If it is safe to trace back to any single man the origin of those conceptions with which pure mathematical analysis has been chiefly occupied during the nineteenth century and up the present time, we must, I think, trace back to Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

Philip E. B. Jourdain

SERIES DE FOURIER: BREVE INTRODUCCION HISTORICA

Onésimo Hernández Lerma*

Introducción: Una serie trigonométrica

$$S(f)=\tfrac{1}{2}a_0+\Sigma_1^{\infty}(a_n\cos nx+b_n \operatorname{sen} nx) \tag{1}$$

es la *serie de Fourier* de f si los coeficientes a_n y b_n están dados por

$$a_n=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx,\qquad b_n=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\operatorname{sen} nx\,dx, \tag{2}$$

donde f es una función definida en el intervalo $[0,2\pi]$. Para indicar esta correspondencia escribimos

$$f(x)\sim\tfrac{1}{2}a_0+\Sigma_1^{\infty}(a_n\cos nx+b_n \operatorname{sen} nx)$$

o, más brevemente, $f(x)\sim S(f)$.

Nuestro propósito es dar una breve descripción del desarrollo histórico de la teoría de las series de Fourier. Por razones de espacio es necesario que usemos algunos conceptos con los que, quizás, el lector no esté familiarizado. En este caso pueden consultarse [1] ó [16] (ver bibliografía al final).

Período de Euler-Bernoulli-d'Alembert. Consideremos una cuerda elásti-

* Profesor de la ESIME. del IPN., temporalmente en la Universidad de los Andes (Mérida, Venezuela).

ca fuertemente estirada, vibrando en el plano XY y cuya posición de equilibrio es el intervalo $[0,2\pi]$. Bajo ciertas condiciones (por ejemplo, homogeneidad del material de la cuerda, vibraciones de amplitud pequeña, etc.), se prueba que el desplazamiento $y(x, t)$ de un punto sobre la cuerda con posición de equilibrio en $(x, 0)$, en un tiempo t, satisface la ecuación diferencial parcial

$$y_{tt} = a^2 \, y_{xx}, \tag{3}$$

donde a es una constante determinada por las características de la cuerda. Esta ecuación fue estudiada alrededor de 1750 por matemáticos como Jean Le Rond, d'Alembert, Leonhard Euler y Daniel Bernoulli. d'Alembert en 1747 y Euler en 1748 encontraron que la solución de (3) es:

$$y(x, t) = \tfrac{1}{2}\left(f(x + at) + f(x\text{-}at)\right), \tag{4}$$

donde $f(x) = y(x, 0)$ es el desplazamiento inicial dado a la cuerda. Sin embargo, había una gran diferencia conceptual en sus resultados. Hasta el siglo 18 [4, Caps. VI y VII], la palabra 'función' se usaba para designar una expresión (o fórmula) 'simple' escrita en términos de variables y símbolos conocidos en aquel tiempo. Por este motivo, d'Alembert sostenía que la función f en (4) debía tener propiedades que la restringieran al conjunto de las funciones conocidas entonces. Entre los matemáticos que se oponían a este punto de vista estaban Euler y Lagrange. Euler concebía una función no únicamente como una cantidad descrita por una fórmula en términos de variables, sino como una correspondencia arbitraria, lo cual permitía ampliar el concepto de función hasta incluir cualquier tipo de relación entre variables.

En 1753, Bernoulli publicó una memoria dónde mantenía que el desplazamiento $y(x, t)$ de la cuerda (con velocidad inicial $y_t(x, 0) = 0$) es expresable en la forma

$$y(x, t) = \Sigma_1^\infty \; b_n \operatorname{sen} nx \cos nt, \tag{5}$$

la cual, para $t = 0$, se reduce a

$$y(x, 0) = \Sigma_1^\infty \; b_n \operatorname{sen} nx. \tag{6}$$

Es decir, el desplazamiento inicial $f(x) = y(x, 0)$ debía ser expresable en la forma (6). Además, la solución (5), afirmaba Bernoulli, incluía la solución (4) obtenida por d'Alembert y Euler. Uno de los argumentos en que se apoyaba Bernoulli es que experimentalmente se prueba que —ciertos tipos de— oscilaciones se pueden expresar como una suma *finita* de la forma

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \Sigma_1^m B_n \operatorname{sen}(nx + h) = \tfrac{1}{2}a_0 + \Sigma_1^m (a'_n \cos nx + b'_n \operatorname{sen} nx),$$

y, por tanto, no veía razón alguna para rechazar la posibilidad de que la serie en (6) representara a la función f, y puesto que sus esfuerzos para demostrar este hecho fueron infructuosos, el reto se mantuvo en las siguientes preguntas:

A. Considerando que la posición inicial $f(x)$ de la cuerda es (hasta cierto punto) arbitraria, ¿es 'razonable' esperar que la serie en (6) represente esta posición?

B. Suponiendo que $f(x)$ pudiera representarse por tal serie, ¿cómo se calcularían los coeficientes?

La pregunta A, como veremos después, quedó sin respuesta hasta la aparición de los trabajos de Fourier y Dirichlet. Con respecto a B se obtuvieron los siguientes resultados: Euler y Lagrange, independientemente, encontraron que para una serie (1) *finita* los (ahora así llamados) *Coeficientes de Fourier* a_n y b_n están dados por las fórmulas (2). Posteriormente, en 1777, Euler extendió el resultado para una serie infinita. El procedimiento seguido por Euler para calcular a_n y b_n es, esencialmente, el mismo que usamos ahora (consulte [1] ó [8]). Anterior a este resultado es el de Alexis Clairaut (1713-1765), publicado en 1759 sobre la *serie de Fourier de cosenos de f*,

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + \Sigma_1^\infty a_n \cos nx, \quad \text{donde} \quad a_n = \tfrac{2}{\pi}\textstyle\int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx,$$

y el de Lagrange sobre la *serie de Fourier de senos* de f,

$$f(x) \sim \Sigma_1^\infty b_n \operatorname{sen} nx, \quad \text{donde} \quad b_n = \tfrac{2}{\pi}\textstyle\int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} nx \, dx.$$

En 1805, Marc-Antoine Parseval encontró (con hipótesis insuficientes) una relación entre los coeficientes de Fourier y la función f que ha resultado ser de gran importancia en la investigación posterior: si f es integrable y acotada sobre $[0,2\pi]$ entonces,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \tfrac{1}{2}a_0^2 + \Sigma_1^\infty\ (a_n^2 + b_n^2). \qquad (7)$$

C. de la Vallée Poussin (1893) extendió el resultado para funciones absolutamente integrables y Fatou para funciones en $L_2[0, 2\pi]$ Liapunov (1896) y Hurwitz (1903) encontraron una relación en la que (7) resulta como caso particular: si f y g son funciones integrables y acotadas sobre $[0,2\pi]$ entonces,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \tfrac{1}{2}a_0 A_0 + \Sigma_1^\infty\ (a_n A_n + b_n A_n), \qquad (8)$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de f y A_n y B_n los coeficientes de Fourier de la función g. La ecuación (7), (y, algunas veces, también (8)) es llamada *ecuación de Parseval.*

Período Fourier-Dirichlet. En 1807, Fourier presentó a la Academia de París su memoria "Théorie du Mouvement de la Chaleur dans les Corps Solides", la cual fue galardonada con el Gran Premio de Matemáticas de 1812. Sin embargo, esta no fue publicada sino hasta los años 1824-26 debido a que el jurado, entre los cuales se encontraban Lagrange, Laplace y Legendre, consideró [7, pp. 6-7] que el trabajo de Fourier dejaba mucho que desear desde el punto de vista de rigor matemático. Fourier enunció que: *cualquier* función definida sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ se puede representar como una serie (1) de senos y cosenos con coeficientes dados por (2).

La única condición que Fourier impuso a la función es que fuera integrable. Por supuesto que esta condición es suficiente para calcular los coeficientes a_n y b_n de la serie (1), pero no implica que la suma de la serie, en caso de que esta converja, sea la función dada. Fourier se concretó a 'probar' su teorema en varios casos particulares. Al analizar el caso general usó un argumento geométrico que contenía la idea del que después fue usado por Dirichlet para probar, por primera vez, un resultado positivo con respecto a la convergencia de las series de Fourier.

En 1829, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859) probó rigurosamente el siguiente teorema:

Teorema (Dirichlet). *Sea f función periódica con período 2π definida y* *acotada sobre* $[0, 2\pi]$. *Si f tiene sólo un número finito de discontinuidades y de máximos y mínimos en* $[0, 2\pi]$ *entonces, su serie de Fourier* $S(f)$ *converge y su suma es* $\frac{1}{2}\,(f(x+) + f(x-))$ *en cada punto x. Los números* $f(x+)$ *y* $f(x-)$ *son los* límites laterales *de f en x definidos por:*

$$f(x+) = \lim_{h \to 0} f(x+h) \quad \text{y} \quad f(x-) = \lim_{h \to 0} f(x-h), \, (h>0).$$

Una demostración distinta de este teorema fue dada por Bonnet alrededor de 1849 [20, Secc. 9.43].

Los primeros esfuerzos de Dirichlet estaban encaminados a probar que la continuidad de f es suficiente para que ella misma sea la suma de su serie de Fourier. Sus esfuerzos fueron vanos aunque en 1837 probó que la condición de que f sea acotada no es necesaria si f es absolutamente integrable. Heine, en 1870, demostró que la convergencia es uniforme sobre cada intervalo $[a, b]$ que no contiene puntos de discontinuidad de f (el concepto de continuidad uniforme fue introducido por Stokes en 1847). Durante medio siglo se trató de probar el teorema de Dirichlet con la única condición de que f fuera continua, pues se tenía la 'certeza' de que esto era suficiente, pero en 1875 Paul du Bois-Reymond encontró un ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier divergía en un punto. Otros ejemplos fueron encontrados después por Fejér, Lebesgue, Schwarz y Faber, algunos de los cuales, siguiendo la idea de du Bois-Reymond, eran de series de Fourier que no convergen (a la función que las genera) en un conjunto numerable de puntos. Estos ejemplos pueden encontrarse en [15, Secc. 4.12] ó [21, Cap. VIII] ó [16, p. 546].

El ejemplo de du Bois-Reymond renovó el interés en las series trigonométricas y condujo al siguiente resultado de C. Jordán (1838-1922),

Teorema (Jordán). *Sea f una función periódica con período* 2π *y absolutamente integrable sobre* $[0, 2\pi]$. *Si x es un punto interior del intervalo* $[a, b]$ *en el cual f es de variación acotada, entonces, la serie de Fourier* $S(f)$ *de f converge y su suma es* $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. Si *f es continua en x,* $S(f)$ *converge a* $f(x)$.

Por un tiempo se pensó que la variación acotada de una función era una condición necesaria de su continuidad lo cual estaría en contradicción con el ejemplo de du Bois-Reymond, pero después se dieron ejemplos (e. g., $f(0) = 0$ y $f(x) = x^{1/2}\operatorname{sen}(1/x)$, $0 < x \leqslant 1$) de funciones continuas que no son de variación acotada. Por otra parte, las condiciones de Jordan son más generales que las de Dirichlet porque una función que satisface las condiciones del primer teorema es de variación acotada pero el converso es falso. Por ejemplo la función $\log|2 \cos \frac{1}{2}x|$ satisface las condiciones del teorema de Jordan y su serie de Fourier es

$$\log|2 \cos \tfrac{1}{2}x| = \Sigma_1^\infty (-1)^{n-1}(\cos nx)/n.$$

Sin embargo, esta función no satisface las condiciones de Dirichlet pues no es acotada en π.

Período Riemann-Lebesgue. El siguiente gran paso en el estudio de las series trigonométricas fue dado por Bernhard Riemann (1820-1866) bajo la influencia directa de Dirichlet que fue su profesor en la universidad alemana de Gotinga.

Como hemos mencionado, Dirichlet encontró condiciones suficientes para que la serie de Fourier de una función f converja a f. El problema de Riemann (hasta ahora sin resolver) era encontrar condiciones necesarias y suficientes. En 1854, Riemann presentó una memoria, "Sobre la representación de una función por una serie trigonométrica", (publicada hasta 1867, después de su muerte) que principiaba considerando el concepto de integral bajo un punto de vista más amplio que el dado por Cauchy en 1823 para funciones continuas. Generalizó a tal grado la integral de Cauchy que pudo dar un ejemplo (ver [5, p. 9] ó [7, p. 11]) de una función integrable con un número infinito de discontinuidades.

W. R. Hamilton (1843) probó que si f es continua sobre $[a, b]$ entonces,

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} kx \, dx = 0. \tag{9}$$

Riemann (Lebesgue, en 1903) generalizó el resultado anterior al caso en que f es Riemann (Lebesgue)-integrable. Este hecho, fundamental en la historia de las series trigonométricas, es conocido como *lema de Riemann-Lebesgue.* Su importancia estriba, entre otras cosas, en que de él se sigue el siguiente,

Teorema de Localización de Riemann.: *El comportamiento (convergencia o divergencia) en un punto x de la serie de Fourier de una función f*

R-integrable depende, únicamente, de los valores de f en una vecindad arbitrariamente pequeña de x.

Otras contribuciones de Riemann fueron con respecto al 'problema de unicidad' de una serie trigonométrica. Es decir, ¿existen dos series trigonométricas distintas que converjan a la misma función? , o, equivalentemente, ¿existe una serie trigonométrica que converja a cero en cada punto y que tenga coeficientes (al menos uno) distintos de cero? Riemann dio la siguiente respuesta negativa: Si una serie trigonométrica converje a cero en $[0, 2\pi]$ excepto, quizás, en un conjunto finito de puntos entonces, todos los coeficientes de la serie son cero. Una consecuencia (observada por du Bois-Reymond) de este hecho es: una función que satisface las condiciones de Dirichlet tiene una representación única. Es decir, no puede ser representada por una serie trigonométrica que no sea su serie de Fourier.

Otras respuestas al problema de unicidad fueron dadas por Heine y Cantor. De singular importancia son las investigaciones de Cantor porque al considerar el problema fue conducido al estudio de las propiedades de los conjuntos de puntos que fueron el origen de la actual Teoría de Conjuntos (ver la introducción de Jourdain a [5]). En 1871 Cantor probó el siguiente,

Teorema (Cantor). *Si una serie trigonométrica converge a cero excepto en un conjunto reducible entonces, todos los coeficientes de la serie son cero.*

Nota: un conjunto A es "reducible" si su p-ésimo conjunto derivado es vacío para algún entero positivo p. (conjunto derivado = conjunto de puntos de acumulación). Observe que el teorema de Riemann es un caso particular de éste pues todo conjunto finito es reducible.

La terminología actual es; A es un U-conjunto (o, conjunto de unicidad) si la convergencia de una serie trigonométrica a cero fuera de A, es posible sólo si todos los coeficientes de la serie son cero. En estos términos el teorema de Cantor resulta: Cada conjunto reducible es un U-conjunto.

En 1909, W. H. Young extendió el resultado de Cantor para conjuntos numerables. i. e., cada conjunto numerable es un U-conjunto (aunque existen conjuntos, los racionales, por ejemplo, que son numerables y no son reducibles). Ahora, puesto que todo conjunto numerable es de medida cero, surgió la pregunta: ¿cada conjunto de medida cero es un U-conjunto? D. E. Menchov (en 1916) construyó el primer ejemplo [3, p. 126] que daba una respuesta negativa a esta pregunta. En otras palabras, no todos los conjuntos de unicidad son finitos o numerables.

Naturalmente, la siguiente pregunta era: ¿existen conjuntos no numerables que sean U-conjuntos? A. Rajchmann (1922 y 1923) construyó conjuntos perfectos (i. e., cerrados y sin puntos aislados) que eran U-conjuntos. Independientemente, y usando otro procedimiento, N. K. Bari (1923) obtuvo el mismo resultado, (para un estudio de los principales resultados en el problema de unicidad de series trigonométricas consulte [3] ó [15] ó [21]).

En 1904 el matemático húngaro Leopold Fejér, obtuvo resultados muy importantes al considerar, en lugar de la convergencia puntual, la convergencia de las medias aritméticas de las sumas parciales de la serie (1).

Definición. Sea S_n la n-ésima suma parcial de la serie $\Sigma_1^\infty A_n$, y

$$\overline{S}_n = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n). \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(i. e., $\overline{S}_n$ es la media aritmética de las sumas parciales $S_1, S_2, \ldots, S_n$). Decimos que la serie $\Sigma_1^\infty A_n$ es (C, 1)-sumable (o, Cesàro-sumable) si la sucesión $(\overline{S}_n)_1^\infty$ converge. Además, si $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n = S$, decimos que S es la (C, 1)-suma (o, Cesàro-suma) de $\Sigma_1^\infty A_n$.

Fejér probó que: si f es Riemann (o Lebesgue)-integrable y x es un punto del intervalo $[0, 2\pi]$ tal que $f(x+)$ y $f(x-)$ existen entonces, la serie de Fourier (1) de f es (C, 1)-sumable a $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. Por tanto, si f es continua sobre $[0, 2\pi]$ su serie de Fourier es (C, 1)-sumable a f. Así, Fejér logró reivindicar el concepto de continuidad al demostrar que la serie de Fourier de una función continua, aunque no converja puntualmente, es 'sumable' en el sentido de la definición anterior (o sumable en el sentido de Cesàro).

Otro aspecto importante del resultado de Fejér es que de él se sigue inmediatamente el

Teorema de Aproximación de Weierstrass *(1885). Cada función continua de período 2π puede aproximarse uniformemente por polinomios trigonométricos.*

El teorema de Weierstrass fue generalizado para polinomios ordinarios por M. H. Stone en 1948.

Durante este siglo la teoría de las series trigonométricas ha tenido un gran desarrollo debido en gran parte, a la teoría de integración introducida por Henri Lebesgue en 1902 con el propósito, precisamente, de aplicarla al estudio de las series trigonométricas tal como había hecho Riemann anteriormente. Lebesgue (1906) probó el asombroso resultado según el cual; la serie de Fourier (1) de una función continua f puede integrarse término a término y la serie integrada converge . . . ¡aun en el caso de que la serie (1) diverja! Además, la serie integrada converge uniformemente sobre cada intervalo cerrado $[a, b]$. Por tanto, una condición necesaria para que una serie trigonométrica sea una serie de Fourier (i. e., que sus coeficientes estén dados por (2) para alguna función f) es que la integral de esta serie sea convergente en $[0, 2\pi]$. Usando este criterio Lebesgue probó el siguiente teorema comunicado a él por Fatou: La serie trigonométrica

$$\Sigma_2^\infty \frac{\operatorname{sen} nx}{\log n}$$

converge y no es la serie de Fourier de función integrable alguna (vea (13. p. 70]).

Ahora, ¿existen condiciones suficientes para que una serie trigonométrica sea una serie de Fourier? Una respuesta positiva fue dada casi simultáneamente por F. Riesz y E. Fisher en 1907.

Teorema (Riesz-Fisher). *Si la serie*

$$\tfrac{1}{2}a_0^2 + \Sigma_1^\infty (a_n^2 + b_n^2)$$

converge, la serie trigonométrica (1) *con estos coeficientes* a_n *y* b_n *es la serie de Fourier de una función* f *en* $L_2[0, 2\pi]$.

Observe que el teorema de Riesz-Fisher es un converso del teorema de Parseval. Por otra parte, si la norma de una función f en L_2 es

$$\| f \| = \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right)^{1/2} \tag{10}$$

el teorema, en la forma en que fue enunciado por Fisher, dice que L_2 es completo con respecto a la norma definida por (10). Esta condición, entre otras, hace más conveniente la integral de Lebesgue que la de Riemann pues L_2 no es completo (ver [2, p. 143]).

Resultados recientes. Hemos mencionado que existen funciones continuas que no son la suma de su serie de Fourier. En 1935, J. Pál y H. Bohr demostraron que esta situación puede 'corregirse' mediante un cambio de variable [14, Teor. 1]: si f es continua sobre [0, 2] con $f(0) = f(2\pi)$, existe un homemorfismo g del intervalo $[0, 2\pi]$ sobre sí mismo tal que la serie de Fourier de $f \circ g$ converge uniformemente. Otra forma de corrección fue dada por D. E. Menchov: si f es medible sobre $[0, 2\pi]$. existe una función continua g tal que $f(x) = g(x)$ excepto sobre un conjunto de medida cero y la serie de Fourier de g converge uniformemente.

Kahane y Katz, en 1966, han probado que, dado cualquier conjunto de medida cero, existe una función continua cuya serie de Fourier diverje en cada punto de ese conjunto. Por otra parte, L. Carleson [6] probó, ese mismo año, que es imposible construir una función continua cuya serie de Fourier diverja sobre un conjunto de medida positiva. Su resultado fue: si f es una función en(L_2 $[0,2\pi]$)(en particular, si f es continua), su serie de Fourier converje excepto sobre un conjunto de medida cero. C. Fefferman [11] y [12] ha extendido, en 1971, el resultado de Carleson, a series de Fourier múltiples.

Observación. Es evidente que han quedado muchos aspectos importantes sin mencionar. El lector interesado puede consultar la bibliografía, principalmente, [19] y [21]. Lo poco que hemos mencionado permite apreciar la enorme influencia que las series de Fourier han ejercido en el desarrollo del Análisis Matemático moderno. Una descripción detallada de los resultados recientes y de la importancia de las series de Fourier en la Física y la Ingeniería será el objeto de una nota futura.

BIBLIOGRAFIA

1. T. M. APOSTOL, *Mathematical Analysis.* Addison-Wesley, 1965.
2. G. BACHMAN y L. NARICI, *Functional Analysis,* Academic Press, 1966.
3. N. K. BARI, *The uniqueness problem of the representation of functions by trigonometric series,* Trans. A.M.S., Series 1, Vol. 3, pp. 107-195.
4. C. B. BOYER, *The History of the Calculus and its Conceptual Development,* Dover, 1959.
5. G. CANTOR, *Transfinite Numbers,* Dover, 1955.
6. L. CARLESON, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series,* Acta Math., 116(1966), 135-157.
7. H. S. CARSLAW, *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals,* Dover, 1950.
8. R. V. CHURCHILL, *Fourier Series and Boundary Value Problems,* Mc Graw-Hill, 1963.
9. W. A. COPPEL, J. B. *Fourier , On the occasion of his two hundreth birthday,* Amer. Math. Monthly, 76 (1969), 468-483.
10. A. DENJOY, *Le Calcul des Coefficients d'une Série Trigonométrique,* Gauthier-Villars, 1941.
11. C. FEFFERMAN, *On the divergence of multiple Fourier series,* Bull. Amer. Math. Soc., 77 (1971), 191-195.
12. — — — , *On the convergence of multiple Fourier series,* Bull. Amer. Math. Soc., 77 (1971), 744-745.
13. B. R. GELBAUM y J.M.H. OLMSTED, *Counterexamples in Analysis,* Holden-Day, 1964.
14. C. GOFFMAN y D. WATERMAN, *Some aspects of Fourier series,* Amer. Math. Monthly, 77 (1970), 119-133.
15. G. H. HARDY y W. ROGOSINSKI, *Fourier Series,* 3a. Ed., Cambridge, 1965.
16. R. C. JAMES, *Advanced Calculus,* Wadsworth, 1966.
17. C. DE LA VALLEE POUSSIN, *l'Approximation des Fonctions d'une Variable Réelle,* Gauthier-Villars, 1952.
18. E. J. McSHANE, *Trends in Analysis,* Amer. Math. Monthly, 74 (1967), 65-79.
19. C. J. MOZZOCHI, *On the Pointwise Convergence of Fourier series,* Springer-Verlag, 1971.
20. E. T. WHITTAKER y G.N. WATSON, *Modern Analysis,* 4a. Ed.,

Cambridge, 1969.
21. A. Zygmund, *Trigonometric Series,* 2 vols., Cambridge, 1959.