denso en ninguna parte y si el conjunto no tiene puntos aislados se llama perfecto, así que el conjunto de Cantor H es denso en ninguna parte y perfecto (véase Swartz [6], Buskes & Van Rooij [1] y Rudin [4]).

Ahora construimos una función $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, derivable, con derivada acotada y discontinua en el conjunto de Cantor H. Para cada intervalo abierto $(a,b) = E_k^i$, montamos la restricción de una función derivable $f_{a,b} : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que ella y su derivada $f'_{a,b}$ toman el valor cero en los extremos a y b. Cuidamos que siempre haya un punto en (a,b) donde la derivada $f'_{a,b}$ tome el valor 1. En los puntos de $H = [0,1] \setminus U$, a F la hacemos igual a cero.

Para construir $f_{a,b}$ en un intervalo $[a,b]$, partimos de la función

$$h(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

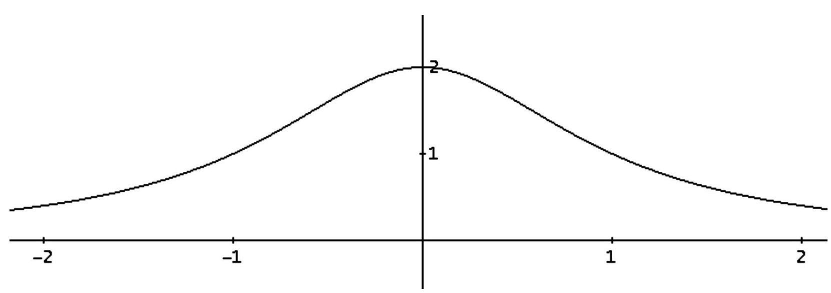

Figura 5: Gráfica de h

Primero tomamos de esta función la parte correspondiente al intervalo $[-1,1]$, luego extendemos esta parte al intervalo $[-2,2]$ tomando los trozos en los intervalos $[0,1]$ y $[-1,0]$ debidamente reflejados y trasladados. Dado que $h'(-1) = 1$ y $h'(1) = -1$, con los tres trozos obtenemos una curva suave. Observemos que la gráfica de la función resultante tiene tangentes horizontales en los puntos $(-2,0)$, $(0,2)$ y $(2,0)$. Véase Figura 6.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2(x+2)^2}{(x+2)^2+1}, & \text{si } -2 \le x \le -1; \\ \frac{2}{1+x^2}, & \text{si } -1 < x < 1; \\ \frac{2(x-2)^2}{(x-2)^2+1}, & \text{si } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

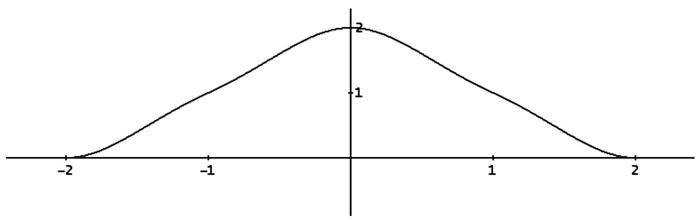

Figura 6: Gráfica de g

La derivada g' está dada por

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{4(x+2)}{(x^2+4x+5)^2}, & \text{si } -2 \le x \le -1; \\ -\frac{4x}{(1+x^2)^2}, & \text{si } -1 < x < 1; \\ \frac{4(x-2)}{(x^2-4x+5)^2}, & \text{si } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Observe que $g'(-2) = g'(0) = g'(2) = 0$, $g'(-1) = 1$ y $g'(1) = -1$.

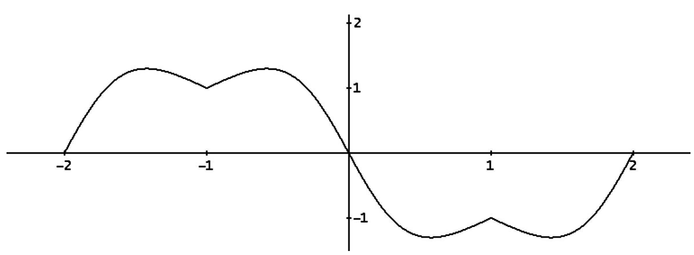

Figura 7: Gráfica de g'

Mediante una composición adecuada, obtenemos una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, con las mismas cualidades de g, específicamente si

$f(x) = g(4x-2)$ obtenemos

$$f\,(x) = \begin{cases} \frac{32x^2}{16x^2+1}, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}; \\ \frac{2}{1+(4x-2)^2}, & \text{si } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}; \\ \frac{32(x-1)^2}{16(x-1)^2+1}, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

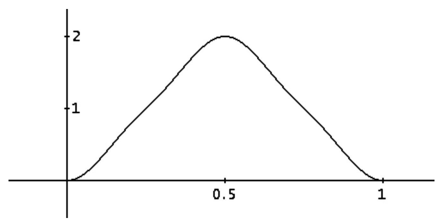

Figura 8: Gráfica de f

La derivada de f se anula en los extremos del intervalo $[0,1]$ y toma el valor 1 en el punto $x = \frac{1}{4}$.

Si $[a,b]$ es cualquier intervalo cerrado y acotado, definimos $f_{a,b} : [a,b] \to \mathbb{R}$ como $f_{a,b}(x) = (b-a)^2\, f\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$, es decir

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} (b-a)^2 \frac{32(\frac{x-a}{b-a})^2}{16(\frac{x-a}{b-a})^2+1}, & \text{si } a \leq x \leq a + \frac{b-a}{4}; \\ (b-a)^2 \frac{2}{1+(4\frac{x-a}{b-a}-2)^2}, & \text{si } a + \frac{b-a}{4} < x < b - \frac{b-a}{4}; \\ (b-a)^2 \frac{32(\frac{b-x}{a-b})^2}{16(\frac{b-x}{a-b})^2+1}, & \text{si } b - \frac{b-a}{4} \leq x \leq b. \end{cases}$$

Esta función se anula en los extremos a y b y su derivada satisface $f'_{a,b}(a) = f'_{a,b}(b) = 0$ y $f'(\frac{3a+b}{4}) = 1$. Esencialmente hemos llevado la función f definida en $[0,1]$ al intervalo $[a,b]$. El factor $(b-a)^2$ tiene la finalidad de comprimirla suficientemente, para cuando la longitud del intervalo $[a,b]$ es pequeña. Esto lo necesitamos para que la función F que vamos a definir resulte diferenciable.

Ahora definamos la función $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ como sigue:

1. Si $x \in U$, sea E_k^i el único intervalo de esta familia de intervalos, al cual pertenece x. Denotemos por (a, b) este intervalo. Definimos entonces
$$F\,(x) = f_{a,b}(x)$$
2. Si $x \in H$, definimos $F(x) = 0$.

Observemos que si $(a, b) \in \{E_k^i\}$ y $x \in (a, b)$, entonces

$$|F(x)| \leq 32(x-a)^2 \qquad \text{si} \quad a \leq x \leq a + \frac{b-a}{4}, \tag{2}$$
$$|F(x)| \leq 2(a-b)^2 \qquad \text{si} \quad a + \frac{b-a}{4} < x < b - \frac{b-a}{4}, \tag{3}$$
$$|F(x)| \leq 32(x-b)^2 \qquad \text{si} \quad b - \frac{b-a}{4} \leq x \leq b. \tag{4}$$

Probemos que F es derivable en todo punto $t \in [0, 1]$.

Primero consideremos $t \in U$. Sea $(a, b) \in \{E_k^i\}$ tal que $t \in (a, b)$. En todo punto x de este intervalo F es derivable y

$$F'(x) = f'_{a,b}(x) = (b-a)f'\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

En particular F es derivable en t.

Sea ahora $t \in H$. Por definición $F(t) = 0$. Probemos que

$$F'(t) = \lim_{x \to t} \frac{F(x) - F(t)}{x - t} = \lim_{x \to t} \frac{F(x)}{x - t} = 0.$$

Mostremos que para cualquier $\epsilon > 0$, existe una δ-vecindad del punto t tal que
$$\left|\frac{F(x)}{x-t}\right| < \epsilon$$
para toda $x \in [0, 1]$ que cumpla $0 < |x - t| < \delta$.

Sea entonces $\epsilon > 0$ arbitraria. Consideremos cualquier δ-vecindad de t. Sea $x \in [0, 1]$ tal que $0 < |x - t| < \delta$. Si $x \in H$, entonces $\frac{F(x)}{x-t} = 0$. Si $x \in U$, entonces x pertenece a algún intervalo abierto $(a, b) \in \{E_k^i\}$. Necesariamente uno de los extremos del intervalo (a, b) pertenece a la

δ-vecindad de t. Este extremo está entre t y x. Se puede probar que si este extremo es a, entonces

$$\left|\frac{F(x)}{x-t}\right| \leq \frac{|F(x)|}{|x-a|} \leq 32|x-a|.$$

usando la desigualdad 2. Por otra parte, si b está entre t y x, usando la desigualdad 3 tenemos

$$\left|\frac{F(x)}{x-t}\right| \leq \frac{|F(x)|}{|x-b|} \leq 32|x-b|.$$

En cualquier caso tenemos que

$$\left|\frac{F(x)}{x-t}\right| < 32|x-t| < 32\delta.$$

Haciendo $\delta = \frac{\epsilon}{32}$, obtenemos

$$\left|\frac{F(x)}{x-t}\right| < \epsilon.$$

Esto prueba que

$$F'(t) = \lim_{x\to t} \frac{F(x)-F(t)}{x-t} = 0.$$

Hemos probado que F es derivable en $[0,1]$ y que en todo punto x del conjunto de Cantor H, $F'(x) = 0$.

Observemos que F' está acotada en el intervalo $[0,1]$, de hecho $|F'(x)| \leq 2$ para todo $x \in [0,1]$.

Probemos ahora que F' es discontinua en H. Sea $x \in H$. Como H es perfecto, toda vecindad $I_\delta = (x-\delta, x+\delta)$ de x tiene un punto y de H diferente de x. Por otra parte, en el intervalo cerrado con extremos x y y, por ejemplo $[x,y]$, necesariamente existe un punto $\alpha \in U$, pues en caso contrario H contendría al intervalo con extremos x y y, en consecuencia tendría puntos interiores, pero esto no puede ser posible ya que H es denso en ninguna parte.

Supongamos $\alpha \in (a,b)$, con $(a,b) \in \{E_k^i\}$. Entonces $(a,b) \subset (x,y)$, pues en caso contrario uno de los puntos x o y estaría en (a,b). Como la derivada de la función $f_{a,b}$ toma el valor 1 en algún punto, entonces existe un punto z en la δ-vecindad de x tal que $F'(z) = 1$. Esto implica que F' es discontinua en x ya que $F'(x) = 0$.

Hemos probado que F' es discontinua en el conjunto de Cantor H, el cual es de medida $\frac{1}{2}$, luego F' no es Riemann integrable.

Las figuras 9 y 10 muestran las gráficas de algunas de las funciones $f_{a,b}$ y sus derivadas $f'_{a,b}$, con lo cual podemos tener una idea del aspecto que va adquiriendo la gráfica de F durante su construcción, así como la de su derivada.

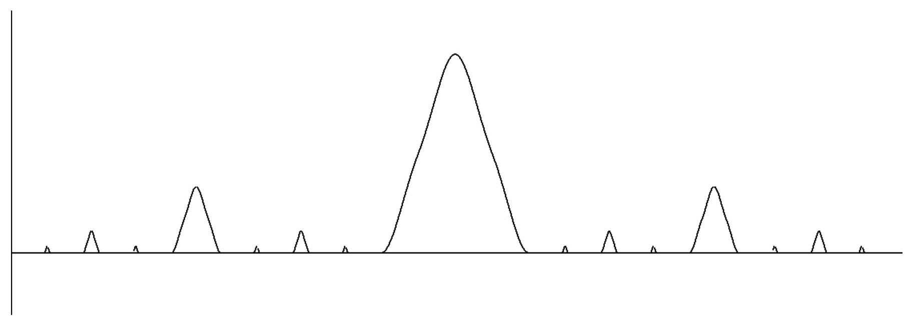

Figura 9:

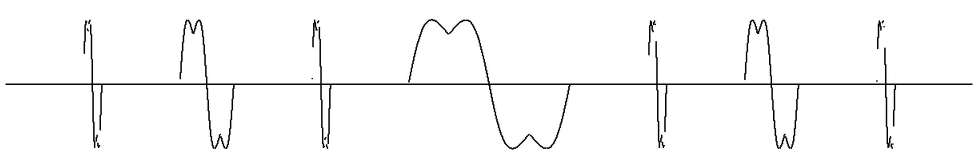

Figura 10:

Referencias

[1] Buskes, G. & Van Rooij, A. (1997). *Topological Spaces: From Distance to Neighborhood.* Springer-Verlag. New York.

[2] Galaz-García, F. (2007). Definiciones originales de la integral y medida de Lebesgue. *Miscelánea Matemática* **44** pp. 83-100.

[3] Hobson, E. W. (1957). *The theory of functions of real variable and the theory of Fourier's series.* Vol 1. Dover Publications, Inc. New York.

[4] Royden, H. L. (1968). *Real Analysis.* The Macmillan Company. New York.

[5] Rudin, W. (1964). *Principles of Mathematical Analysis.* 2d. ed. McGraw-Hill Book Company. New York.

[6] Spivak, M. (1965). *Calculus on manifolds : a modern approach to classical theorems of advanced calculus.* W. A. Benjamin. New York.

[7] Swartz, C. (1994). *Measure, integration and function spaces.* World Scientific Publishing. Singapore.

[8] Thielman, H. P. (1959). *Theory of functions of real variables.* Prentice-Hall, Inc. New York.