

# Visualización de funciones complejas; siguiendo a Klein, Smale y Thurston

Álvaro Álvarez–Parrilla

Grupo Alximia SA de CV  
Ensenada, Baja California, México  
[alvaro.uabc@gmail.com](mailto:alvaro.uabc@gmail.com),

Leydi J. González–Cely

Instituto de Matemáticas  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Oaxaca, Oax., México  
[leidyjohannagonzalezcely@gmail.com](mailto:leidyjohannagonzalezcely@gmail.com),

Roberto Gutiérrez–Soto

Centro de Ciencias Matemáticas  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Morelia, Mich., México  
[rgutierrez.s@outlook.com](mailto:rgutierrez.s@outlook.com),

Jesús Muciño–Raymundo

Centro de Ciencias Matemáticas  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Morelia, Mich., México  
[muciray@matmor.unam.mx](mailto:muciray@matmor.unam.mx)

y

Clío H. Rodríguez–Basulto

Centro de Ciencias Matemáticas  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Morelia, Mich., México  
[hurimath@gmail.com](mailto:hurimath@gmail.com)

## 1. El problema

Cerramos los ojos e imaginamos la gráfica de una función real de variable real (un polinomio, una función racional, el coseno, la exponencial, ...). Podemos distinguir sus raíces, puntos críticos, máximos, mínimos

---

*Palabras clave:* Funciones analíticas complejas, superficies de Riemann, mosaicos en la esfera de Riemann.

y asíntotas. La gráfica nos permite reconocer las propiedades de la función a vista de pájaro.

Cuando pasamos a funciones de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$ , la situación es más complicada. El caso particular de las funciones complejas es nuestro objetivo.

*¿Cómo visualizar una función  $f(z)$  analítica compleja?*

Desde mediados de los años 80's, el uso de la visualización por computadora ha generado una gran cantidad de imágenes *v.g.* [30], [3], que a pesar de su belleza no son siempre fáciles de interpretar. En particular, su atractivo ha impulsado el interés en el área de dinámica holomorfa.

El presente artículo muestra sucintamente ideas del estudio de funciones analíticas, que se han usado desde fines del siglo XIX hasta nuestros días.

El contenido es como sigue. En §2, jalamos y empujamos la red cartesiana (de trayectorias horizontales y verticales) con una función analítica compleja. Ambas operaciones producen redes muy distintas, para una misma función. Ello nos lleva a diferenciar los puntos del dominio de una función en: regulares y críticos, los cuales se describen en §3 y §4, en particular véase la tabla (4). Una primera conclusión es que localmente las funciones analíticas complejas están controladas cualitativamente por el orden de ramificación, que es un número entero positivo; un resultado de gran simplicidad. En §5 se presentan dos herramientas para el estudio global de estas funciones: la noción de mosaico a dos colores y el algoritmo, que nosotros atribuimos a F. Klein; a cada función analítica compleja en la esfera de Riemann le corresponde un mosaico a dos colores con vértices en los puntos críticos de la función. Algunas familias de mosaicos y funciones, es el contenido de §6. En §7 se comenta la correspondencia entre mosaicos y funciones; así como un ejemplo de W. P. Thurston, que provee un mosaico a dos colores que no proviene de una función racional (bajo el algoritmo de Klein). Un segundo algoritmo de visualización que requiere jalar la red polar y se debe esencialmente a S. Smale se presenta en §8. Dicho algoritmo permite apreciar los ceros, polos y puntos críticos de una función simultáneamente. Cabe aclarar que el algoritmo de Smale está relacionado con campos vectoriales analíticos complejos y sus flujos, véase [3]. Finalizamos en §9, con un listado de notas, no exhaustivo, sobre el desarrollo del problema y referencias bibliográficas concretas.

## 2. Empujando y jalando la red cartesiana

Nuestro objeto inicial es una función  $f(z)$  analítica compleja, para fijar ideas un polinomio es adecuado. La notación para ella es

$$f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w$$

$$z = x + iy \longmapsto u(x, y) + iv(x, y) = \Re f(z) + i \Im f(z),$$

donde  $\mathcal{D}$  es un conjunto abierto, conexo y  $w = f(z)$ . Por definición,  $f(z)$  analítica compleja significa que ella se expresa en cada punto  $z_0 \in \mathcal{D}$  como una serie de potencias convergente en un disco abierto  $D(z_0, r) = \{|z - z_0| < r\} \subset \mathcal{D}$ , como veremos en (1).

Proveemos al plano  $\mathbb{C}$  de la *red cartesiana* de trayectorias horizontales y verticales

$$\mathcal{F}_1 = \underbrace{\{\Im z = y_0 \mid y_0 \in \mathbb{R}\}}_{\text{en negro}}, \quad \mathcal{F}_2 = \underbrace{\{\Re z = x_0 \mid x_0 \in \mathbb{R}\}}_{\text{en rojo}},$$

véase la figura 1.

**Observación 2.1.** *Propiedades de la red cartesiana  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ .*

- i) *Por cada punto  $z \in \mathbb{C}_z$ , pasan exactamente una trayectoria horizontal de  $\mathcal{F}_1$  y una trayectoria vertical de  $\mathcal{F}_2$ .*
- ii) *En cada punto las trayectorias horizontales y verticales forman un ángulo de  $\pi/2$ .*
- iii) *Las trayectorias horizontales y verticales de la red cartesiana están orientadas, i.e. dados dos puntos en una trayectoria podemos decir cual antecede al otro, siguiendo el orden de los ejes  $\mathbb{R}$  e  $i\mathbb{R}$  en  $\mathbb{C}$ .*

*Operación de empujar<sup>1</sup> una red.* Dada una función  $f$  analítica compleja, consideramos la red cartesiana  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  en el dominio  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z$  y calculamos su imagen bajo  $f$  en  $f(\mathcal{D}) \subseteq \mathbb{C}_w$ .

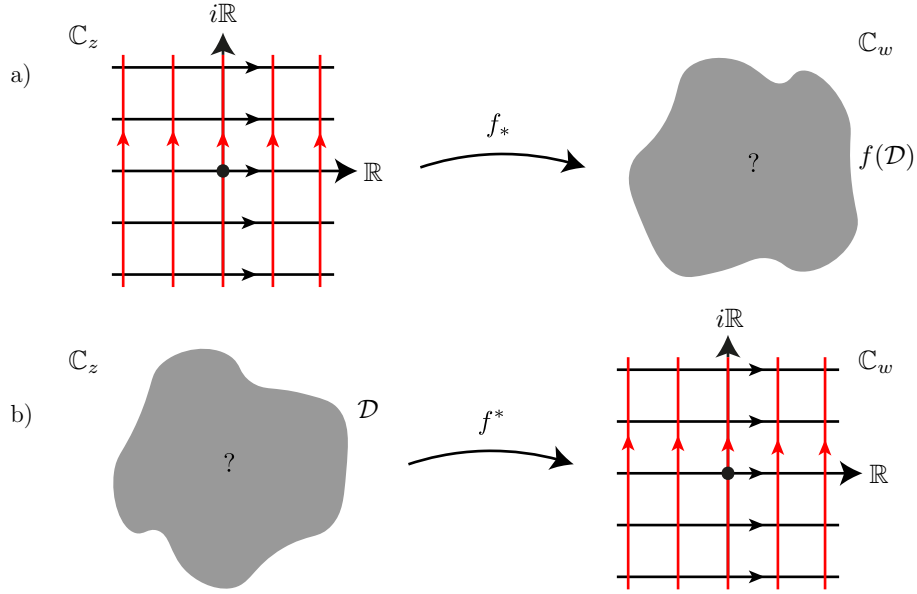
Las expresiones explícitas para las trayectorias de la red empujada son

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}_z & \longrightarrow & \mathbb{C}_w \\ x & \longmapsto & \underbrace{x + iy_0}_{\mathcal{F}_1} & \longmapsto & \underbrace{u(x + iy_0) + iv(x + iy_0)}_{f_*\mathcal{F}_1}, \\ y & \longmapsto & \underbrace{x_0 + iy}_{\mathcal{F}_2} & \longmapsto & \underbrace{u(x_0 + iy) + iv(x_0 + iy)}_{f_*\mathcal{F}_2}, \end{array}$$

donde al variar  $y_0 \in \mathbb{R}$  se describe las trayectorias horizontales; el mecanismo análogo aplica para las trayectorias verticales.

La notación usual para la operación de empujar es  $f_*$ .

<sup>1</sup> Las operaciones de empujar y jalar objetos bajo un morfismo son llamadas en inglés *push-forward* y *pullback*.



**Figura 1.** Empujando y jalando la red cartesiana bajo una función.

*Operación de jalar una red.* Dada una función  $f$  analítica compleja, consideramos la red cartesiana  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  en el contradominio  $f(\mathcal{D}) \subseteq \mathbb{C}_w$ , calculamos la imagen inversa de ella bajo  $f$  en  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z$ . Las ecuaciones resultantes para las trayectorias de la red jalada son

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_w &\longrightarrow \mathbb{C}_z \\ \underbrace{\{y_0 = 0\}}_{\mathcal{F}_1} &\longmapsto \{\Im f(z) = y_0\} = \underbrace{\{v(x, y) = y_0\}}_{f^* \mathcal{F}_1}, \\ \underbrace{\{x_0 = 0\}}_{\mathcal{F}_2} &\longmapsto \{\Re f(z) = x_0\} = \underbrace{\{u(x, y) = x_0\}}_{f^* \mathcal{F}_2}. \end{aligned}$$

Las trayectorias de la red  $f^* \mathcal{F}_1, f^* \mathcal{F}_2$  asumen la forma de curvas de nivel (no de trayectorias parametrizadas, como sucede al empujar la red cartesiana). Análogamente,  $f^*$  es la notación común para la operación de jalar.

Si  $f$  posee función inversa  $f^{-1} : f(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}$ , entonces las operaciones de jalar y empujar son inversa una de la otra en el siguiente sentido

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z &\xrightarrow{f} f(\mathcal{D}) \subseteq \mathbb{C}_w && \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z \\ \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 &\xrightarrow{f_*} f_*(\mathcal{F}_1), f_*(\mathcal{F}_2) && \xrightarrow{f_*^{-1}} \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2. \end{aligned}$$

En breve  $f_*^{-1} = f^*$ .

### 3. Puntos regulares

Decimos que  $z_0 \in \mathcal{D}$  es un **punto regular de  $f$**  cuando  $\frac{df}{dz}(z_0) \neq 0$ .

**Teorema 3.1** (De la función inversa). *Para una función  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_w$  analítica compleja, las afirmaciones siguientes son equivalentes.*

1.  $z_0 \in \mathcal{D}$  es un punto regular de  $f$ .
2. En un disco abierto de  $z_0$  suficientemente pequeño  $D(z_0, r) = \{|z - z_0| < r\} \subseteq \mathcal{D}$ ,  $f$  es invertible y se reescribe salvo cambios de coordenadas como

$$\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{z}.$$

3. Por  $z_0$  pasa exactamente una trayectoria de la red jalada  $f^*\mathcal{F}_1$ .
4. Por  $z_0$  pasa exactamente una trayectoria de la red jalada  $f^*\mathcal{F}_2$ .
5. En una vecindad abierta de  $z_0$  suficientemente pequeña  $D(z_0, r) = \{|z - z_0| < r\}$ , la función restringida

$$f : D(z_0, r) \subseteq \mathcal{D} \rightarrow f(D(z_0, r))$$

es 1 a 1.

La afirmación (2) usa  $f^{-1}$  como cambio de coordenadas

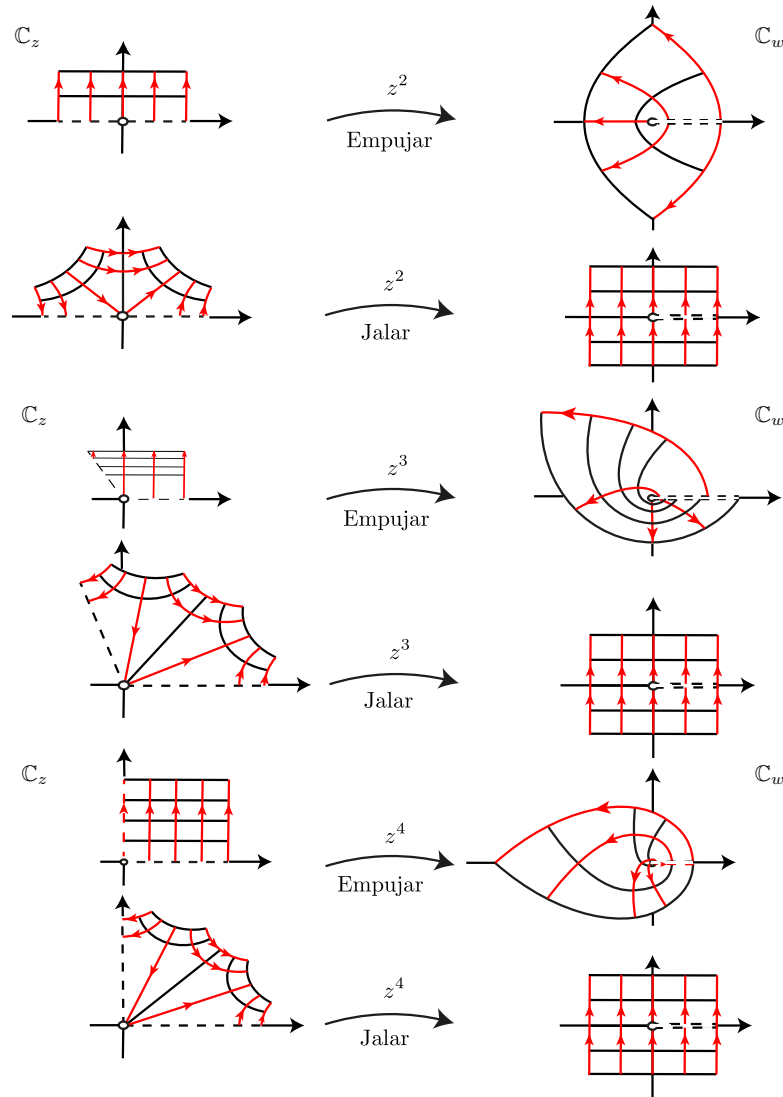
$$\begin{array}{ccc} D(z_0, r) \subseteq \mathcal{D} & \xrightarrow{f(z)} & f(D(z_0, r)) \\ & \nearrow \mathfrak{z} & \\ f^{-1}(\mathfrak{z}) & \uparrow & \\ & f(D(z_0, r)) & \end{array}$$

La afirmación (5) sobre biyectividad local de  $f$  produce claramente (3) o (4). Usando la hipótesis de analiticidad, (5) implica que su derivada es de rango máximo, que es la afirmación (1).

Nuestra descripción se hace más amplia e interesante al considerar funciones que no son invertibles. En este caso  $f_*\mathcal{F}_1$  y  $f_*\mathcal{F}_2$  no necesariamente forman una red en  $f(\mathcal{D})$ , con las propiedades descritas en la observación 2.1.

**Ejemplo 3.1.** *La operación de jalar  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  produce una red, la operación de empujar en general la destruye, i.e. algunas de las propiedades enlistadas en la observación 2.1 se pierden. Consideramos tres funciones*

$$f(z) = z^n : \mathcal{D}_n \rightarrow \mathbb{C}_w \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}), \quad \text{para } n = 2, 3, 4,$$



**Figura 2.** Tres ejemplos para los cuales al jalar la red cartesiana el resultado es una red con las propiedades de la observación 2.1. Por otra parte al empujar la red cartesiana, las trayectorias resultantes presentan auto intersección, traslapes y/o orientaciones contradictorias. Para  $f(z) = z^n$ , elegimos como dominio un sector angular abierto en  $\mathbb{C}_z$  que barre  $2\pi/n$  radianes; este resulta ser un dominio máximo donde las operaciones de jalar y empujar están bien definidas.

donde  $\mathcal{D}_n = \{z \mid 0 < \arg(z) < 2\pi/n\}$  son sectores angulares abiertos con vértice en el origen y ángulo  $2\pi/n$ . Cada  $f$  es biyectiva con esa elección de dominio e imagen.

Al empujar la red cartesiana, obtenemos  $f_*\mathcal{F}_1$ ,  $f_*\mathcal{F}_2$ . Una mirada muestra que la red empujada posee trayectorias con direcciones opuestas en el eje real positivo  $\mathbb{R}^+$ , véase la figura 2. Esto es, al ampliar un

poco más el dominio  $\mathcal{D}_n$  para  $f(z) = z^n$ ; la red empujada pierde la propiedad de que por casi todo punto pasan exactamente dos trayectorias orientadas.

En contraste, bajo la operación de jalar se obtiene una red que posee trayectorias con una única orientación en  $\mathcal{D}_n$ , véase la figura 2. Es un ejercicio simple hallar las redes  $f^*\mathcal{F}_1$ ,  $f^*\mathcal{F}_2$  en  $\mathcal{D} = \mathbb{C}_z$  y describir su patrón de comportamiento para todo entero  $n \geq 2$ .

El video [24] muestra el resultado de empujar una red vía  $f(z) = z^c$ , para  $0 \leq c \leq 4$  variando en los reales.

La filosofía es «un punto regular  $z_0 \in \mathcal{D}$  de  $f$  es aquel donde las propiedades de la observación 2.1 persisten en la red  $f^*\mathcal{F}_1$ ,  $f^*\mathcal{F}_2$ ». Para

$$z^n : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2,$$

los puntos regulares son  $\mathbb{C}_z \setminus \{0\}$ . En lo que sigue jalaremos redes y miraremos a los puntos no regulares.

## 4. Puntos críticos y forma normal

¿Cómo se comporta una red  $f^*\mathcal{F}_1$ ,  $f^*\mathcal{F}_2$  en un punto donde pasan más de dos trayectorias de la red (*i.e.* en un punto no regular de  $f$ )?

La figura 2 confirma que un fenómeno más complicado ocurre.

*Definición 4.1.* Consideramos una función analítica compleja  $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w$ , un **punto crítico**  $z_0 \in \mathcal{D}$  **de orden**  $k \geq 1$  **para**  $f$  es aquel donde exactamente las primeras  $k$  derivadas de  $f$  se anulan, *i.e.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df}{dz}(z_0) = 0 \\ \vdots \\ \frac{d^k f}{dz^k}(z_0) = 0 \\ \frac{d^{k+1} f}{dz^{k+1}}(z_0) \neq 0. \end{array} \right.$$

Un **valor crítico**  $w_0 \in \mathbb{C}_w$  **de**  $f$  es la imagen de un punto crítico, *i.e.*  $w_0 = f(z_0)$ .

El **índice de ramificación de**  $f$  **en**  $z_0$  es  $k + 1$ .

El significado del índice de ramificación se presentará en (4). Estos conceptos están en consonancia con el hecho siguiente,  $f$  puede representarse mediante una serie de potencias convergente en una vecindad

de  $z_0$ , *i.e.*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{df}{dz}(z_0)(z - z_0) + \dots + \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dz^k}(z_0)(z - z_0)^k + \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1} f}{dz^{k+1}}(z_0)(z - z_0)^{k+1} + \dots \quad (1)$$

Si  $z_0$  es punto crítico de  $f$ , de orden  $k$ , entonces las primeras  $k$  derivadas se anulan y se obtiene la serie

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1} f}{dz^{k+1}}(z_0)(z - z_0)^{k+1} + \dots$$

La filosofía es «un punto crítico  $z_0 \in \mathcal{D}$  de  $f$  es aquel donde algo especial ocurre con la red  $f^* \mathcal{F}_1, f^* \mathcal{F}_2$ ». El siguiente resultado lo establece con precisión.

**Teorema 4.1** (La forma normal local). *Para una función  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_w$  analítica compleja, las afirmaciones siguientes son equivalentes.*

- 1)  $z_0 \in \mathcal{D}$  es un punto crítico de  $f$  de orden  $k \geq 1$ .
- 2) En un disco abierto de  $z_0$  suficientemente pequeño  $D(z_0, r) \subseteq \mathcal{D}$ ,  $f$  se escribe salvo cambios de coordenadas como

$$\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{z}^{k+1}. \quad (2)$$

- 3) Por  $z_0$  pasan exactamente  $k+1$  trayectorias de la red  $f^* \mathcal{F}_1$ .
- 4) Por  $z_0$  pasan exactamente  $k+1$  trayectorias de la red  $f^* \mathcal{F}_2$ .
- 5) En una vecindad abierta ponchada de  $z_0$  suficientemente pequeña  $D(z_0, r) \setminus \{z_0\} = \{0 < |z - z_0| < r\}$ , la función restringida

$$f : D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \rightarrow f(D(z_0, r)) \setminus \{f(z_0)\}$$

es  $k+1$  a 1.

La forma normal local de  $f$  en  $z_0 \in \mathcal{D}$  es (2).

*Idea de la prueba.* La afirmación (2) nos dice que existen dos cambios de coordenadas analíticos complejos  $\mathfrak{z} \mapsto g(\mathfrak{z})$  y  $w \mapsto w - f(z_0)$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} D(z_0, r) \subseteq \mathcal{D} & \xrightarrow{f(z)} & f(D(z_0, r)) \\ \uparrow g(\mathfrak{z}) & & \downarrow w - f(z_0) \\ \mathcal{D}_2 & \xrightarrow{\mathfrak{z}^{k+1}} & \mathbb{C} \end{array}$$



conmuta. La construcción de  $g$  puede leerse en [25, p. 284]. Véanse las figuras 3 y 4.  $\square$

Conviene enfatizar la naturaleza de las afirmaciones en el teorema 4.1: (1) es una afirmación analítica, (2) es una condición de simplicidad, (3) y (4) son geométricas. Mientras que (5) solo usa conjuntos y explica claramente el significado del índice de ramificación de  $f$  en  $z_0$ . Sorprendentemente las cinco afirmaciones son equivalentes cuando  $f$  es analítica compleja.

Es inmediato verificar que los ceros  $z_0$  de  $f(z)$  con multiplicidad  $s \geq 2$  son puntos críticos de orden  $s - 1$ . Por ello «los puntos críticos de  $f$  son más fácilmente visibles que los ceros simples de  $f$ ».

Recordemos que una función meromorfa en  $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_w$  es aquella que en cada punto  $z_0 \in \mathcal{D}$  puede representarse mediante:

- i) Una serie de potencias convergente (1) en una vecindad de  $z_0$ , o
- ii) una serie de potencias de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_k(z - z_0)^k + \dots \quad (3)$$

convergente en una vecindad de  $z_0$  de la cual se remueve dicho punto, con  $a_{-k} \neq 0$ . En este caso  $z_0$  es un polo de  $f$  con multiplicidad  $-k \leq -1$ .

¿Cómo usar la forma normal para estudiar los polos de una función meromorfa  $f(z) : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ ?

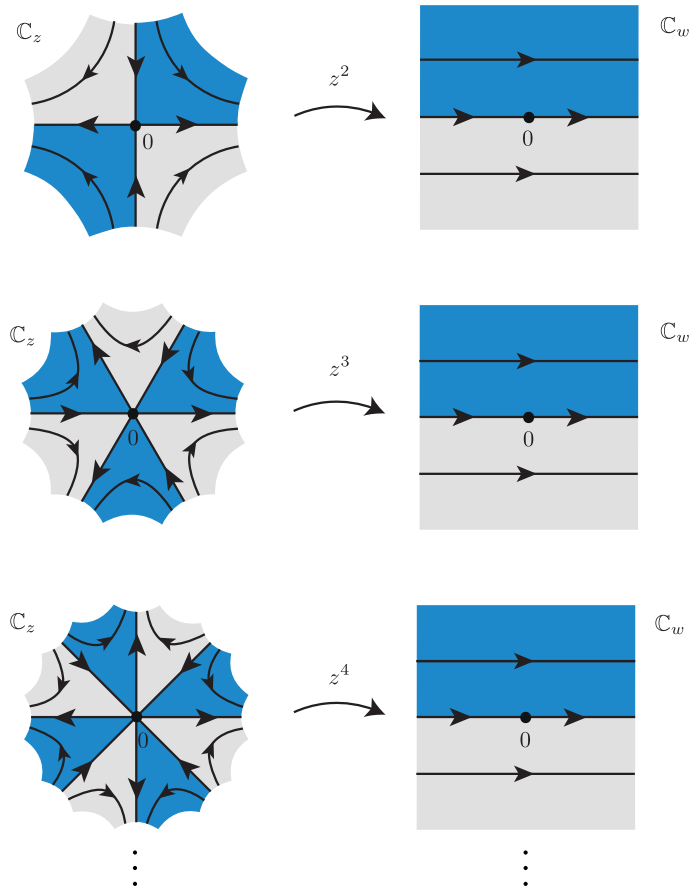
Mantenemos la notación  $\mathcal{D}$  para el dominio, si bien ahora puede contener polos de  $f$ . Recordamos que la esfera de Riemann es  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Utilizando la variable  $\nu \in \mathbb{Z}$ , por definición tenemos que:  $f(z)$  posee un polo con multiplicidad  $\nu \leq -1$  en  $z_0 \in \mathcal{D}$  si y solo si  $1/f(z)$  posee un cero con multiplicidad  $\nu \geq 1$  en  $z_0$ .

**Corolario 4.1** (La forma normal local para ceros y polos). *Para una función  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$  meromorfa, no idénticamente constante, la forma normal local de  $f$  en  $z_0 \in \mathcal{D}$  es*

$$z \mapsto \begin{cases} z^\nu & \text{para } z_0 \text{ cero con multiplicidad } \nu \geq 1 \\ z^\nu = \frac{1}{z^{|\nu|}} & \text{para } z_0 \text{ polo con multiplicidad } \nu \leq -1. \end{cases}$$

En resumen, para una función  $f$  meromorfa en todos los puntos  $z_0 \in \mathcal{D}$ , tenemos las implicaciones siguientes

$$\begin{array}{ccc} \text{cero o polo de} & \implies & \text{punto} \\ \text{multiplicidad} & & \text{regular} \\ \nu = \pm 1 & & \iff \text{índice de} \\ & & \text{ramificación 1,} \end{array}$$



**Figura 3.** Mosaicos a dos colores para  $f(z) = z^k$ , hemos coloreado de tal forma que;  $z \in \mathbb{C}_z$  es azul si  $\Im z^k > 0$  y  $z \in \mathbb{C}_z$  es gris si  $\Im z^k < 0$  (la definición 5.1 en §5 describirá nuestros mosaicos).

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{cero de} \\
 \text{multiplicidad} \\
 \nu \geq 2 \\
 \implies \\
 \text{punto crítico} \\
 \text{de orden} \\
 k = \nu - 1 \geq 1
 \end{array} \right\} \iff \text{índice de ramificación} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \text{polo de} \\
 \text{multiplicidad} \\
 \nu \leq -2 \\
 \implies \\
 \text{punto crítico} \\
 \text{de orden} \\
 k = |\nu| - 1 \geq 1
 \end{array} \right\} \iff |\nu| \geq 2. \tag{4}$$

Por ello se cumple que

$$\{ \text{ceros y polos} \} \cap \{ \text{puntos críticos} \} = \{ \text{ceros y polos con multiplicidad } |\nu| \geq 2 \}. \tag{5}$$

Convenimos que la multiplicidad de los polos es negativa. Una ventaja de ello es que toda función racional o meromorfa<sup>2</sup>  $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$  satisface la *igualdad de Hurwitz*

$$\sum (\text{multiplicidades de ceros}) + \sum (\text{multiplicidades de polos}) = 0. \quad (6)$$

Ello nos lleva al concepto siguiente, el número  $n \geq 0$  de preimágenes  $f^{-1}(0)$  contadas con multiplicidad se llama el *grado de  $f$* .

La igualdad (6) admite diversas pruebas. Una prueba casi topológica puede leerse en [18, cap. II §4], o bien usando la fórmula integral  $\frac{1}{2\pi i} \int (f'(\zeta)/f(\zeta))d\zeta$  que cuenta polos y ceros [25, p. 389], si bien este camino requiere tratar con el infinito.

La naturalidad de las figuras 3 y 4 es como sigue: en la figura 3 se describe el comportamiento de los monómios  $f(z) = z^k$ , mientras que en la figura 4 se ilustra que este comportamiento persiste para puntos críticos de funciones arbitrarias. A continuación explicaremos la conveniencia de usar dos colores en ellas.

## 5. Jalando colores; algoritmo de visualización de Klein

En esta sección, nuestro objetivo es presentar un algoritmo de visualización que permita detectar los puntos críticos de  $f$  con sus órdenes.

Como herramienta introducimos el siguiente concepto de mosaico *ad hoc*.

*Definición 5.1.* Un **mosaico a dos colores**  $\mathfrak{M}_\Gamma$  de la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}_z$  está generado por una gráfica  $\Gamma$  orientada, encajada en  $\widehat{\mathbb{C}}_z$ , de tal manera que

$$\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma = \underbrace{(T_1 \cup \dots \cup T_v \cup \dots)}_{\text{losetas azules}} \cup \underbrace{(T'_1 \cup \dots \cup T'_v \cup \dots)}_{\text{losetas grises}}, \quad (7)$$

satisface lo siguiente:

- i) Cada **loseta**  $T_v$  o  $T'_v$  es un dominio abierto, máximo y simplemente conexo de  $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$  (la frontera de la cerradura de la loseta está contenida en  $\Gamma$ ).
- ii) Cada loseta está coloreada con uno de dos colores posibles (azul o gris).
- iii) Dos losetas adyacentes mediante una arista de  $\Gamma$  poseen colores distintos.

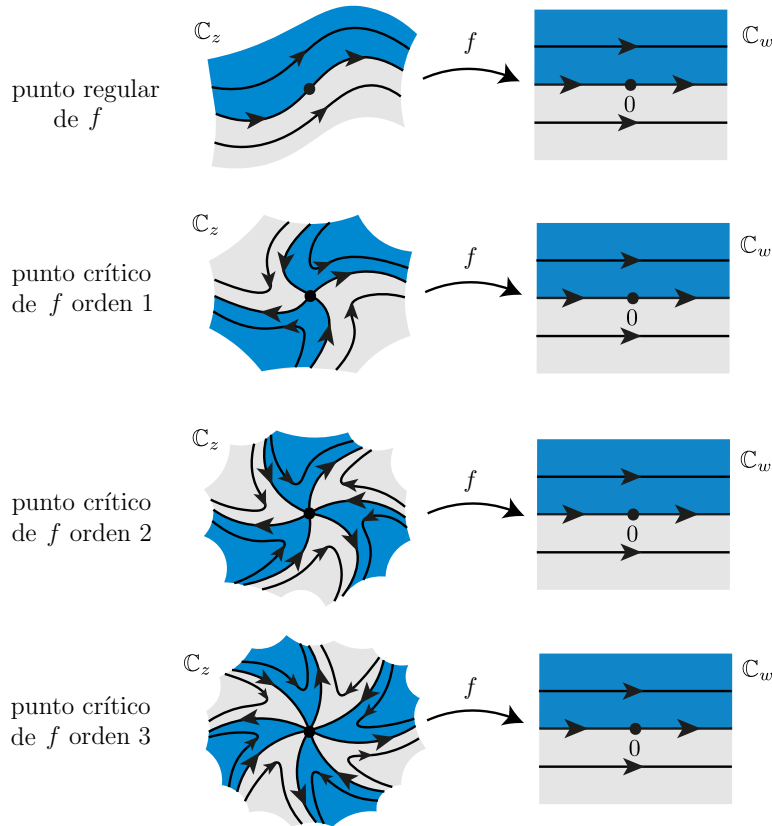
<sup>2</sup> Por simplicidad, para funciones  $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$  usamos racional y meromorfa como sinónimos.

- iv) Cada vértice de  $\Gamma$  posee un número finito par o un número infinito de aristas adyacentes.

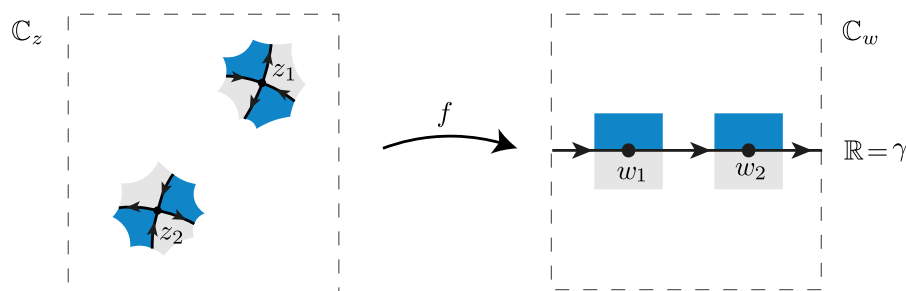
En lo que sigue, convenimos que un mosaico  $\mathfrak{M}_\Gamma$  y su descripción como en (7) son un mismo objeto.

En casi todos nuestros ejemplos  $\Gamma$  y  $\mathfrak{M}_\Gamma$  poseen un número finito de vértices, aristas y losetas. Sin embargo, los ejemplos con un número infinito de elementos son naturales y aún más interesantes.

**Ejemplo 5.1.** Consideramos un polinomio  $f$  de grado tres con puntos críticos  $z_1, z_2$  de orden 1 y valores críticos  $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2)$ . De acuerdo a la forma normal tenemos dos «mosaicos locales» alrededor de los puntos críticos, véanse las figuras 4 y 5. ¿Es posible pegar globalmente esos mosaicos locales de forma continua para formar un mosaico a dos colores en todo el plano  $\mathbb{C}_z$ ? ¿Cómo podemos construir ese mosaico?



**Figura 4.** Mosaicos a dos colores en la vecindad de un punto regular y puntos críticos de órdenes 1, 2 y 3 (sin pérdida de generalidad con valor crítico 0).



**Figura 5.** Los mosaicos locales para un polinomio de grado tres deben pegar globalmente para formar un mosaico de Klein bien definido en todo  $\mathbb{C}_z$ .

**Algoritmo de visualización de Klein** (para funciones meromorfas en la esfera de Riemann).

Consideramos una función meromorfa

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad \text{de grado } n \geq 2.$$

**Paso 1.** Localizamos los puntos críticos de  $f$

$$z_1, \dots, z_m \subset \widehat{\mathbb{C}}_z$$

y calculamos sus valores críticos

$$w_1, \dots, w_n \subset \widehat{\mathbb{C}}_w,$$

donde claramente  $m \geq n$ . Más aún es posible mostrar que

$$2n - 2 \geq m \geq n \geq 2,$$

pero no usaremos esta cota explícitamente.

**Paso 2.** Consideramos una trayectoria orientada  $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$  que pasa una vez por todos los valores críticos de  $f$  y que divide la esfera de Riemann en dos dominios abiertos de Jordan

$$\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus \gamma = \underbrace{T}_{\text{loseta azul}} \cup \underbrace{T'}_{\text{loseta gris}}.$$

Convenimos que el dominio de Jordan (o loseta)  $T$  es aquel cuya frontera es recorrida por  $\gamma$  en sentido antihorario y lo coloreamos con azul.

**Paso 3.** Calculamos la **trayectoria generadora** del mosaico

$$\Gamma = f^* \gamma = \{z \mid f(z) \in \gamma\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_z.$$

Usando la continuidad de  $f$  y la forma normal es fácil verificar las siguientes propiedades de la trayectoria generadora  $\Gamma$ :

- 1) es compacta,
- 2) está orientada,
- 3) contiene cada punto crítico de  $f$ ,

4) divide a  $\widehat{\mathbb{C}}_z$  en dominios de Jordan.

**Paso 4.** Coloreamos las losetas (componentes abiertas conexas) de  $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$  como sigue:

- i) un punto  $z \in \widehat{\mathbb{C}}_z$  es azul si  $f(z)$  está en la loseta azul  $T$ ,
- ii) un punto  $z \in \widehat{\mathbb{C}}_z$  es gris si  $f(z)$  está en la loseta gris  $T'$ .

El siguiente algoritmo, nosotros lo atribuimos a F. Klein, quien presentó bellas figuras, véase [7], [15] y [26]. Aunque esas ideas también están implícitas en el trabajo de H. A. Schwarz [27] sobre ecuaciones diferenciales, véase el comentario 2 en §9. El algoritmo se puede resumir como sigue.

**Teorema 5.1** (F. Klein). *1) Toda función meromorfa  $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ , de grado  $n \geq 1$ , provista de una trayectoria  $\gamma$  que recorre sus valores críticos, determina un mosaico a dos colores*

$$\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma = \underbrace{T_1 \cup \dots \cup T_n}_{\text{losetas azules}} \cup \underbrace{T'_1 \cup \dots \cup T'_n}_{\text{losetas grises}}, \quad (8)$$

con  $n$  losetas de cada color.

2) La función  $f$  restringida a dos losetas adyacentes

$$f : T_\ell \cup T'_\ell \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \setminus \gamma$$

es 1 a 1.

La ecuación (8) coincide con la definición 5.1, donde cada componente conexa abierta de (8) es una loseta. La elección de  $\gamma$  y el cálculo de  $\Gamma = f^*\gamma$  pueden ser no triviales. Las veces que  $\Gamma$  atraviesa por un punto crítico  $z_j$  dependen de la multiplicidad del punto. Para empezar es conveniente el siguiente concepto.

*Definición 5.2.* Una función meromorfa  $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$  es **afortunada**<sup>3</sup> si todos sus valores críticos  $w_1, \dots, w_m$  están en  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

**Corolario 5.1.** *Para una función meromorfa  $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$  afortunada, su trayectoria generadora*

$$\Gamma = \{\Im(f(z)) = 0\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_z,$$

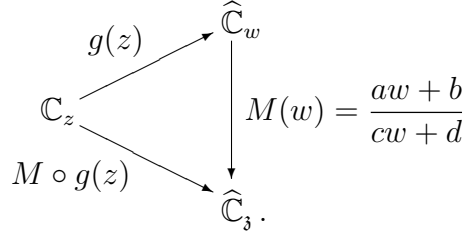
describe un mosaico a dos colores de  $\widehat{\mathbb{C}}_z$ , con  $f(T_\ell) = \{w \mid \Im(w) > 0\}$ .

Observamos que  $\Gamma$  es fácil de graficar (en casos simples) y proviene de jalar una trayectoria horizontal, por ello  $\Gamma \subset \mathbb{C}_z$  es una trayectoria de  $f^*\mathcal{F}_1$ .

Las transformaciones de Möbius son los automorfismos analíticos complejos de  $\widehat{\mathbb{C}}$  y nos permiten llevar cualquier círculo de  $\widehat{\mathbb{C}}_w$  en la

<sup>3</sup> Esta terminología es sugestiva en castellano, por eso la introducimos, véase el comentario 7 en §9.

recta  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Si los valores críticos de  $g(z)$  están en un círculo, entonces podemos llevarlos a  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , como sigue:



Por ello y sin pérdida de generalidad, para tal  $g$  tenemos que su trayectoria generadora es

$$\Gamma = \{\Im(M \circ g(z)) = 0\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_z.$$

### 6. Familias de mosaicos

**Ejemplo 6.1** (Monomios de grado  $n$ ). *Consideramos la función*

$$z^n : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad n \geq 2,$$

*en la esfera de Riemann. Es útil usar notación de parejas*

$$(\text{punto, multiplicidad u orden}) \in \widehat{\mathbb{C}} \times \mathbb{Z}$$

*para polos, ceros y puntos críticos (dichas parejas son llamados divisores en geometría algebraica). A continuación agrupamos sus datos.*

*Tabla. Para  $z \mapsto z^n$ .*

<i>polos, multiplicidad</i>	<i>ceros, multiplicidad</i>	<i>puntos críticos <math>z_j</math>, orden</i>	<i>valores críticos <math>w_i</math></i>
$(\infty, -n)$	$(0, n)$	$(0, n - 1)$ $(\infty, n - 1)$	0 $\infty$

*La trayectoria generadora de  $z^n$  está formada por;  $n$  rectas por el origen que forman ángulos  $\pi/n$  y el  $\infty$ . Para grado  $n = 2, 3, 4$  ellas son*

$$\begin{aligned}
 \{\Im z^2 = 0\} &= \{2xy = 0\}, \\
 \{\Im z^3 = 0\} &= \{y(\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y) = 0\}, \\
 \{\Im z^4 = 0\} &= \{4xy(x - y)(x + y) = 0\}.
 \end{aligned}$$

*El mosaico  $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$  de  $z^n$  es una esfera con  $n$  gajos azules y  $n$  gajos grises, véase las figuras 6 y 7.*

**Ejemplo 6.2** (Polinomios de grado 3). *Consideramos en la esfera de Riemann un polinomio afortunado de grado 3 con dos puntos críticos finitos de orden 1, como en la siguiente:*

Tabla. Para  $z \mapsto \frac{z^3}{3} - z$ .

<i>polos, multiplicidad</i>	<i>ceros, multiplicidad</i>	<i>puntos críticos <math>z_j</math>, orden</i>	<i>valores críticos <math>w_l</math></i>
$(\infty, -3)$	$(0, 1)$	$(-1, 1)$	$\frac{2}{3}$
	$(\sqrt{3}, 1)$	$(1, 1)$	$-\frac{2}{3}$
	$(-\sqrt{3}, 1)$	$(\infty, 2)$	$\infty$

Su trayectoria generadora es

$$\left\{ \Im \left( \frac{z^4}{2} - \frac{z^2}{2} \right) = 0 \right\} = \left\{ y \left( -1 + x^2 - \frac{1}{3}y^2 \right) = 0 \right\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_z.$$

Véase la figura 6.

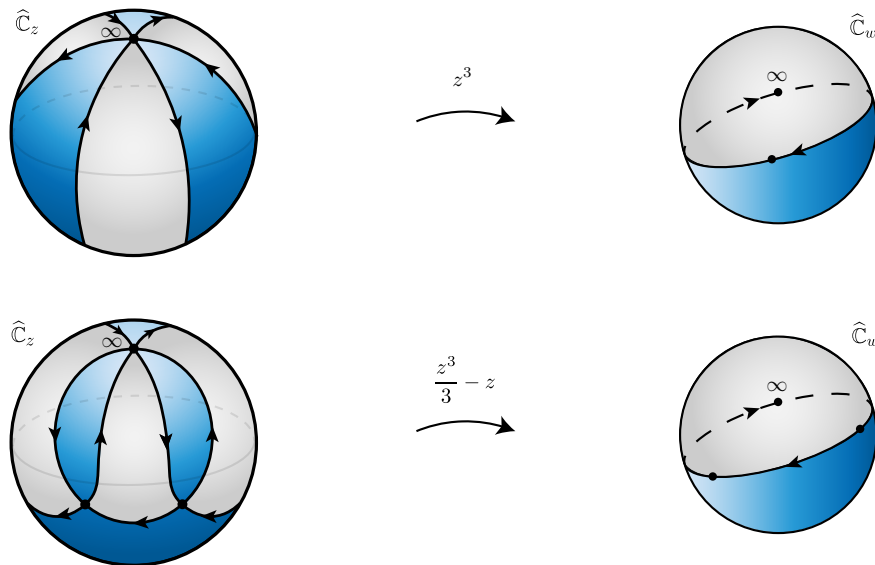


Figura 6. Dos mosaicos de Klein para polinomios de grado 3.

**Ejemplo 6.3** (Polinomios de grado 4). Consideramos en la esfera de Riemann dos polinomios afortunados de grado 4, como sigue:



Tabla. Para  $z \mapsto \frac{z^4}{4} - \frac{z^2}{2}$ .

polos, multiplicidad	ceros, multiplicidad	puntos críticos $z_j$ , orden	valores críticos $w_l$
$(\infty, -4)$	$(0, 2)$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{4}$
	$(\sqrt{2}, 1)$	$(0, 1)$	0
	$(-\sqrt{2}, 1)$	$(1, 1)$	$-\frac{1}{4}$
		$(\infty, 3)$	$\infty$

Es un polinomio afortunado y su trayectoria generadora es

$$\left\{ \Im \left( \frac{z^4}{4} - \frac{z^2}{2} \right) = 0 \right\} = \{xy(-1 + x^2 - y^2) = 0\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_z.$$

El polinomio siguiente también es afortunado y posee 3 puntos críticos de orden uno.

Tabla. Para  $z \mapsto \frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z$ .

polos, multiplicidad	ceros, multiplicidad	puntos críticos $z_j$ , orden	valores críticos $w_l$
$(\infty, -4)$	$(0, 1), (c_2, 1)$	$(-1, 1)$	$-\frac{11}{12}$
	$(c_3, 1), (c_4, 1)$	$(1, 2)$	$\frac{5}{12}$
		$(\infty, 3)$	$\infty$

Los puntos críticos son fáciles de calcular, en contraste, los ceros poseen expresiones más complicadas, por ejemplo

$$c_1 = 4/9 + \left( 7(5)^{2/3}(1 + i\sqrt{3}) \right) / \left( 9(2(107 - 27\sqrt{11}))^{1/3} \right) + \\ \left( ((1 - i\sqrt{3})(5(107 - 27\sqrt{11}))^{1/3}) \right) / (9(2)^{2/3}).$$

Además su trayectoria generadora es

$$\left\{ \Im \left( \frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z \right) = 0 \right\} = \\ \left\{ y \left( (x-1)^2(x+1) + \left( -x + \frac{1}{3} \right) y^2 \right) = 0 \right\}.$$

Véase la figura 7.

¿Por qué hemos preferido esos ejemplos de polinomios de grados 3 y 4 en las figuras 6 y 7?

Una primera clasificación de los polinomios de grado  $n$  (fijo) en subfamilias usa que ellos poseen  $n - 1$  puntos críticos finitos. Cada partición

$$\{k_1, k_2, \dots, k_\ell\}, \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^{\ell} k_j = n - 1,$$

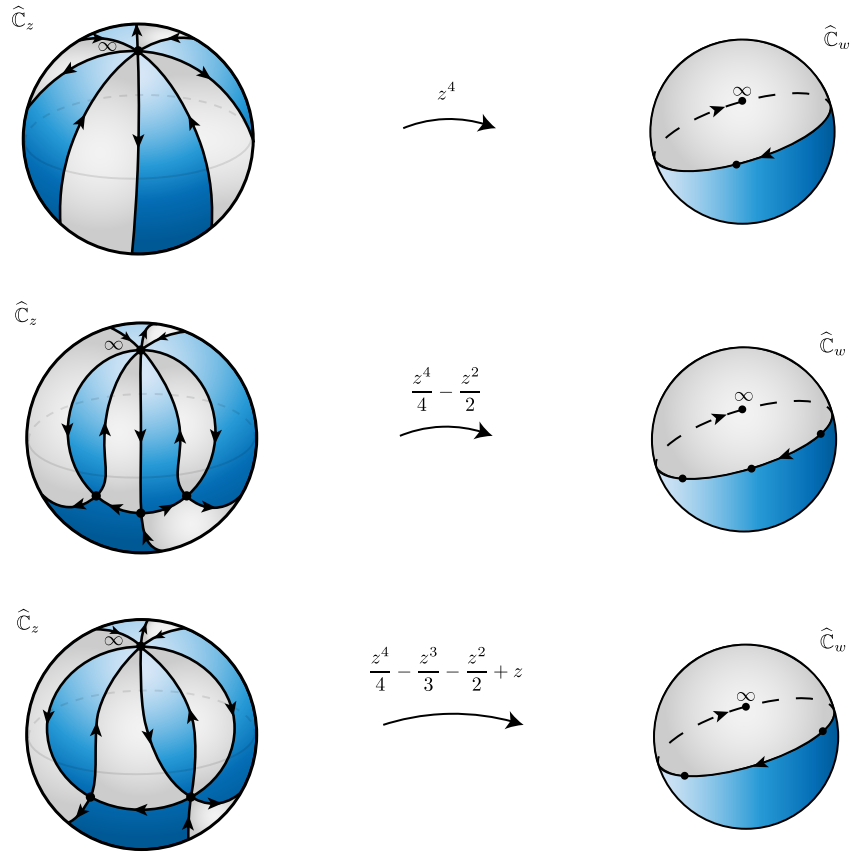


Figura 7. Tres mosaicos de Klein para polinomios de grado 4.

determina una subfamilia de los polinomios complejos de grado  $n$ , con puntos críticos finitos de esos órdenes (el orden  $n - 1$  del punto  $\infty \in \widehat{C}_z$  se obvia). Nuestros ejemplos describen las posibles familias de polinomios para grados 2, 3 y 4, de acuerdo a los órdenes de puntos críticos finitos determinados por las particiones del grado correspondiente

grado 2	$\{1\}$
grado 3	$\{1, 1\}, \{2\}$
grado 4	$\{1, 1, 1\}, \{2, 1\}, \{3\}$ .

**Ejemplo 6.4** (Funciones racionales). *Mostramos en la figura 8 cuatro funciones racionales. La primera  $f(z) = 1/z$  es una función de Möbius y carece de puntos críticos en  $\widehat{C}_z$ , por lo que el algoritmo de Klein no puede aplicarse (si bien dividir la esfera  $\widehat{C}_w$  usando  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  y jalar los colores es natural). Los otros tres ejemplos son funciones racionales con coeficientes reales, no afortunadas. Es fácil verificar que sus puntos*

críticos en  $\mathbb{C}_z$  son de orden 1 y vienen en parejas conjugadas complejas, pero no reales.

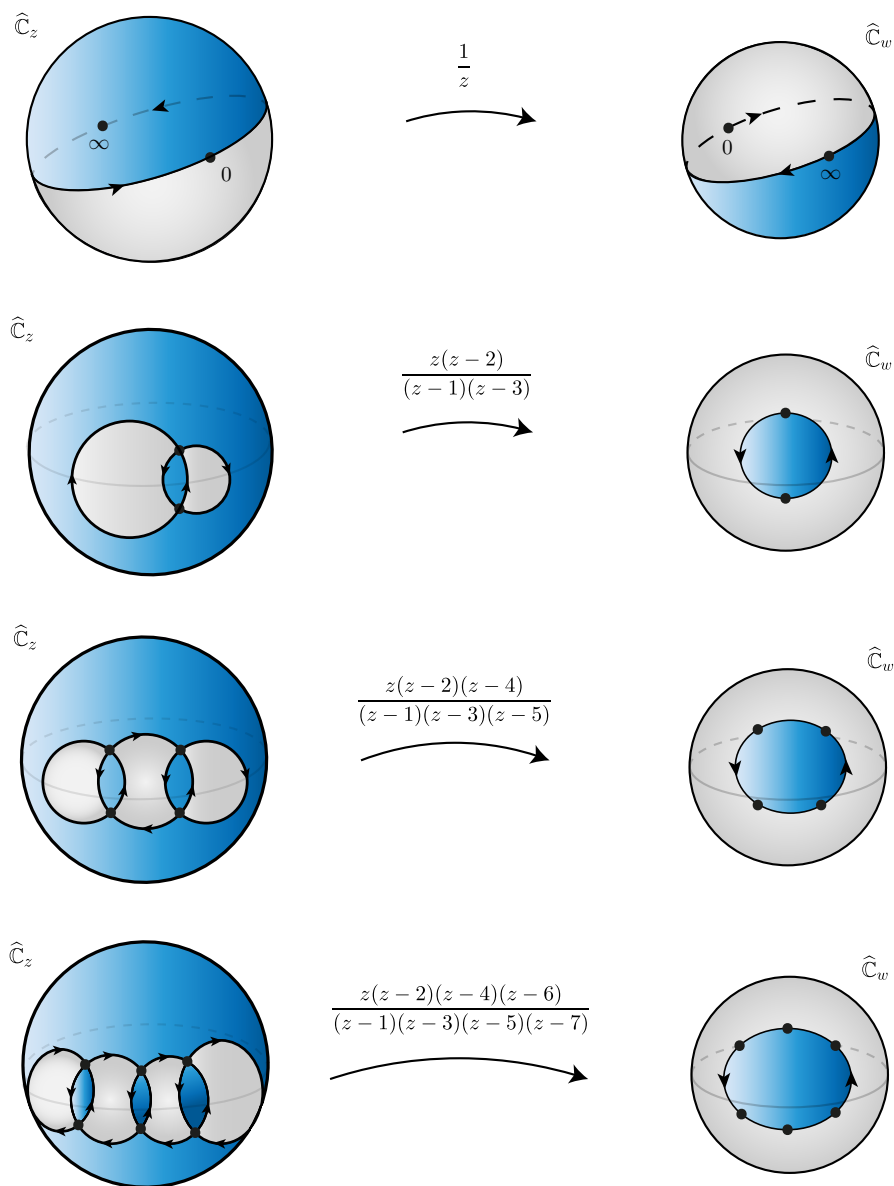
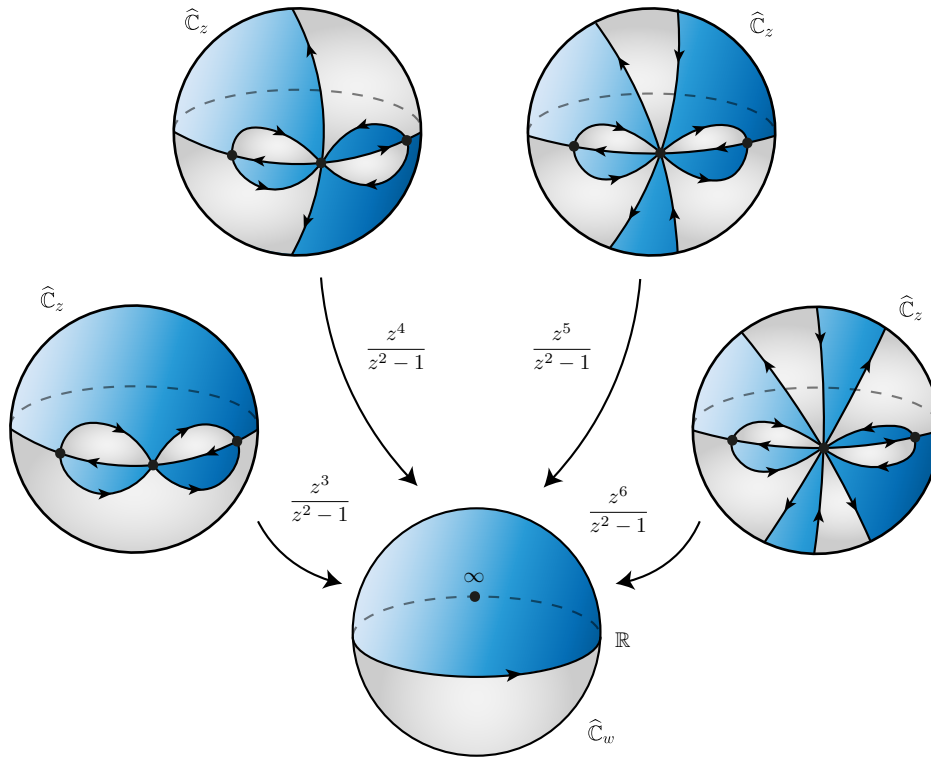


Figura 8. Cuatro mosaicos de Klein para funciones racionales de grados 1 a 4.

**Ejemplo 6.5** (Funciones racionales afortunadas). *Mostramos en la figura 9 cuatro funciones racionales afortunadas. Es un problema abierto describir la topología de los mosaicos que provienen de funciones racionales afortunadas, para todos los grados.*



**Figura 9.** Mosaicos de Klein para funciones racionales afortunadas, *i.e.* con todos sus valores críticos reales.

**Ejemplo 6.6** (Funciones trascendentes). *El algoritmo de Klein puede extenderse para muchas funciones trascendentes con singularidades esenciales<sup>4</sup> aisladas  $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$  cuando seleccionamos  $\gamma$  adecuadamente.*

*Consideramos la función exponencial*

$$e^z : \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_w.$$

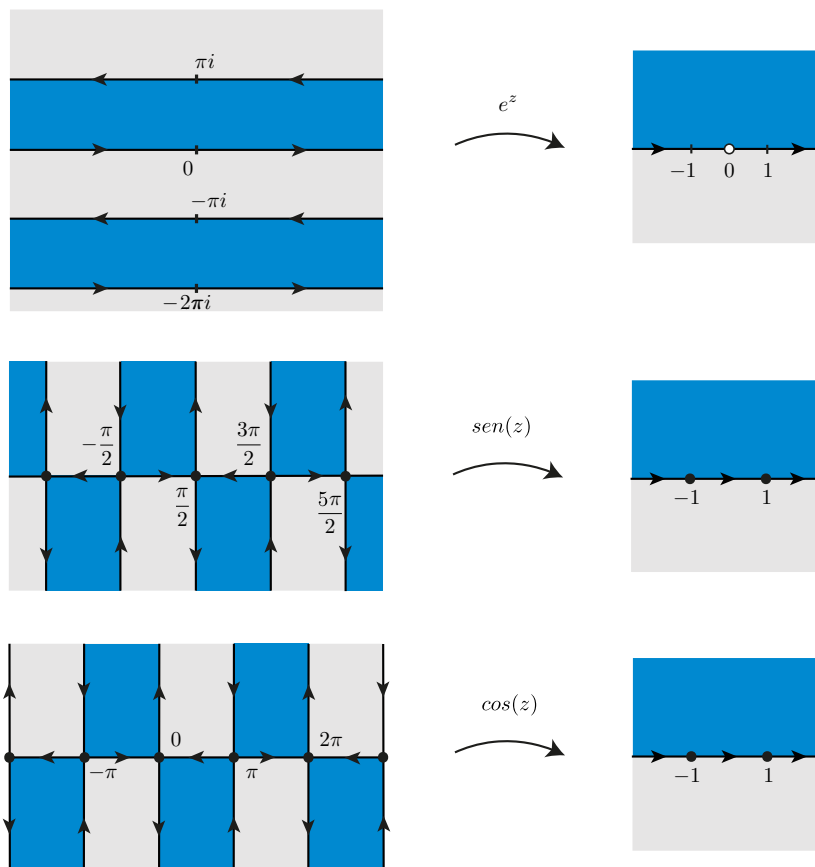
*Vista en  $\widehat{\mathbb{C}}_z$ , el punto  $\infty$  es una singularidad esencial aislada. La función exponencial no posee puntos críticos de orden finito en  $\widehat{\mathbb{C}}_z$ . Podemos decir que posee un punto crítico de orden infinito en  $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ , con valores asintóticos  $0, \infty \in \widehat{\mathbb{C}}_w$  respectivamente, para mayor detalle véase [6]. Por ello proponemos  $\gamma = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  y el algoritmo de Klein trabaja, véase la figura 10. La trayectoria generadora que resulta es*

$$\{\Im(e^z) = 0\} = \{e^x \sin(y) = 0\} \subset \mathbb{C}_z.$$

*Como segundo ejemplo, la función*

$$\text{sen}(z) : \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_w$$

<sup>4</sup> Recordemos que  $z_0$  es una singularidad esencial de una función  $f(z)$ , cuando el desarrollo en series de Laurent de  $f(z)$  alrededor de  $z_0$  posee un número infinito de potencias negativas.

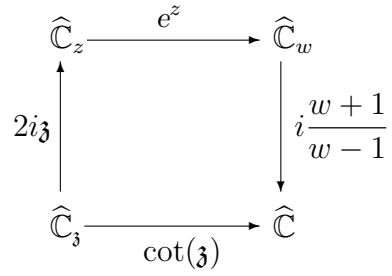


**Figura 10.** Mosaicos de Klein para tres funciones trascendentes en el plano complejo ( $e^z$  no asume el valor cero, hemos removido dicho valor en el contradominio).

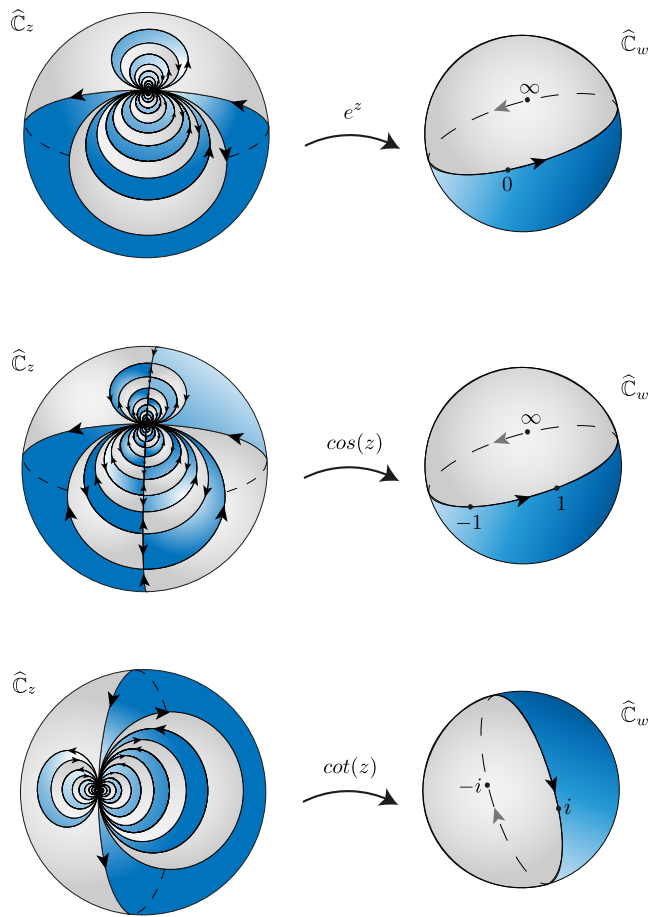
satisface que sus puntos críticos finitos y sus valores críticos coinciden con los de la función real  $\text{sen}(x)$ . El seno es una función afortunada y su trayectoria generadora es

$$\{\Im(\text{sen}(z)) = 0\} = \{\cos(x) \sinh(y) = 0\} = \left\{ \frac{1}{4}(e^{-ix} + e^{ix})(e^y - e^{-y}) = 0 \right\} \subset \mathbb{C}_z.$$

En la figura 11 mostramos los mosaicos de las funciones exponencial, el coseno y la cotangente en la esfera de Riemann. En particular, los mosaicos de la exponencial y la cotangente son analíticamente equivalentes bajo los siguientes cambios de coordenadas:



véase [23, p. 85].



**Figura 11.** Mosaicos de Klein para funciones trascendentes. En los 3 casos el número de losetas que se acumulan en  $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}_z$  es infinito.

Ello naturalmente origina los siguientes conceptos.

*Definición 6.1.* Dos mosaicos a dos colores  $\mathfrak{M}_\Gamma$  y  $\mathfrak{M}_\Upsilon$ , generados por dos gráficas  $\Gamma, \Upsilon$  en  $\widehat{\mathbb{C}}_z$ , son **analíticamente equivalentes** si existe

una transformación de Möbius que lleva  $\Gamma$  en  $\Upsilon$  preservando sus orientaciones (el ejemplo anterior ilustra esta definición).

Dos mosaicos  $\mathfrak{M}_\Gamma$  y  $\mathfrak{M}_\Upsilon$ , son **topológicamente equivalentes** si existe un homeomorfismo topológico de la esfera de Riemann que lleva  $\Gamma$  en  $\Upsilon$  preservando sus orientaciones.

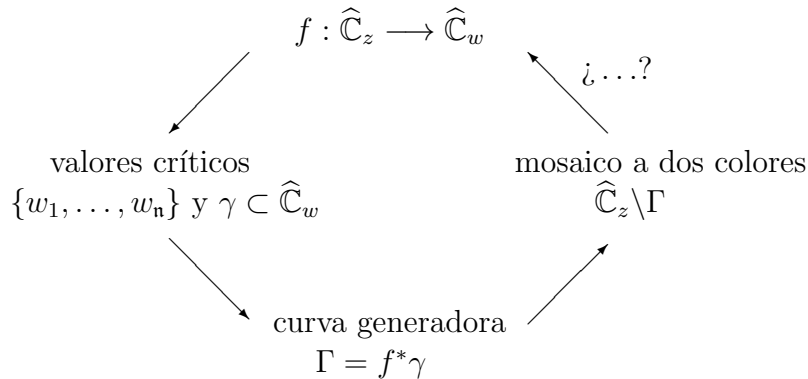
**Observación 6.1.** *Para construir el mosaico en el caso de tener singularidades esenciales aisladas, es necesario que  $\gamma$  visite una vez cada valor crítico y cada valor asintótico. Véase [6] para la descripción topológica de los valores asintóticos y [2, §3.1, §4.3] para la teoría que surge de jalar la red cartesiana bajo funciones con singularidades esenciales.*

Como hemos visto en §4 y §5, un punto crítico  $z_0$  de  $f$  determina en su mosaico de Klein una esquina con número finito de losetas (*i.e.* un vértice  $z_0$  de  $\Gamma$  con un número finito de aristas). Ello nos conduce al resultado siguiente.

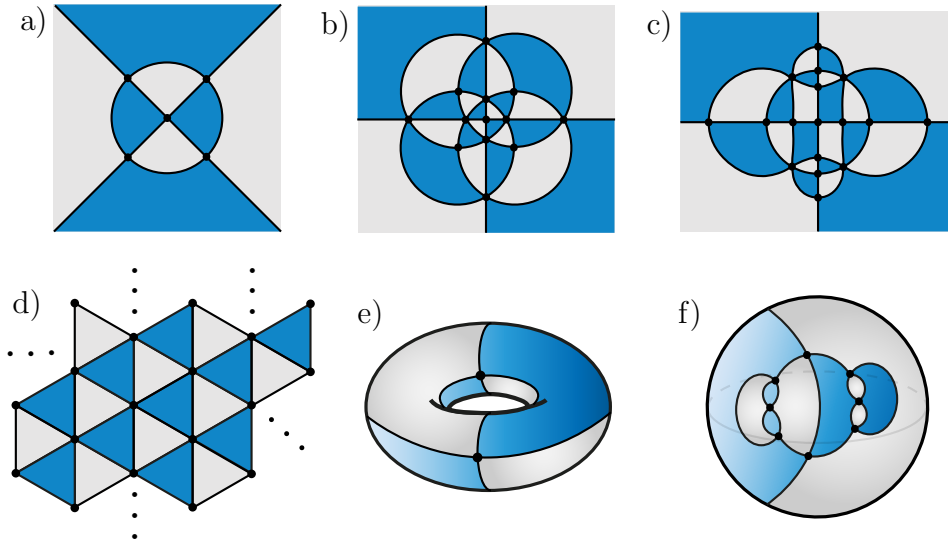
**Corolario 6.1.** *Para  $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$  con singularidades esenciales aisladas (en el sentido de series de Laurent). Si es posible construir un mosaico de Klein tal que un punto  $\epsilon_0 \in \widehat{\mathbb{C}}_z$  aparece como esquina de una infinidad de losetas del mosaico, entonces  $\epsilon_0$  resulta ser una singularidad esencial aislada de  $f$ .*

## 7. ¿Un recíproco para el algoritmo de Klein?

El algoritmo de visualización de Klein visto mediante un diagrama es como sigue:



Los signos de interrogación nos sugieren la búsqueda de funciones a partir de mosaicos a dos colores topológicos en el plano o en la esfera de Riemann, véase la figura 12. De acuerdo a [11], los mosaicos topológicos (a)–(e) provienen de funciones meromorfas adecuadas.



**Figura 12.** ¿Cuáles de estos mosaicos topológicos a dos colores son equivalentes topológicamente al mosaico de alguna función meromorfa?

**Un contraejemplo debido a W. P. Thurston.** El mosaico (f) en la figura 12 se debe a W. P. Thurston. Este mosaico topológico a dos colores no es equivalente topológicamente al mosaico de una función racional, véanse la figura 3 en [16] y el comentario 8 en §9.

Un resultado recíproco al algoritmo de visualización de F. Klein, es como sigue.

**Teorema 7.1** (L. J. González-Cely [10]). *Todo mosaico a dos colores en  $\widehat{\mathbb{C}}_z$ :*

- 1) *Con  $n \geq 2$  mosaicos azules y  $n$  grises (coloreados alternadamente) y*
  - 2) *donde todas las losetas escapan una vez a  $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ ,*
- es equivalente topológicamente al mosaico de un polinomio complejo*

$$P : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$$

*de grado  $n$  (construido mediante el algoritmo de visualización de Klein, para una trayectoria  $\gamma$  adecuada).*

## 8. Jalando la red polar

Debido a que los ceros y polos simples son puntos regulares (5), en general ellos no son detectados por los mosaicos de Klein. Buscando enmendar esta situación, en esta sección, nuestro objetivo es presentar un algoritmo de visualización para una función  $f$  que permita detectar:



- los ceros de  $f$  con sus multiplicidades,
- los polos de  $f$  con sus multiplicidades,
- los puntos críticos de  $f$  con sus órdenes.

Proveemos a la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}_w$  de la *red polar* de trayectorias radiales y circulares

$$\mathcal{R} = \underbrace{\{\arg(z) = \theta_0 \mid \theta_0 \in [0, 2\pi)\}}_{\text{en negro}}, \quad \mathcal{C} = \{|z| = r_0 \mid r_0 \in \mathbb{R}^+\}.$$

En la figura 14, hemos dibujado la familia de trayectorias  $\mathcal{R}$  en la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}_w$ . Es conveniente enfatizar que, los círculos maximales que pasan por 0 e  $\infty$  en  $\widehat{\mathbb{C}}_w$  se descomponen en dos trayectorias de  $\mathcal{R}$  y sus puntos extremos; análogamente como ocurre con  $\mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ .

**Observación 8.1** (Propiedades de la red polar). 1. *Por cada punto  $z \in \mathbb{C}_z \setminus \{0\}$  pasan exactamente una trayectoria radial de  $\mathcal{R}$  y una trayectoria circular de  $\mathcal{C}$ .*

2. *Las trayectorias radiales y circulares forman un ángulo de  $\pi/2$ .*

3. *Las trayectorias radiales  $\mathcal{R}$  están orientadas, i.e. dados dos puntos en una trayectoria radial el más cercano al origen antecede al más lejano al origen.*

**Algoritmo de visualización jalando la red polar** (para funciones meromorfas en la esfera de Riemann).

Consideramos una función meromorfa

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad \text{de grado } n \geq 1.$$

**Paso 1.** Localizamos los ceros y polos de  $f$  con sus multiplicidades, los puntos críticos de  $f$

$$z_1, \dots, z_m \subset \widehat{\mathbb{C}}_z$$

(con sus órdenes) y calculamos sus valores críticos

$$w_1, \dots, w_n \subset \widehat{\mathbb{C}}_w.$$

**Paso 2.** Definimos dos losetas en  $\widehat{\mathbb{C}}_w$  de colores azul y gris para  $\{\Im(w) > 0\}$  e  $\{\Im(w) < 0\}$  respectivamente, obteniendo

$$\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus \{\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}\} = \underbrace{T}_{\text{loseta azul}} \cup \underbrace{T'}_{\text{loseta gris}}.$$

**Paso 3.** Calculamos la **trayectoria generadora** del mosaico

$$\widehat{\Gamma} = \{z \mid \Im(f(z)) = 0\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_z.$$

**Paso 4.** Con ello  $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \widehat{\Gamma}$  queda descompuesta en losetas que coloreamos como sigue.

- 1) un punto  $z \in \mathbb{C}_z$  es azul si  $\Im(f(z)) > 0$ ,

2) un punto  $z \in \mathbb{C}_z$  es gris si  $\Im m(f(z)) < 0$ .

Véase la figura 14.

El algoritmo que nosotros atribuimos a S. Smale (quien lo introduce en sus trabajos con campos de Newton en [28] y posteriormente mejorado por H. Benzinger [5] y A. Álvarez-Parrilla *et al.* [1], [3, §4.4]), nos proporciona el siguiente resultado.

**Teorema 8.1** (S. Smale). 1) Toda función meromorfa  $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ , de grado  $n \geq 2$ , determina un mosaico a dos colores

$$\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \widehat{\Gamma} = \underbrace{T_1 \cup \dots \cup T_n}_{\text{losetas azules}} \cup \underbrace{T'_1 \cup \dots \cup T'_n}_{\text{losetas grises}}, \quad (9)$$

donde  $n \leq n$ , con igualdad si y solo si  $f$  es afortunada.

2) Los ceros  $f$  son pozos (atractores) y los polos son fuentes (repulsoras) de las trayectorias  $f^*\mathcal{R}$ ; en esos puntos las losetas alternan sus colores.

3) Los puntos críticos de  $f$  (distintos de ceros y/o polos) son multi-sillas de las trayectorias  $f^*\mathcal{R}$ .

4) Las multiplicidades de los ceros, polos y los órdenes de los puntos críticos están dados como en la figura 13 para las trayectorias de  $f^*\mathcal{R}$ .

Con ello hemos extendido la idea del algoritmo de Klein, incluyendo la detección de singularidades esenciales como en el corolario 6.1.

**Ejemplo 8.1.** Consideramos la siguiente función racional

$$\frac{z^3 - 1}{z^2} : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$$

y agrupamos sus datos a continuación.

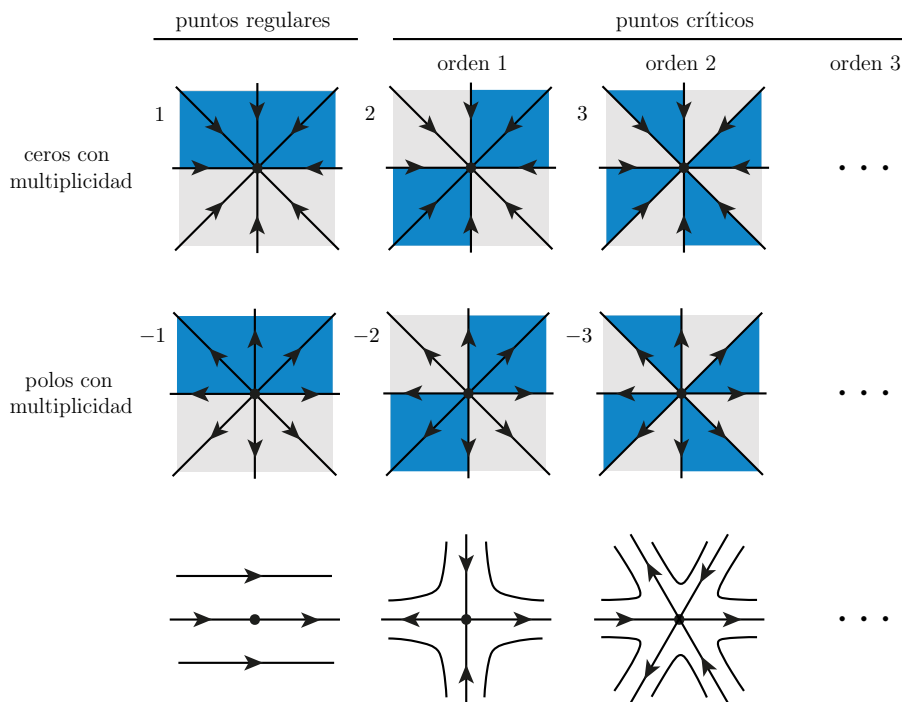
Tabla. Para  $z \mapsto \frac{z^3-1}{z^2}$ .

polos, multiplicidad	ceros, multiplicidad	puntos críticos $z_j$ , orden	valores críticos $w_l$
$(0, -2)$	$(1, 1)$	$(2^{1/3}e^{\frac{\pi}{3}i}, 1)$	$\frac{3}{2^{2/3}}e^{\frac{\pi}{3}i}$
$(\infty, -1)$	$(e^{\frac{2\pi}{3}i}, 1)$	$(2^{1/3}e^{\pi i}, 1)$	$\frac{3}{2^{2/3}}e^{\pi i}$
	$(e^{\frac{4\pi}{3}i}, 1)$	$(2^{1/3}e^{-\frac{\pi}{3}i}, 1)$	$\frac{3}{2^{2/3}}e^{-\frac{\pi}{3}i}$
		$(0, 1)$	$\infty$

La trayectoria generadora es

$$\widehat{\Gamma} = \left\{ \Im m \left( \frac{z^3 - 1}{z^2} \right) = 0 \right\} = \{y(x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x) = 0\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_z,$$

ella consta del eje real y un óvalo simétrico respecto a dicho eje, que pasa por  $0, -2^{1/3}$ .



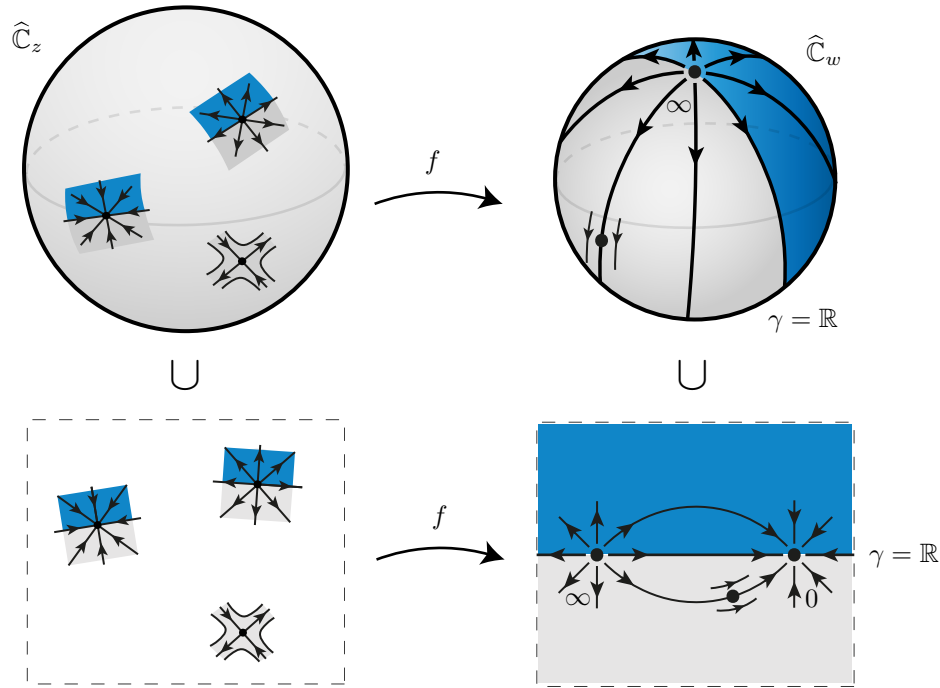
**Figura 13.** Comportamiento local de  $f^*\mathcal{R}$  alrededor de  $z_j \in \hat{\mathbb{C}}_z$ . En la primera línea, los ceros de  $f$  son pozos (atractores). En la segunda línea, los polos de  $f$  son fuentes (repulsoras). En la tercera línea, primera columna punto regular de  $f$ , en el resto los puntos críticos de  $f$  son multi-sillas con un número par de sectores hiperbólicos. En la tercera línea el color es azul si el valor crítico satisface que  $\Im m(f(z_j)) > 0$ , es gris si  $\Im m(f(z_j)) < 0$ , o tienen colores alternados (como en la figura 4) si  $f(z_j) = 0, \infty$ . Las columnas 2, 3, ... describen los puntos críticos de orden 1, 2, ...

Es instructivo considerar la composición  $(1/w) \circ ((z^3 - 1)/z^2)$  y verificar como cambian los ceros, polos y puntos críticos.

Tabla. Para  $z \mapsto \frac{z^2}{z^3-1}$ .

polos, multiplicidad	ceros, multiplicidad	puntos críticos $z_j$ , orden	valores críticos $w_L$
$(1, -1)$	$(0, 2)$	$(2^{1/3}e^{\frac{\pi}{3}i}, 1)$	$\frac{2^{2/3}}{3}e^{\frac{2\pi}{3}i}$
$(e^{\frac{2\pi}{3}i}, -1)$	$(\infty, 1)$	$(2^{1/3}e^{\pi i}, 1)$	$\frac{2^{2/3}}{3}e^{\pi i}$
$(e^{\frac{4\pi}{3}i}, -1)$		$(2^{1/3}e^{\frac{-\pi}{3}i}, 1)$	$\frac{2^{2/3}}{3}e^{\frac{\pi}{3}i}$
		$(0, 1)$	0

La figura 15 muestra los mosaicos de Smale y de Klein para  $(z^3 - 1)/z^2$ .



**Figura 14.** Los mosaicos locales para una función meromorfa deben pegar globalmente para formar un mosaico a la Smale bien definido en todo  $\hat{\mathbb{C}}_z \setminus \hat{\Gamma}$ .

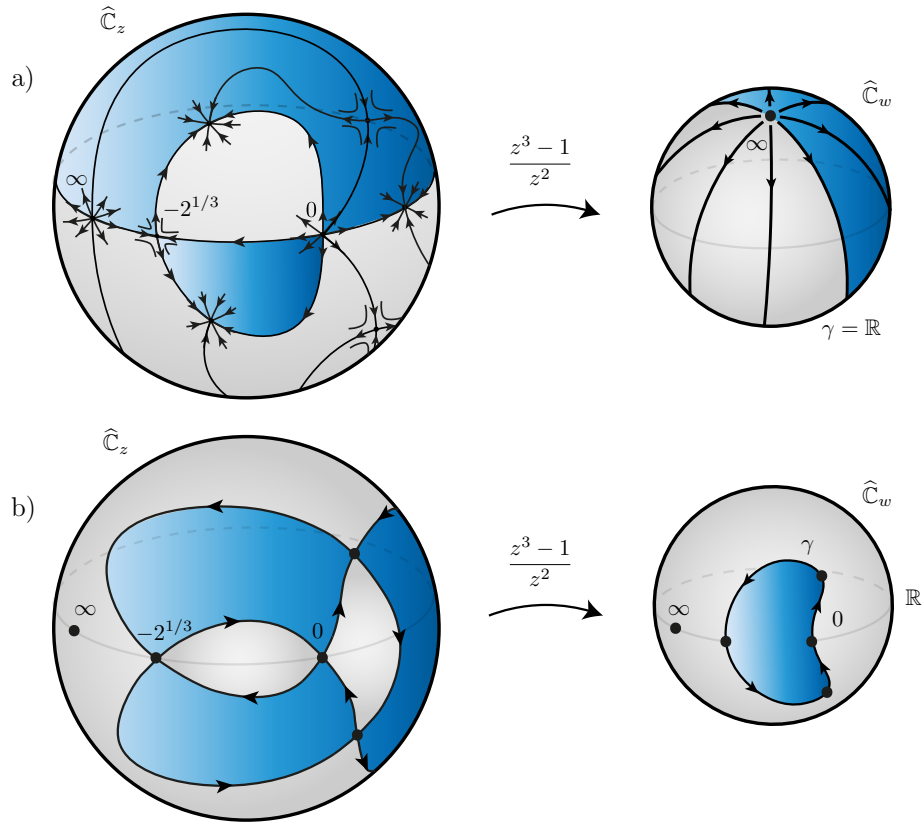
Recordemos que en el algoritmo de Smale  $\gamma = \{\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}\}$ . Ahora aplicando los algoritmos de Klein y Smale;  $f$  meromorfa en  $\hat{\mathbb{C}}$  es afortunada si y solo si  $\Gamma = \hat{\Gamma}$  es posible para una elección adecuada de  $\gamma$ .

## 9. Breves palabras del desarrollo de esta técnica

Como guía inicial de la literatura para el lector interesado, hacemos los siguientes comentarios (necesariamente incompletos).

1. Hasta donde sabemos F. Klein fue pionero en construir mosaicos asociados a funciones analíticas complejas, elaboró bellas figuras que pueden admirarse en [7], véase también [15] y [26].

2. A. H. Schwarz estudió mosaicos de  $\hat{\mathbb{C}}$  que provienen de ecuaciones diferenciales complejas de segundo orden, en particular la ecuación hipergeométrica de Gauss, véase [27] para su trabajo original. En [31, §5.3], M. Yoshida proporciona una explicación moderna de la teoría y figuras explícitas para los mosaicos que emanan de la teoría de Gauss-Schwartz.



**Figura 15.** Mosaicos para la función meromorfa  $f(z) = (z^3 - 1)/z^2$  de grado  $n = 3$  y no afortunada. a) Mosaico de Smale  $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \widehat{\Gamma}$  obtenido jalando la red polar bajo  $f$ , aparecen  $2n = 4$  losetas. b) Mosaico de Klein  $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \widehat{\Gamma}$  para la misma función, aparecen  $2n = 6$  losetas de acuerdo al teorema 5.1. Evidentemente  $\widehat{\Gamma} \neq \Gamma$ .

**3.** R. Nevanlinna estableció un diccionario entre: funciones analíticas complejas, mosaicos y gráficas discretas, véanse [21], [22, cap. XI §2] y [23, cap. 6].

**4.** Motivados por problemas variacionales J. Jenkins [13] y K. Strebel [29] introdujeron las redes de trayectorias horizontales y verticales para diferenciales cuadráticas. S. Kerckhoff *et al.* [14], observaron que esas foliaciones son flujos de billares (1-formas holomorfas). En [20] se enunció la equivalencia entre diferenciales cuadráticas, 1-formas y campos complejos (en la categoría racional compleja). Recientemente en [2], la equivalencia se extiende para el caso de funciones analíticas complejas con singularidades esenciales.

**5.** G. V. Belyı̄ introdujo el estudio de superficies de Riemann compactas  $S$  y mosaicos formados por copias de un triángulo euclidiano fijo. Ello es equivalente a considerar funciones racionales con solo tres

valores críticos, digamos  $\{0, 1, \infty\}$ ; que ahora se conocen como funciones de Belyĭ. Ello dio origen a la teoría de dibujos de niños (*dessins d'enfants*) impulsada por A. Grothendieck en su manuscrito *Esquisse d'un programme* (1984). El trabajo original de Belyĭ es [4]; [19] presenta una introducción, mientras que [17, cap. 2] proporciona una visión panorámica.

**6.** La idea de jalar la red polar se debe a S. Smale. El resultado de jalar el campo radial atractor bajo una función,  $f^*(-x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y})$  se conoce como campo de Newton asociado a  $f$  y tiene la propiedad de que el  $\omega$ -límite de sus trayectorias coincide con los ceros de  $f$ . Véanse [28], [1], [2, §3.2] y [3]. Ello produce un «método de Newton continuo» para hallar ceros de funciones analíticas complejas.

**7.** A. Eremenko y A. Gavrielov establecieron en [9] el resultado siguiente. Si todos los puntos críticos de una función racional  $f$  pertenecen a un círculo  $\mathcal{C}$  en la esfera de Riemann, entonces  $f(\mathcal{C})$  es también un círculo. Esta es nuestra motivación para el concepto de función meromorfa afortunada.

**8.** W. P. Thurston había enunciado desde mediados de los 80's un resultado profundo de caracterización combinatoria de la dinámica de una función racional; ver el enunciado y la prueba en A. Douady y J. H. Hubbard [8]. Thurston mismo formuló la pregunta: *¿cuándo un mosaico a dos colores (topológico) en la esfera proviene de una función racional?* Véase S. Koch y T. Lei [16].

**9.** Al jalar mediante  $f$  las redes cartesianas o polares se obtienen campos vectoriales analíticos complejos en  $\widehat{\mathbb{C}}_z$ ; que a priori tienen ceros, polos, singularidades esenciales y puntos de acumulación de las tres anteriores clases. El resultado recíproco es válido; «todo campo analítico complejo singular en una superficie de Riemann que posee ceros, polos, singularidades esenciales y puntos de acumulación puede obtenerse jalando la red cartesiana o la red polar, para funciones adecuadas», véase [2, §3].

**10.** El trabajo de A. Guillot [12] muestra otras bellas relaciones entre campos vectoriales complejos y estructuras geométricas.

**Agradecimiento.** A Iván González Ballesteros quién colaboró en la presentación de las figuras.

## Bibliografía

- [1] A. Álvarez-Parrilla, A. Gómez-Arciga y A. Riesgo-Tirado, «Newton vector fields on the plane and on the torus», *Complex Variables and Elliptic Equations*, vol. 54, núm. 5, 2009, 449–461, <https://doi.org/10.1080/17476930902755658>.

- [2] A. Alvarez–Parrilla y J. Muciño–Raymundo, «Dynamics of singular complex analytic vector fields with essential singularities I», *Conform. Geom. Dyn.*, vol. 21, 2017, 126–224, <http://dx.doi.org/10.1090/ecgd/306>.
- [3] A. Alvarez–Parrilla, J. Muciño–Raymundo, S. Solorza y C. Yee–Romero, «Singular complex analytic vector fields on Riemann surfaces and visualization without numerical integration», en *Proceedings of the 2018 Workshop in Holomorphic Dynamics*, ed. C. Cabrera *et al.* eds., Instituto de Matemáticas, UNAM, México, Serie Papirhos, Actas 1, 2019, <https://arxiv.org/abs/1811.04157>, 21–109.
- [4] G. V. Belyĭ, «On Galois extensions of a maximal cyclotomic field», *Math. USSR Izvestija*, vol. 193, núm. 14, 1980, 247–256, <https://doi.org/10.1070/IM1980v014n02ABEH001096>.
- [5] H. E. Benzinger, «Plane autonomous systems with rational vector fields», *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 326, núm. 2, 1991, 465–483, <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1991-0992604-1>.
- [6] W. Bergweiler y A. Eremenko, «On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order», *Revista Matemática Iberoamericana*, vol. 11, núm. 2, 1995, 375–373, <https://doi.org/10.4171/RMI/176>.
- [7] E. Chislenko y Y. Tschinkel, «The Felix Klein protocols», *Notices of the AMS*, vol. 54, núm. 8, 2007, 960–970, <https://www.ams.org/notices/200708/tx070800960p.pdf>.
- [8] A. Douady y J. H. Hubbard, «A proof of Thurston’s topological characterization of rational functions», *Acta Math.*, vol. 171, núm. 2, 1993, 263–297, <https://doi.org/10.1007/BF02392534>.
- [9] A. Eremenko y A. Gabrielov, «Rational functions with real critical points and the B. and M. Shapiro conjecture in real enumerative geometry», *Ann. of Math.*, vol. 155, núm. 1, 2002, 10–129, <https://doi.org/10.2307/3062151>.
- [10] L. J. González–Cely, «Combinatorial aspectos of complex polynomials and tesellations of the Riemann sphere», 2019.
- [11] L. J. González–Cely y J. Muciño–Raymundo, «Tesellations, singular complex analytic functions and vector fields», 2020.
- [12] A. Guillot, «Complex differential equations and geometric structures in curves», en *Geometrical Themes Inspired by the N–body Problem*, Hernández–Lamonedá L., *et al.* eds., *Lecture Notes in Mathematics 2204*, ed. Springer, 2018, [https://doi.org/10.1007/978-3-319-71428-8\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-71428-8_1), 1–47.
- [13] J. Jenkins, *Univalent Functions and Conformal Mapping*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer–Verlag, Berlin, 1958.
- [14] S. Kerckhoff, H. Masur y J. Smillie, «Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials», *Ann. of Math. 2*, vol. 124, núm. 2, 1986, 293–311, <https://doi.org/10.2307/1971280>.
- [15] F. Klein, *Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree*, Dover Publications, Inc., New York, N.Y., 1956.
- [16] S. Koch y T. Lei, «On balanced planar graphs, following W. Thurston», 2015, <https://arxiv.org/pdf/1502.04760.pdf>.
- [17] S. K. Lando y A. K. Zvonkin, *Graphs on surfaces and their applications*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 141. Low–Dimensional Topology, II. Springer–Verlag, Berlin, 2004, <https://doi.org/10.1007/978-3-540-38361-1>.
- [18] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics vol. 5, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1995, <https://doi.org/10.1090/gsm/005>.
- [19] J. Muciño–Raymundo, «Superficies de Riemann y funciones de Belyĭ», en *Tópicos de Geometría Algebraica*, L. Brambila *et al.* eds., *Aportaciones Matemáticas*, 31, ed. Sociedad Matemática Mexicana, 2002, <http://matmor.unam.mx/~muciray/docencia/A-D-10.pdf>, 151–171.

- [20] J. Muciño-Raymundo y C. Valero-Valdéz, «Bifurcations of meromorphic vector fields on the Riemann sphere», *Ergodic Theory Dynam. Systems*, vol. 15, núm. 6, 1995, 1211–1222, <https://doi.org/10.1017/S0143385700009883>.
- [21] R. Nevanlinna, «Über Riemannsche flächen mit endlich vielen windungspunkten», *Acta Math.*, vol. 58, núm. 1, 1932, 295–373, <https://doi.org/10.1007/BF02547780>.
- [22] ———, *Analytic Functions*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 162, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970, <https://doi.org/10.1007/978-3-642-85590-0>.
- [23] R. Nevanlinna y V. Paatero, *Introduction to Complex Analysis*, Addison-Wesley, Reading Massachusetts, 1964.
- [24] phuebu1, *Mapping of  $z^c$  from the unit square*, Video en Youtube, 28 oct. 2013, <https://www.youtube.com/watch?v=NTz5P8ofE3o>.
- [25] R. Remmert, *Theory of Complex Functions*, Graduate Texts in Mathematics vol. 122, Springer-Verlag, New York, 1991, <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0939-3>.
- [26] C. H. Rodríguez-Basulto, «Método de Newton y mosaicos en la esfera de Riemann», 2008, [http://matmor.unam.mx/~muciray/licenciatura/Poster\\_valle.pdf](http://matmor.unam.mx/~muciray/licenciatura/Poster_valle.pdf).
- [27] H. A. Schwarz, «Ueber diejenigen fälle, in welchen die gaussische hypergeometrische reihe eine algebraische function ihres vierten elementes darstellt», *J. Reine Angew. Math.*, vol. 75, 1873, 292–335, <https://doi.org/10.1515/crll.1873.75.292>.
- [28] S. Smale, «A convergent process of price adjustment and global Newton methods», *J. Math. Econom.*, vol. 3, núm. 2, 1976, 107–120, [https://doi.org/10.1016/0304-4068\(76\)90019-7](https://doi.org/10.1016/0304-4068(76)90019-7).
- [29] K. Strebel, *Quadratic Differentials*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3 Folge Band 5, Springer-Verlag, Berlin, 1984, <https://doi.org/10.1007/978-3-662-02414-0>.
- [30] E. Wegert, *Visual Complex Functions an Introduction with Phase Portraits*, Springer Basel, 2012, <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0180-5>.
- [31] M. Yoshida, *Fuchsian Differential Equations*, Aspects of Mathematics E 11, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 1987, <https://doi.org/10.1007/978-3-663-14115-0>.